体験入学 結び目の不思議

内田 吉昭

1 Introduction

日常生活の中で昔から結び目は使われてきました．新聞紙を縛ったり，船を岸壁に係留したり，また水引やしめ縄などの装飾にも使っています．昔は船の速さを測るためにロープに一定の間隔で結び目を作りそれを海に流して速さを測りました．そのため船の速さはノット (knot:結び目) と言います．

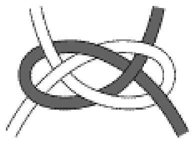


図 1: 水引

今日では結び目はいろいろな科学現象の中で見出されています．たとえば，DNA は 2 重螺旋の紐ですが，これを 1 本の紐とみなすと結び目になるものがあります．これを DNA 結び目と言います．これの電子顕微鏡写真を見せましょう．図 2.

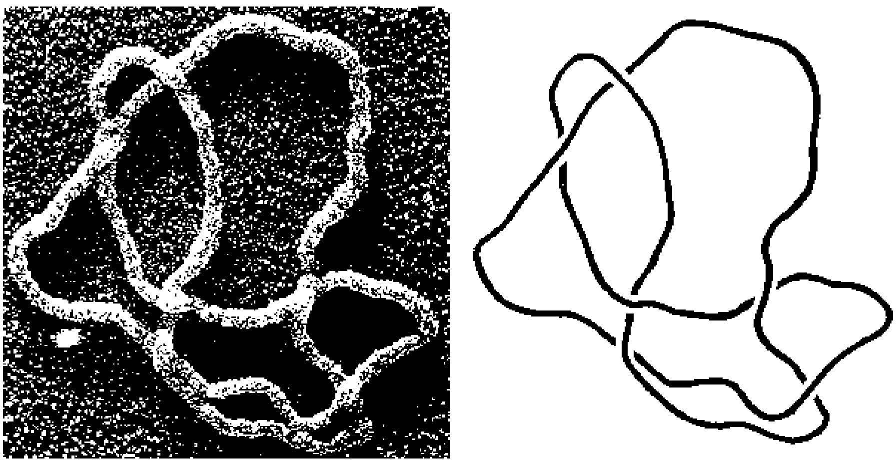


図 2: DNA

これは DNA 結び目の数学的研究を積極的に推進しているフロリダ州立大学の D. W. Sumners 教授が来日された折講義に使用されたものです．

また天文学にも結び目が出てきます．土星に輪があることはみなさんご存知でしょう．この輪の中に F 環と呼ばれる輪があります．この輪はどうも絡んでいる様でなぜ絡んでいるのかが議論されています．少し見にくいのですが 図 3 に NASA の写真を載せておきます．これはボイジャー 2 号が撮った写真です．

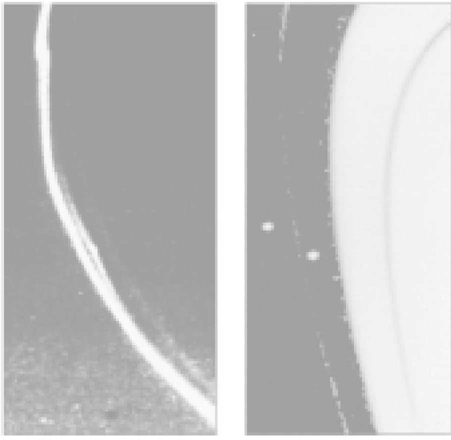


図 3: 土星の F 環

このように結び目はいろいろな分野と関係があります．(あやとりとか髪の毛で作るおさげなども結び目と関係があります．)

2　結び目理論

結び目をどのように数学的に扱うのかを考えてみよう．各自にプラスチックでできた紐を渡してあるのでこの紐を持ちながら考えてください．

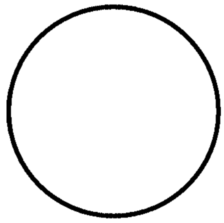
練習 この紐を用いて色々な結び目を作りましょう

たくさんの結び目を作ることができましたか？しかしながら、実はどれも数学的にみると同じ結び目です．なぜなら、この紐のはしを持って振ってみましょう．結び目は解けて 1 本のまっすぐな紐になるでしょう．

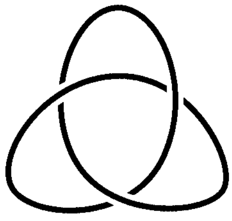
したがって数学で結び目を考えるときには紐の両端をつなげて 1 つの輪にして考えます．つまり 図 4 のようなものを考える訳です．

図 4 の左の結び目は自明な結び目 (trivial knot) とか結ばれていない結び目 (unknot) と言います．真中の結び目は三つ葉結び目 (trefoil knot) そして右の結び目は 8_{18} と言う結び目です．

結び目は空間内にあるので紙の上に実現させることは自明な結び目を除いて不可能です．そこで 図 4 のように紙に結び目の交差点の上下の情報を入れて描いたものを結び目のダイアグラムといいます．



自明な結び目



三つ葉結び目

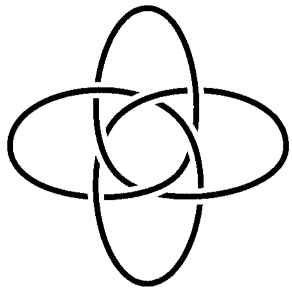


図 4: 結び目 (knot)

練習 持っている紐でたくさんの結び目を作りましょう.

結び目理論はトポロジー (topology:位相幾何学) と呼ばれる分野の一部分です. トポロジーとは連続的な変形を行なって不変な図形の性質を研究する学問です. 浮き輪とドーナツが同じであるとか聞いたことがあると思います.

3　結び目理論の目的

問い 図 5 の中から同じ結び目を探し出しましょう.

2 つの結び目が**同じ**とは紐を切ることなく空間内で動かして移り合うことです.

結び目理論の基本的な目標とは 2 つの結び目が同じか異なるかを調べることです. そのために結び目の性質とかを研究しています.

図 5 の中で同じ結び目は次のとおりです. (i)、(ii)、(iv)、と (viii). さらに (vi) と (vii) が同じ結び目の組になります.

(i) は自明な結び目でしたが (viii) も同じ自明な結び目です. このように一番簡単な自明な結び目でも複雑な表し方があります.

未解決問題 与えられたダイアグラムが自明な結び目を表しているかどうかを判定する方法を見つけよ.

また、(iii) と (v)、(vi) と (vii) を見てください. どちらの対も交差点の上下が入れ替わっています. これは鏡に映したように見えることから鏡像といいます. そして、 (iii) の三つ葉結び目は鏡像とは同じでないのですが (vi) の 8 の字結び目 (figure-eight knot) は鏡像と同じになります. (vi) が (vii) に変形できることを確かめてください. 不思議ですね.

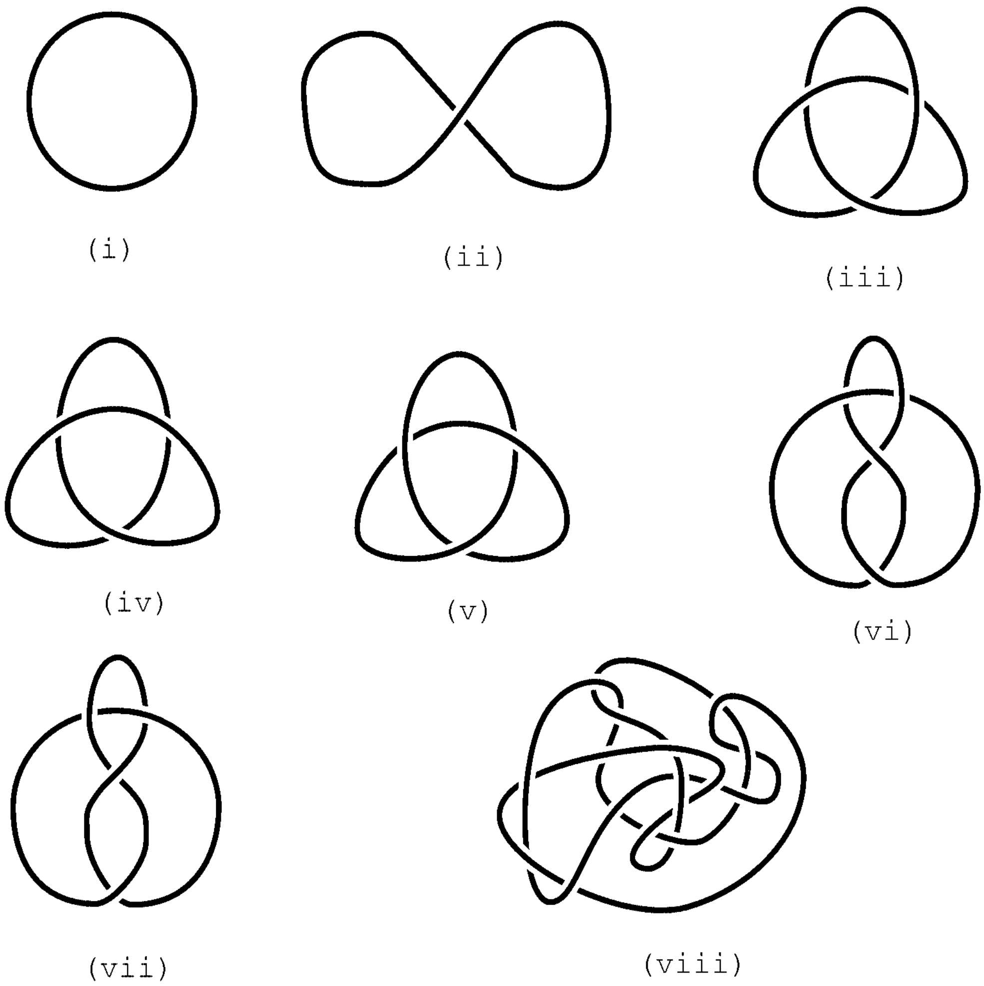


図 5: 同じ結び目を探そう

4 Reidemeister 変形

はじめに三つ葉結び目 (trefoil knot) を考えよう．図 6 のダイアグラムも三つ葉結び目のダイアグラムです.

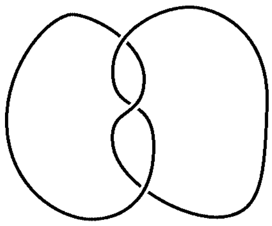


図 6: 三つ葉結び目

紐を使って変形してみてください．また，変形できた人は三つ葉結び目のダイアグラムをなるべくたくさん考えてみてください.

結び目のダイアグラムを変形して同じ結び目の新しいダイアグラムを作る操作はたくさんあるように見えますが，実は次の 3 つの変形 (RI，RII，RIII) をダイアグラムに何回か行う事により得られる事がわかっています.

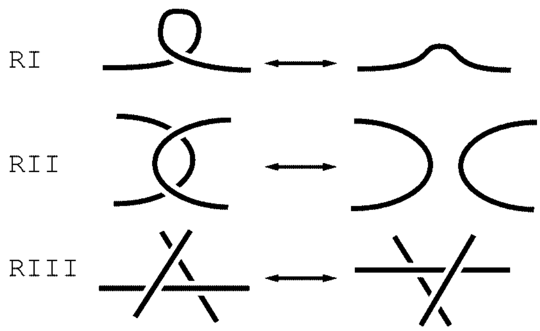


図 7: Reidemeister 変形

定理 ある結び目 k の 2 つのダイアグラム D_1 と D_2 に対して Reidemeister 変形と呼ばれる次の変形を何回か行って一方の結び目のダイアグラムを他方に変形できる.

図 6 の三つ葉結び目のダイアグラムを図 4 のダイアグラムに Reidemeister 変

形を施して変形してみましょう．以下のスペースに変形を描いてみましょう．

三つ葉結び目の Reidemeister 変形

次に三つ葉結び目が解けない事を示して見ましょう．解けるという事は Reidemeister 変形で自明な結び目に変形できる事です．今までの話を聞いていなければ，何故こんな事を考えるのかと不思議に思う学生もいるでしょう．しかし，図 5 (viii) が自明な結び目と同じ事を知っていれば，三つ葉結び目が解けないことは明らかなことではないですね．

二つの結び目が異なる事を示すためには結び目固有の性質 (これを結び目の不変量と言います．) を調べます．

不変量とはどのようなものでしょうか？たとえばダイアグラムの交差点の個数は不変量でしょうか．これは不変量にはなりませんね．図 5 の (i) と (ii) は同じ結び目のダイアグラムですが交差点の個数は異なります．ダイアグラムの描き方によらずに決まるものでないと駄目だと言う事がわかります．すなわち Reidemeister 変形で変らない性質が結び目の不変量になります．

ここでは 3 色塗り (tri-coloring) と言うのを考えてみましょう．3 色塗りとは結び目のダイアグラムの各辺を 3 色使って図 8 のように以下の条件を満たすように塗る事です．1 つの交差点で 3 つの辺の色はすべて異なるかまたはすべて同じになるようにします．三つ葉結び目の図 5(iii) のダイアグラムは 3 色塗りできますが，図 5(ii) の自明な結び目のダイアグラムでは 3 色塗りできないでしょう．では (viii) のダイアグラムではどうでしょうか？実はこれも不可能です．なぜなら 3 色塗りと言う性質は Reidemeister 変形で不変なのです．

確かめてみましょう．

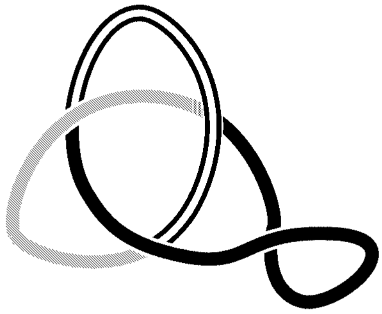


図 8: 3 色塗り

このようにしてはじめて三つ葉結び目は解くことができないことがわかります. 8 の字結び目は三つ葉結び目とも自明な結び目とも異なるのですがこの方法で示すことはできません．興味のある学生はどうすれば区別できるか考えてください.

高校生でも読むことのできる参考書をあげておきます.

結び目の話 村上斉 遊星社 1500 円

さらにトポロジーに興味のある学生は講談社のブルーバックスのシリーズにわかりやすく書かれているものがあります．(高校の図書室に入っていると思います) また、矢野健太郎 (すばらしい数学者たち・ゆかいな数学者たち) など見て勉強してください.

あと、結び目理論に興味を持ち大学で勉強したい人は結び目理論を研究している人がいる大学を受験してください．すべての大学に結び目理論を研究している研究者がいるわけではないので.