7　彩色グラフ

7.1　グラフに色を塗って

平面に適当にグラフを描く．ただし，次数が 1 の頂点 ——● を持たないようにする．このとき見やすいように面に色を塗りたい．すべて同じ色で塗ってしまうのも 1 つの方法だが、辺で隣り合う面は同じ色に塗ると区別つかなくなるので異なる色で塗ることにする．しかし、使う色を減らしたいために、頂点で接していれば同じ色でもかまわないことにする．たとえば図 55 の様に塗るのですね．

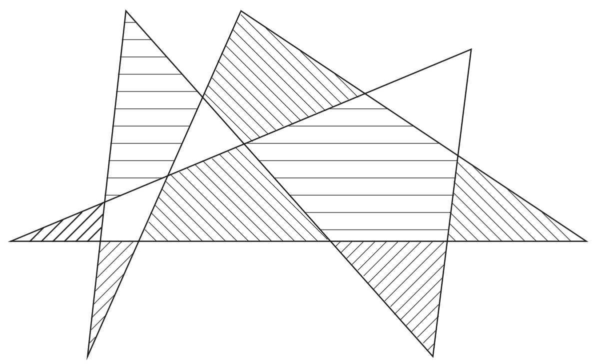


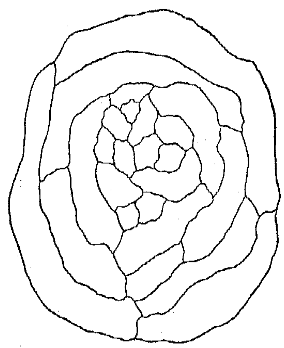
図 55: グラフの塗り分け

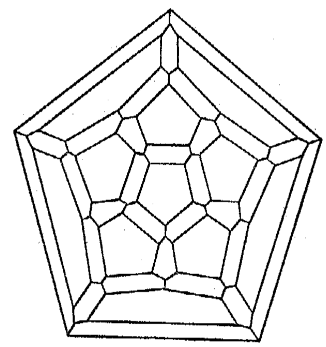
[**何色必要か**] 平面上にあるグラフが与えられた時、何色用意しないといけないでしょうか？もちろん，面の数だけ色を用意しておけば問題無く色を塗ることはわかります．でも，色が多すぎて経済的でないのは確かです．そこでグラフがあった時に色を塗るのに最低どれだけの色を用意しておかないといけないかを考えていくことにしましょう．

ノートにいくつかグラフを描いて面に色を塗ってみてください．次に最低色は何色必要かを考えていきます．どんなグラフも面があれば色を塗らなければならないので 1 色は必要だと言うことがわかります．

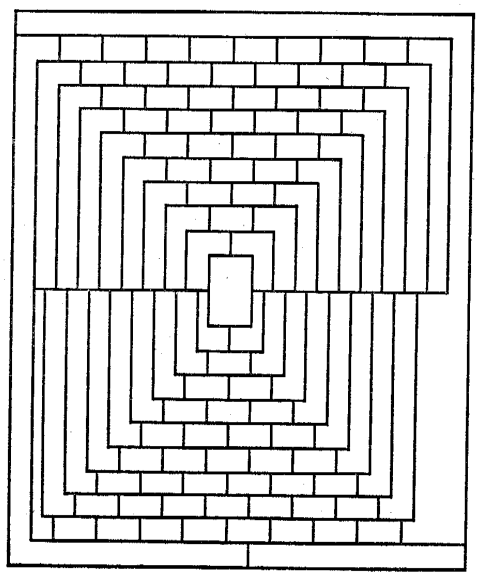
[**考えましょう**] 以下を満たすグラフをノートに描きましょう．
(1) 2 色必要なグラフを考えましょう．
(2) 3 色必要なグラフを考えましょう．
(3) 4 色必要なグラフを考えましょう．
(4) 5 色ではどうでしょうか．

自分で実験できる学生は良いけれど中には自由にグラフを描いたりするのが苦手な学生がいるので図 56 にいくつかのグラフを描いておいたので自分でグラフ

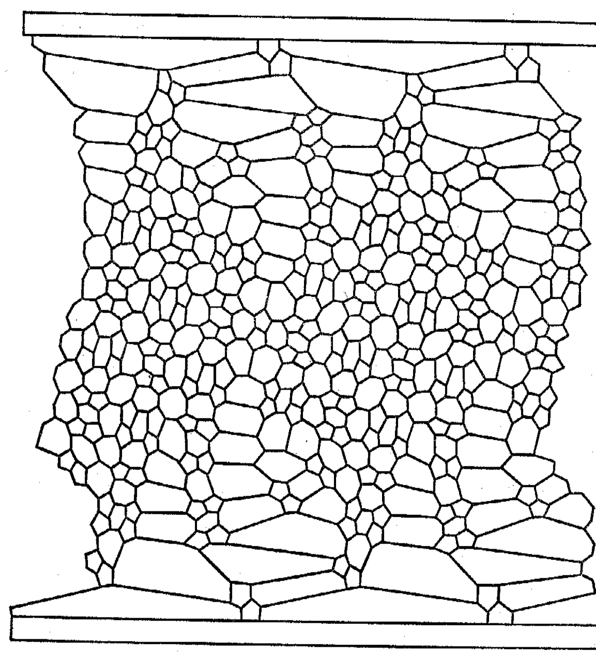




フランクリンの論文に登場する 42 国からなる地図



ガードナー (M. Gardner) が《Scientific American》(1975 年 4 月号) に載せたもの



ムーアの地図　ウィスコンシン大学のムーア (E. E. Moore) が作った 846 国からなる地図の一部

図 56: グラフに色を塗って

を描くのが苦手な学生は、図 56 のグラフに対して各々何色色が必要か考えてください.

実は「どんな球面 (平面) 上のグラフも 4 色あれば塗りわけ可能である」と言うことが示されています. これは **四色問題** と呼ばれ 1976 年にアペルとハーケンにより可能であることがスーパーコンピューターを 1,200 時間ほど使う事により証明されました.

図 57 のグラフに対して 4 色で塗ってみよう. 図 57 に同じグラフがたくさんあるのは 4 色塗りに失敗する学生がたまにいるので 5 回ぐらいは失敗してもいいように 9 個準備してあります. しかし、失敗したあとではなぜ失敗したのかを考えないといけません. なぜ塗れなかったかを良く考えてから新しいグラフに挑戦しましょう.

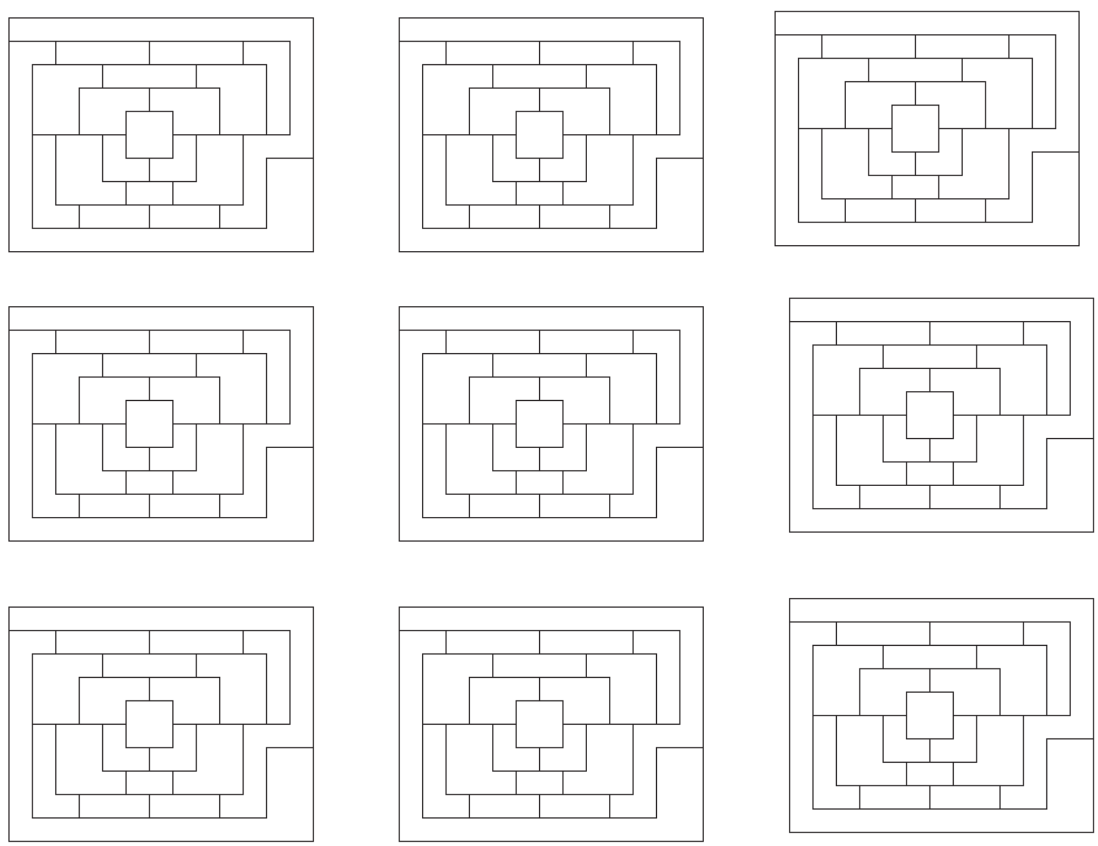


図 57: 4 色で塗り分け

練習問題 図 56 に対して 4 色で色を塗って見よう .

7.2　トーラス上の七色問題

7.2.1　トーラス

図 58 に描かれているような図形を**トーラス (torus)** と言う．

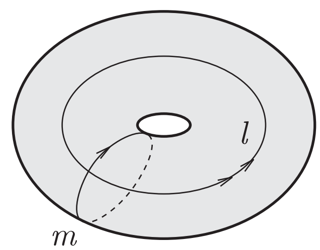


図 58: トーラス (torus)

具体的なイメージとしては浮き輪とかドーナツの表面を考えてもらえばよい．ここでは、トーラス上でのグラフを考えるのだが，図 58 上にグラフを描いていくのは大変である．ためしに図 58 上にグラフを描いてみて欲しい．そこで、図 58 の m と l でトーラスを切ってみる．(m をメリディアン (meridian)、 l をロンディチュード (longitude) という．)

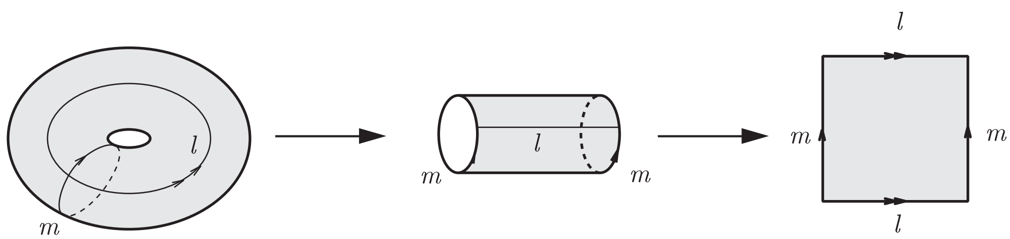
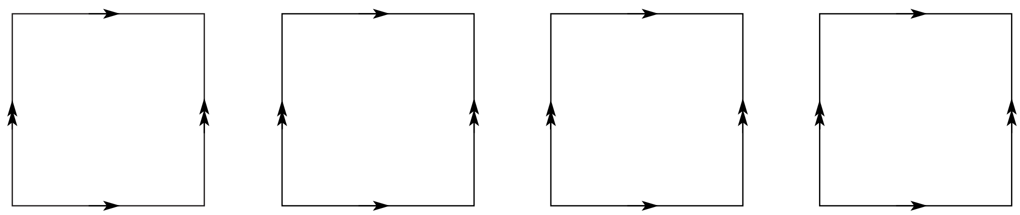


図 59: トーラスを切る

図 59 がその図である．最終的には正方形が得られる．逆に正方形の各々の辺を矢印に沿って張り合わせるとトーラスができる事になる．このことが分りにくい学生は帰りにミスタードーナツに行きドーナツを見ながら考えて欲しい．

そこで、以下にトーラスの絵をいくつか用意したので、トーラス上のグラフをいくつか描いてみてほしい．当然、辺を張り合わせてトーラスにした時にちゃんとしたグラフにならないといけない事[7]に注意しながら描いて欲しい．

[7]どのような条件か良く考えるように．



torus 上のグラフ

実験 1 各自描いたトーラス上のグラフを一つ選び浮き輪の形のトーラス上に再現せよ.

実験 2 各自上のトーラスで描いたグラフに対して、頂点数・辺数・面数を求めよ.

正方形の辺上では張り合わせるので 2 つに見えていても本当のトーラス上では 1 つになる場合があるので注意.
図 60 は辺を張り合わせる前と後の図です.

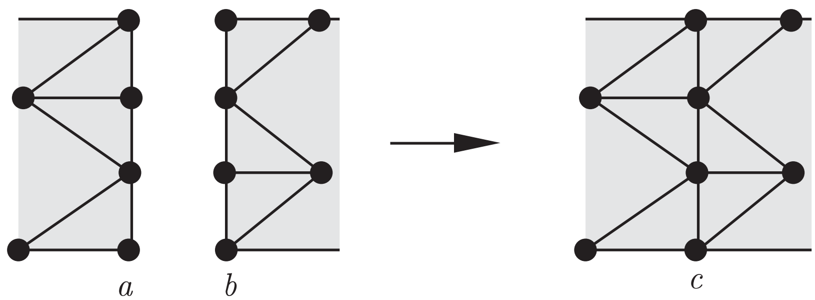


図 60: 辺の張り合わせ

辺 a 上には頂点は ______ 個あり
辺 b 上には頂点は ______ 個ある.
辺 a と 辺 b を張り合わせた (同一視した) 辺 c 上には頂点が ______ 個ある.

辺 a 上には辺は ______ 個あり
辺 b 上には辺は ______ 個ある.
辺 a と 辺 b を張り合わせた (同一視した) 辺 c 上には辺が ______ 個ある.

以上を踏まえて図 61 のトーラス上のグラフを考える.

図 61 において上の辺の $\{1,2,3\}$ と下の辺の $\{1,2,3\}$ は同一視されるのです. 右の辺の $\{1,4,5\}$ と左の辺の $\{1,4,5\}$ も同一視されます. 1 は 4 つが同一視されて 1 つの頂点になるのです.

よって頂点数は 7 です.

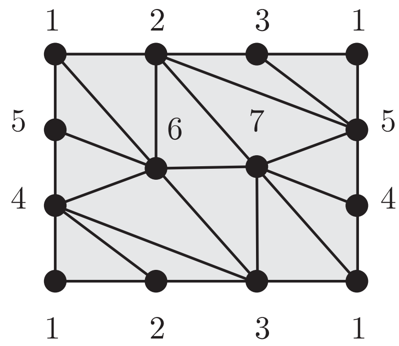


図 61: トーラス上のグラフ

では，辺の数はいくらでしょう．

みかけは 27 本ですが同一視されるのがあるので 6 本減って 21 本になります．

面は 14 あり，面の場合には同一視されるのがないので 14 のままです．

そこで、余談ですがトーラス上でのオイラーの関係式[8]を計算してみよう．どうなりましたか？

$$\begin{aligned} \text{頂点数} - \text{辺数} & +\text{面数} \\ &= 7 - 21 + 14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

証明はしませんが，トーラス上のオイラーの公式は

$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 0$$

となります．

7.2.2 トーラス上の七色問題

定理 7.2.1 (トーラス上の七色問題) トーラス上のグラフは 7 色で塗り分けることができる．(かつ, 6 色では塗り分けることのできないグラフがある.)

7 色あれば彩色可能である証明[9]はしませんが，トーラス上に 7 色，色が必要なグラフを考えてください．また、浮き輪が 2 人乗りとか 3 人乗りになった場合も何色必要か分っています．

[8]定義をしていないのですが、頂点数 − 辺数 + 面の数です．平面上のグラフだと 2 になります．

[9]平面上のグラフの 4 色問題より証明は簡単です．興味のある学生は図書館でグラフ理論の本を探してみてください．

まずは，適当にトーラス上にグラフを描き 7 色必要かどうか確かめましょう．

たぶん，なかなか見つからないだろう．

そこで，正方形の上で考えてみる事にします．各自正方形を描きこれをトーラスと思って 7 色必要なグラフを考えてください[10]．

レポート 17 トーラス上のグラフで 7 色必要なものを見つけ、なぜ 7 色必要なのかを述べなさい．

レポート 18 次のマジックは Mr. マリックがやっていたマジックです．超魔術と言われても当然タネがあるわけで、グラフ理論を知っていればタネがわかるような問題なのでレポートにします．

次のようなボードに山手線といくつかの駅名が書かれています．S がスタート地点で左回り・右回りをちゃんと決めておきます．

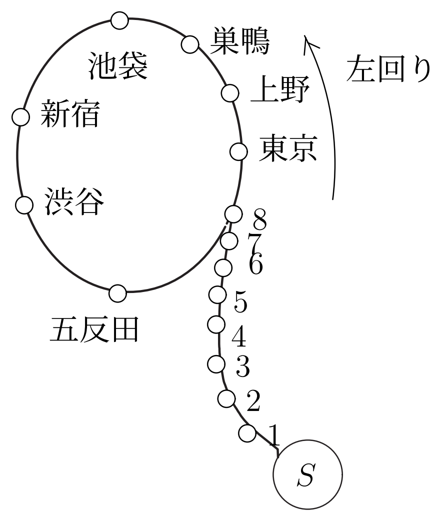


図 62: 山手線

手順 1 さあ、皆さん「7 以上の数を考えてください．あまり大きいとちょっと大変なので手ごろな数を考えましょう.」

手順 2 京浜東北線のある駅の S から順に数えていき、1 番目は 1 の駅、2 番目は 2 の駅と言うふうに進んでいきます．6 からは左回りに山手線を回っていきます．自分の考えた数のところが停車駅なのでそこで停まります．

手順 3 そこの駅が重要なのでしっかりと見つめましょう．

[10]図 61 のグラフの双対グラフが答えです．双対グラフの定義は各自調べてみてください．でも、そんな技術を使わなくても試行錯誤でグラフを作る事ができるのでレポートとしておきます．

手順 4 そこの駅から今度は思った数だけ山手線を逆の方向に戻っていきます．スタートした直線の線には入らないようにします.

手順 5. 自分のいる駅をしっかりと見てください．たぶん、巣鴨 (年寄りの駅だから) にいない筈ですね．たぶん、新宿にもいないはずです.

手順 6. う〜ん、東北出身者が多いので上野駅ではないでしょか？

実は 7 以上のどんな数を考えても必ず上野駅になります．この理由を考えてください.

上の路線図をグラフだと思うと簡単だと思うのですけどねぇ.