6　赤い三角形・青い三角形

6.1　補グラフ

完全グラフ K_n を考える．各辺に適当に赤か青で色を塗る．図 48 に K_7 を描いておいたので各自色をつけてみよう．(すべての辺を赤または青で塗ってもよい．)

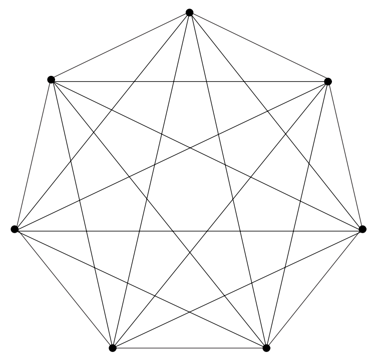


図 48: K_7

このとき，青のグラフ[5] G に対して赤の辺と K_7 のすべての頂点からなるグラフを G の**補グラフ**といい、$\bar{G}$ で表わす．このとき、青の辺とすべての頂点からなるグラフは赤のグラフの補グラフである．補グラフのときは頂点はすべての頂点をとることに注意しよう．図 49 に実際の補グラフを描いておいたのでよく見て欲しい．また、普通のグラフでは頂点はこのように綺麗に n 角形のように並んでいない事にも注意して欲しい．

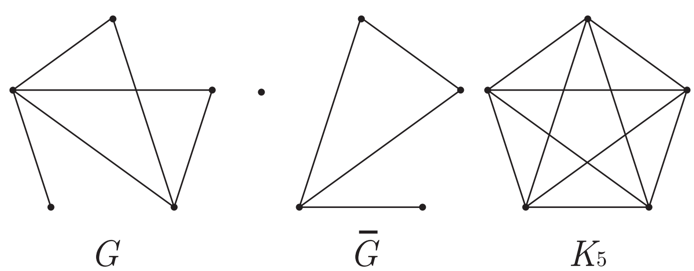


図 49: 補グラフ

また、完全グラフ K_n の補グラフは n 個の頂点だけになります．

[5]本当は青のグラフの頂点は K_n のすべての頂点としておかないといけないのですが

集合論で学んだ補集合の概念から来ています．たとえば，集合 $\{1,2,3,\cdots,10\}$ を考えよう．このとき，$\{1,3,5,7,9\}$ の補集合は $\{2,4,6,8,10\}$ になります．

このクラスで男の子全体の集合の補集合は女の子全体の集合ですね．

6.2 赤い三角形・青い三角形

完全グラフ K_n を考える．6.1 で行ったように各辺を赤と青で適当に塗ってみる．簡単のために K_6 で考えよう．図 50 にいくつか K_6 を描いておいたので各自自由に色塗りをしてみよう．

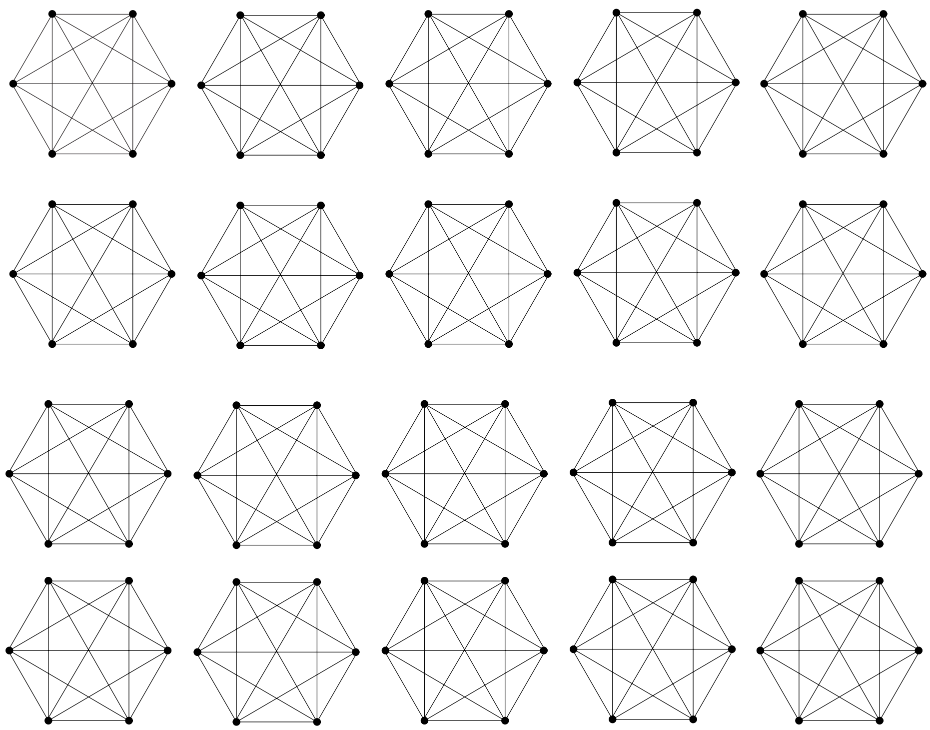


図 50: 辺を赤と青で塗る

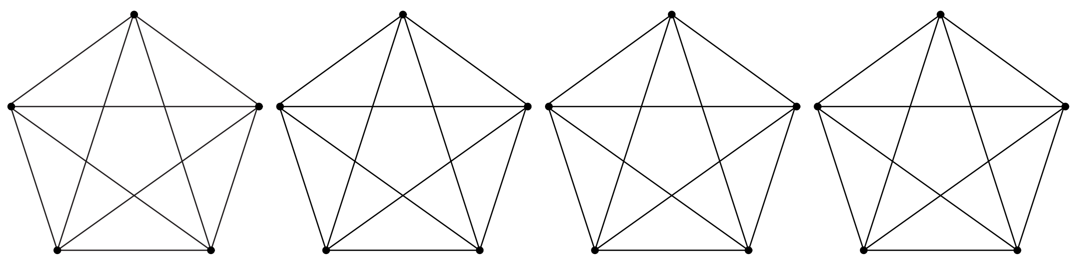
次に今色塗りをした K_6 の中で赤い三角形が含まれているものがあればその K_6 を赤で大きく「まる」しましょう．そして、青い三角形が含まれているものには青で大きく「まる」しましょう．青と赤の両方の丸がついたグラフもありますね．今色塗りをした K_6 の中でどちらの「まる」も付いていないのがあるでしょうか？今から、**まる**のつかないグラフについて考察します．

K_6 の辺の数は 15 本あるので，色の塗り方は $2^{15}=32,768$ 通りあります．

このグラフ全部を考えると一つぐらい「まる」の付いていないグラフができるでしょうか?どちらの「まる」もついていないグラフの色の塗り方を考えてみましょう.

なかなか大変だと思います．この様な場合は何回も授業で話しているように少し簡単にして考えてみます.

問 K_5 に色をつけて赤い三角形も青い三角形もできないようにしなさい．(失敗しても大丈夫なように多めに描いておきました．)



実は K_6 ではどのような彩色をしても、赤い三角形か青い三角形の少なくともどちらかができます．念のために言っておくと青い三角形と赤い三角形の両方ができるというわけではありません.

これを使ったものとして昔からパーティー問題と言われているものがあります.

[**パーティー問題**]
6 人を集めると必ず互いに知っている 3 人組みか互いに見ず知らずの 3 人組みが必ずいるということです．このクラスで実験してみよう．これは 6 人を頂点としてみて 2 人が知り合いだったら青で線を引き他人だったら赤で塗るとこの問題に変わります.

この事実を証明してみよう.

> 原始的な証明の仕方はすべての塗り方 $2^{15} = 32,768$ 通りを考えてすべてにどちらかの「まる」が付いていることを確かめることです．ちょっとしんどいけど.

まず，1 つの頂点に注目する．すると，辺は 5 本出ているのがわかるだろう．5 本を赤か青で塗ったのでどちらかの色は 3 本以上である．今，それを赤としよう．これらの辺のもう一つの頂点を考える．3 つ頂点があるので、新しい三角形ができる．図 51 参照．これらの辺がすべて同じ色だとそれが求める三角形である．図 51 まんなか．もし，そうでなければ赤と青が混じっている．そこで，この赤の辺とは

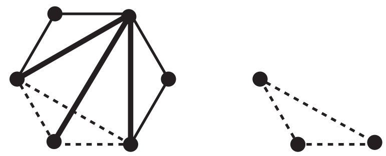


図 51: 赤い三角形

じめの赤の辺で赤い三角形が得られる．図 51 右．これはラムゼー (Ramsey[6]) の定理と呼ばれているものの一部です.

このようにこの証明ではあまり数式が出てきません．数学ができると思っている学生でも、このような言葉で論理を進めるのが苦手な学生もいるし、文系の学生なんだけどこのような言葉で組み立てていくのが好きな学生もいます．計算ばかりするのが数学ではありません．高校の先生の中にはこういう事を理解していなくて計算ばかり学生にさせたがるのがいたりしますが.

本当は高校までの時期に一度出会ってみるほうが良い数学なので教育学部の学生はがんばって先生になってこの様な数学を広めてください.

6.3 K_3 に色を塗って

K_3 の各頂点を赤と青で塗る事を考えよう.

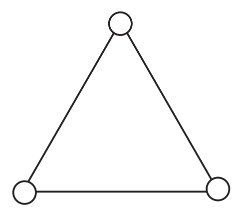


図 52: K_3

何通りの塗り方があるでしょうか？

2^3 通りある事がわかりますね．$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ の各々の $\times 2$ は図 53 での枝別れの本数に対応している事がわかります.

また，掛けた回数は頂点の個数と対応している事が分かります.

[6]Ramsey について調べていると NTT の研究所のホームページに行きついた．グラフ理論はネットワーク・電気回路等の数学的モデルとして利用されている他、ネットワークデザイン、ビジュアルインタフェースなど幅広い分野へ応用されているので当然といえば当然なんだけど.

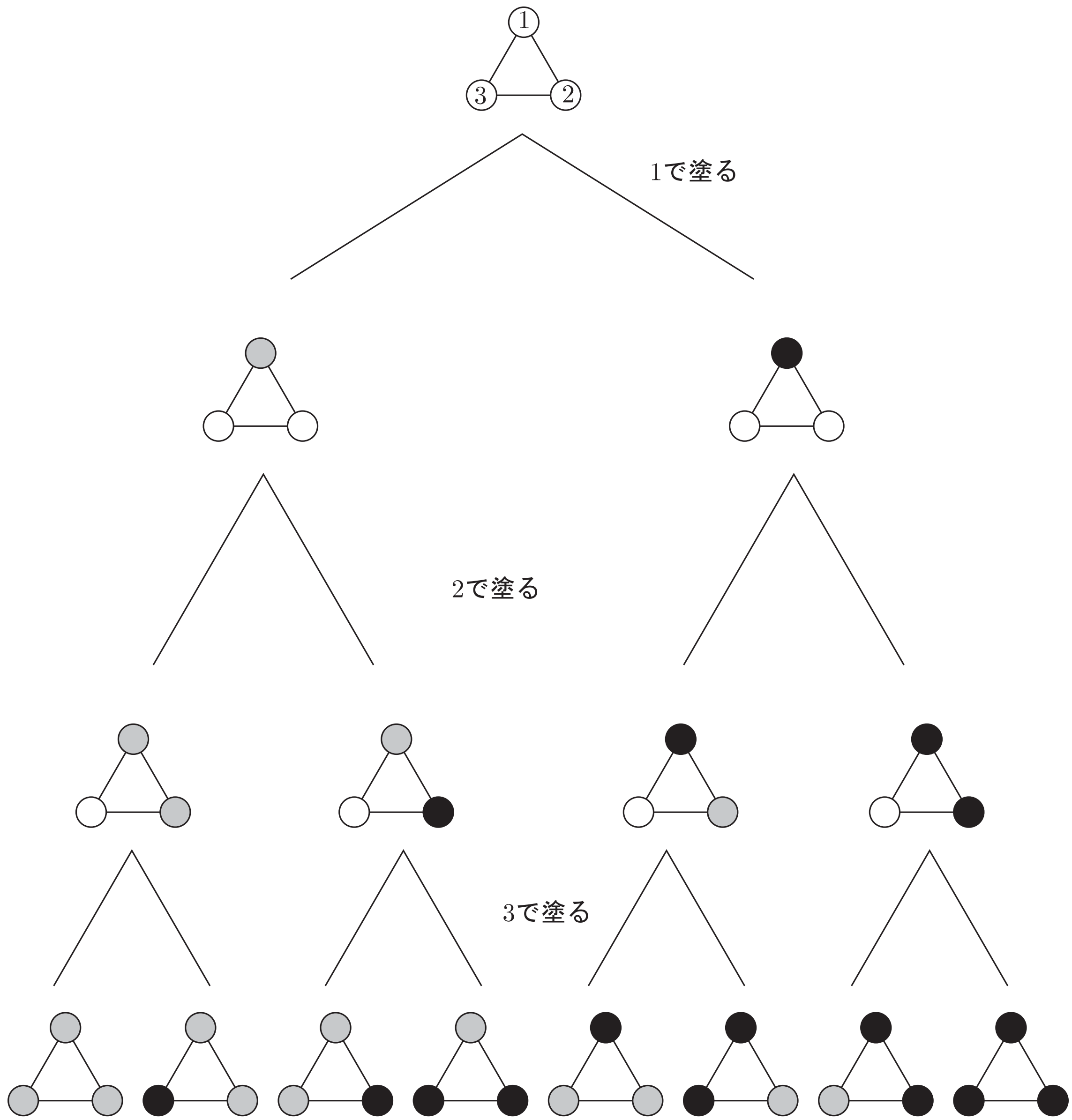


図 53: K_3

レポート 13 K_3 は三角形の重心での $2\pi/3$ 回転でうつりあうので回転でうつりあう同じ彩色の三角形は同じだと考えると，色塗りは何通りになるでしょうか？また、同じ塗り方になる三角形の個数は各々いくらになりますか？

レポート 14 $K_4, K_5, K_6, \cdots$ について同様に頂点を 2 色で塗ってください．回転で移りあうものを同じだと考えた時に個数はどのようになるでしょうか？

各頂点を 3 色（赤・青・黄）で塗った．何通りの塗り方があるでしょうか．$3^3 = 27$ 通りの塗り方があるのですね．

レポート 15 では，K_3 を回転でうつりあうものは同じだとした時，塗り方は何通りになるでしょうか？

　また，ひっくり返してもよいと考えた時はどうなるでしょうか？

6.4　地図に色を塗って

図 54 に東北 6 県の地図を用意しました．今週は頂点と辺の彩色をしたので、来週は面の彩色について講義します．準備として次のレポートをしましょう．

レポート 16 少なくとも一つの県を選び自由に市町村に色を塗ってください．あと、何色使ったかを書いてください．(レポートには下の地図の選んだ県を拡大コピーしたものを使用してください．)

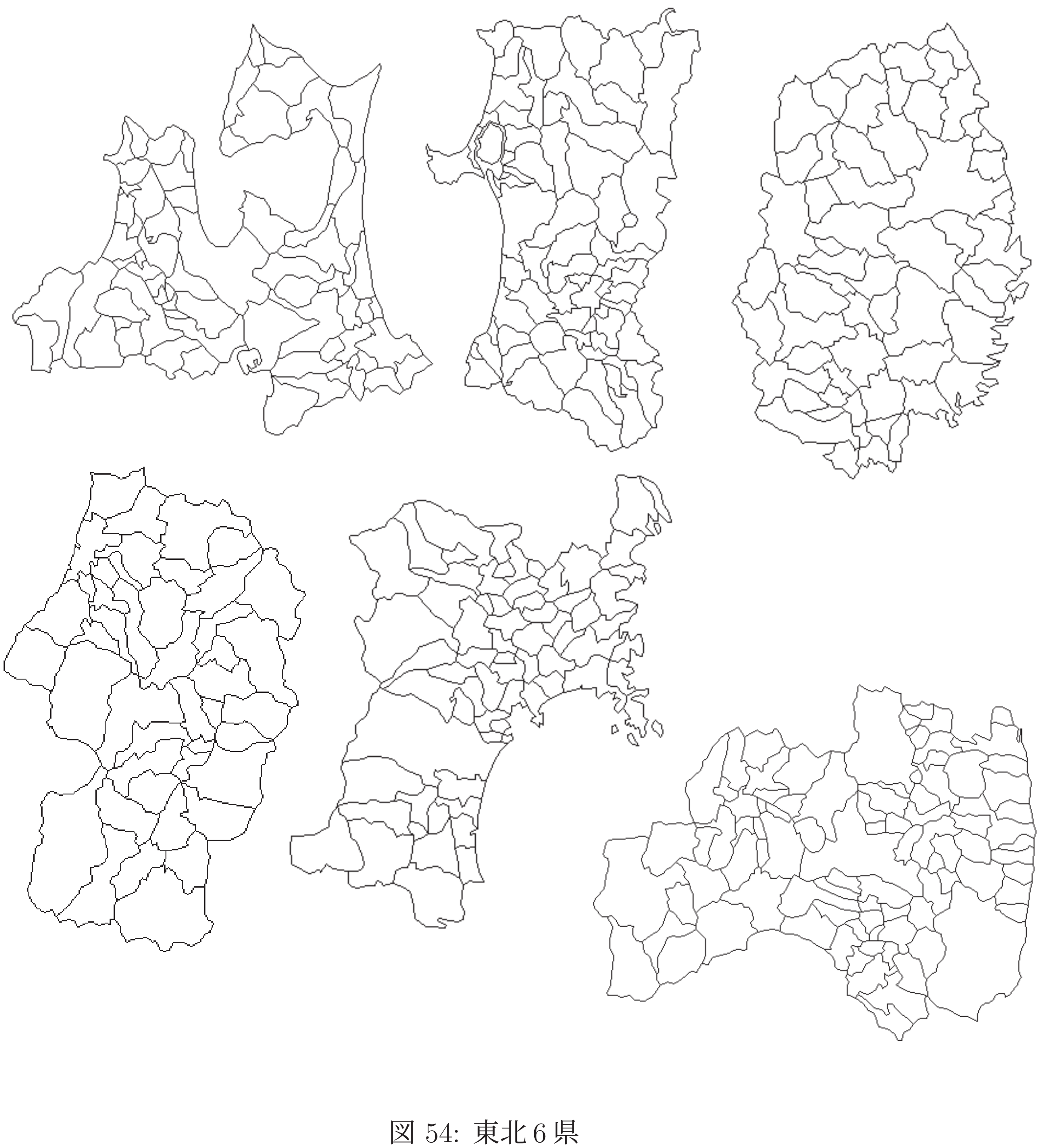


図 54: 東北 6 県