目 次

1　はじめに (2004 年度前期)

この授業はグラフ理論の初歩について解説する．グラフ理論は双曲線・直線とかのグラフを扱うわけでもなくまた、円グラフ・棒グラフとか折れ線グラフとかをあつかう理論でもない．グラフ理論では、グラフとは頂点と辺からなる図形の事である．たとえば、あみだくじで縦と横の線の交わりを頂点としたようなものである．そのようなグラフについて研究するのがグラフ理論である．グラフ理論が数学にどのように使われるかを見てみよう．

また、この授業では，グラフ理論を通して，数学的な考察を身につけることを目標とする．したがって，単なる知識を覚えると言うことにはつながらない．

ケーニヒスベルクの 7 つの橋の問題を聞いたことがあると思う．
図 1 の地図は東プロシアの古都ケーニヒスベルグ，旧ソ連のカリーニングラードとして知られる町である．

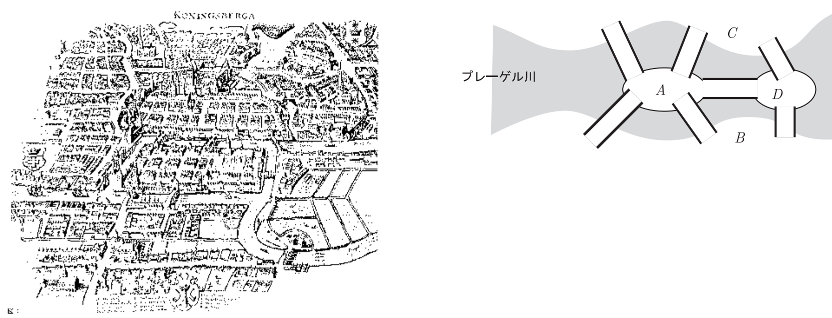


図 1: ケーニヒスベルクの橋

そこを流れるプレーゲル川は町を中央のクナイホフと呼ばれる島を含む 4 つの地区に分割している．そこに 7 つの橋が掛けられている．問題はこの七つの橋を，ちょうど 1 度ずつ渡るような渡り方が在るかというものである．各自、図 1 で試してもらいたい．

多くの市民が実際に橋を渡り問題の渡り方を試したが誰一人として，成功したものはいなかったと言う．いつしか，この橋を一度ずつ渡る事は不可能だと思われていた．しかし，スイス生まれの数学者オイラー (L. Euler,1707–1783) が数学的に論証するまで誰一人として証明できなかった．
オイラーは 1736 年 の論文の中でこの問題では島の大きさとか橋の長さ・幅は関係ない事を指摘した．ここに，距離・面積・体積・合同などを中心とする幾何学とは異なる幾何学が生まれたのであった．
そこで、問題を簡略化するために島を点に橋を辺とする図形を考える．
それが図 2 である．すると、この問題はこのグラフが一筆書きできるかどうかという問題になる．

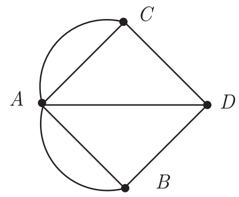


図 2: ケーニヒスベルクの橋

一筆書き 線描きの図形を、同じ線を二度以上通らず紙面から筆を離さないで書くこと．また、その書き方（広辞苑）

> 数学ではこのように要らない情報をいかになくすか、また必要な情報をどのように表すかも重要な点である．

数学の問題では答えを自分で考えるのも面白いので各自でちょっと考えてみよう．と言ってもちょっと戸惑うかもしれないので、図 3 にいくつかグラフを出すので一筆書きできるかどうか考えてみて欲しい．

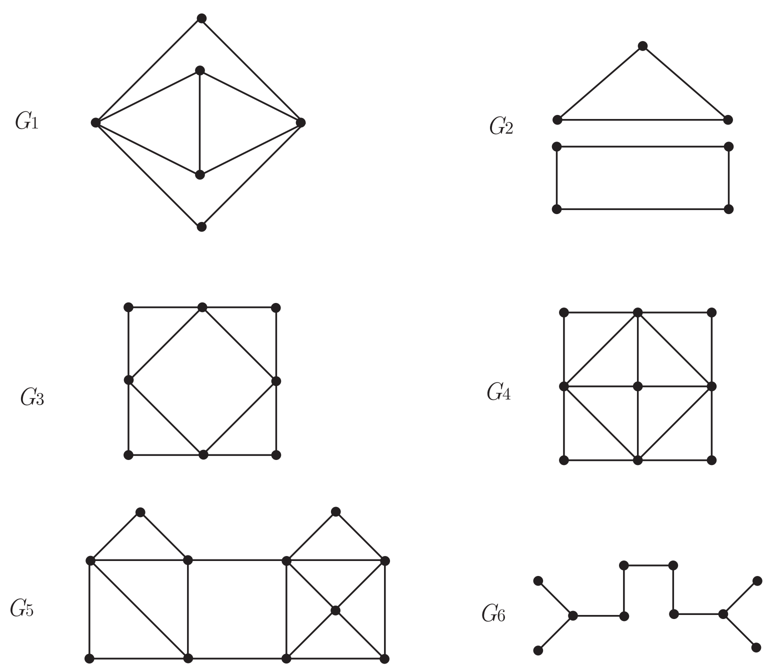


図 3: 一筆書き

一筆書きできるグラフはわりかし簡単に見つかるだろうけど、できそうに無いグラフはなぜできないのだろうか？

答えを聞くとすぐにわかるけど、自分で考えて答えをだすほうが良いので（も

し、オイラーより早く生まれていればオイラーの代わりに君の名前が歴史に残っていたかもしれない)、もう少しヒントを出そう.

1. 各グラフに対し各頂点に集まっている辺の数を書き込んでみよう
2. 偶数ならば青、奇数ならば赤で頂点を塗り分けよう.

次に一筆書きできたグラフを見てみよう. 赤と青はどうなっていますか?

解答は授業でする事にします.

また、図 4 の一筆書きを 5 分以内にできるようにそのうち講義をしたいと思います.

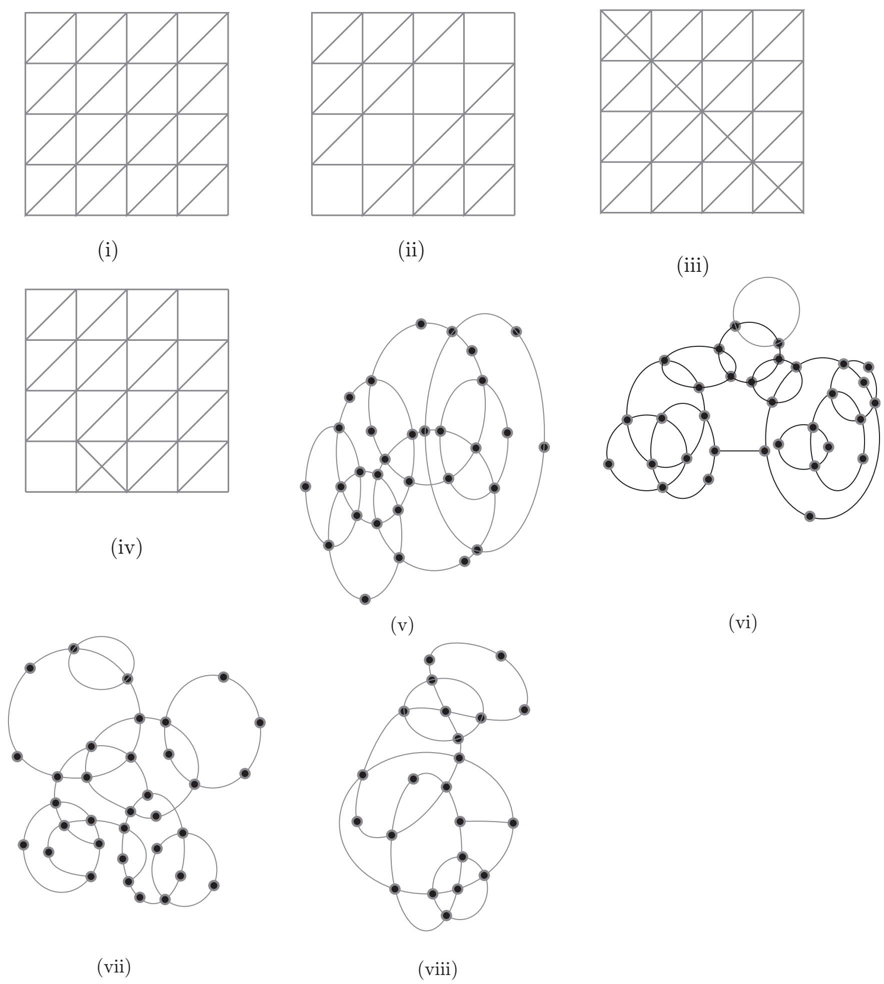


図 4: 一筆書きできるかな

宿題 1. 大学の建物などで、階段にある電灯のスイッチを考えてみよう. どの段の

スイッチでもすべての電灯がついたり消えたりします．このときの回路はどうなっているか考えてください．こうゆうのもグラフ理論の１つです．

2. また電車を考えましょう．ドアの外側にちいさな電灯があります．これはドアがひらくと電気がつき，すべてのドアが閉まると電気が消えます．これの回路も考えてください．

これらの答えが気になる人は、今日一日考えてみましょう．それでも気になる人はこの講義を引き続き聴いてください．

この問題の応用としては、郵便局員になって各々の家をまわるとき、どの様にまわれば一番効率が良いかとか博物館の展示室の設計でどのような建物を建てればお客さんが見やすいかとかがありますね．

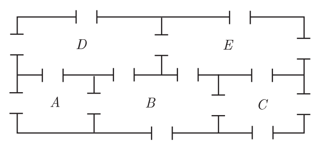


図 5: ドアのある家

図 5 ですべてのドアを一回だけ通ってすべての部屋をまわることができますか？

殺人事件

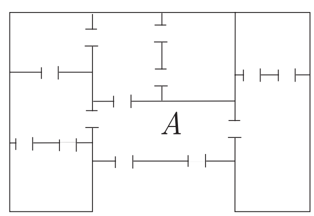


図 6: 殺人事件

豪邸 図 6 で殺人事件がありました．殺人は **A** の部屋で行われました．執事が庭師が **A** の部屋に入りすぐにおなじドアから出てきたと言いました．庭師は「そんなことはねぇ．家に **A** の部屋から入りすべてのドアを一回だけ通ってまた外に出たんだ．執事が見た男であるはずがない」と言いました．誰が嘘を言っているのでしょう．

追記 この授業では、はさみ、のり、色鉛筆、電卓、定規、コンパスなどをもって来た方が良い．

2　グラフの定義と応用

2.1　グラフの定義

グラフ　グラフとは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形である．また頂点の集合 V を $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 辺の集合 E を $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ と表したりする．また、辺 e の両端の頂点が v_1 と v_2 の時、$e = v_1v_2$ または (v_1v_2) などであらわす．頂点集合 V と 辺集合 E を持つグラフを $G = (V, E)$ と書く．

図 7 はいくつかのグラフの例である．

練習 ノートにいくつかグラフを描いてみよう．また、図 7 の様に特徴を持ったグラフをいくつか作れ．

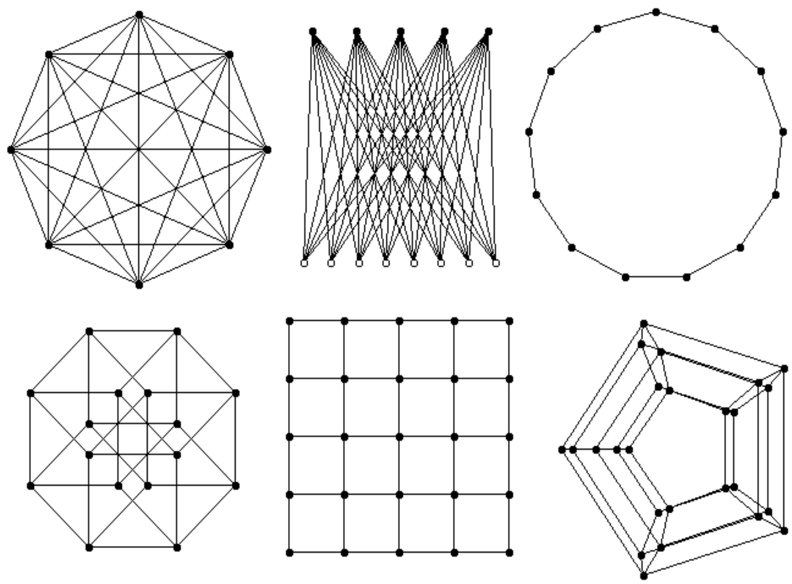
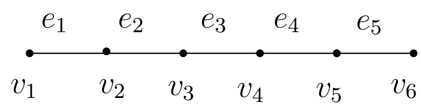


図 7: グラフ・グラフ・グラフ

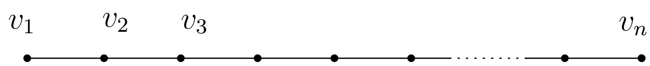
2.2　グラフと電線

グラフは色々なものに応用が利きます．たとえば、電柱と電線を考えてみよう．電柱を頂点、電線を辺とすればグラフができる．(この場合、電柱を辺、電線を頂点とするような人はあまり居ないでしょう．でも、こう考えると便利な時もあります．)

下のように 6 本の電柱が直線上に並んで立っているときを考えよう．電線は何本ありますか？



では、つぎのように n 本の電柱が立っているとき電線は何本あるでしょうか？



わからない時は、n が 1, 2, $\cdots$, n というふうに考えていけばわかりますね．

電柱	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線							

では、ちょっと複雑になって図 8 の場合にはどうなりますか？電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．

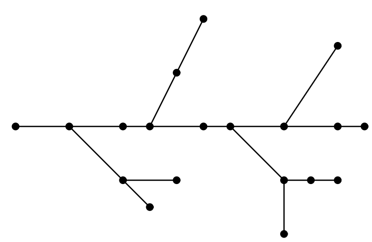


図 8: ちょっと複雑な電線

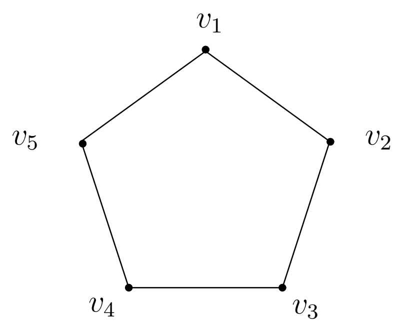
自分で上のようないくつか電線と電柱の例を書いて電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．何か関係が見つかりませんか？

電柱	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線							

問 電線の数と電柱の数の関係を求めて、なぜそうなるかを説明しなさい．また、その説明を友達などに見せてその説明を理解してくれるか確めてみなさい．理解できなければ、もっと良い説明になるようにしなさい．

2.3　輪のある電線

では、次の図のように輪のような電柱と電線があった場合はどうなるでしょうか?



上のように 5 本の電柱があった場合には電線は何本ありますか？また、電柱が n 本あった場合に電線は何本あるでしょうか？次の空欄を埋めてください.

電柱	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線						

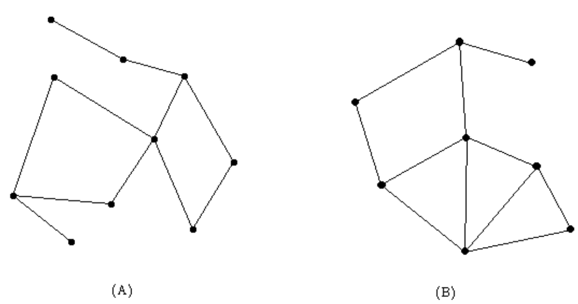


図 9: たくさんの電線

さらに、図 9 のように電柱と電線がありました．電柱と電線の関係はどうなるでしょうか？(A) と (B) のそれぞれの場合に電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい.

気がついた人がいるかもしれませんが、電柱と電線の関係は他に何か条件がないと求めることはできません.

レポート 1 どのような条件か考えましょう.

2.4　向きの付いたグラフ

5 つのチーム a, b, c, d, e でリーグ戦（総当り戦）をした．その結果つぎの表のようになった.

	a	b	c	d	e
a		◯	◯	×	◯
b	×		◯	◯	◯
c	×	×		◯	◯
d	◯	×	×		◯
e	×	×	×	×	

これをグラフを使って表してみよう．矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね．

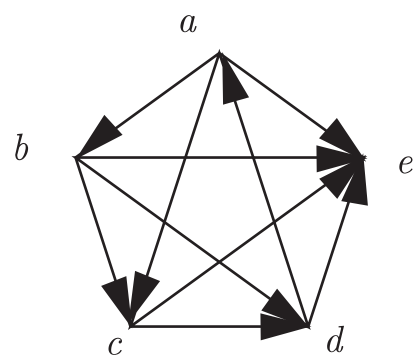


図 10: 向きの付いたグラフ

この様に辺に向きをつけて考えることもあります．

問 このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を考えよ．

2.5　貨車の入れ換え

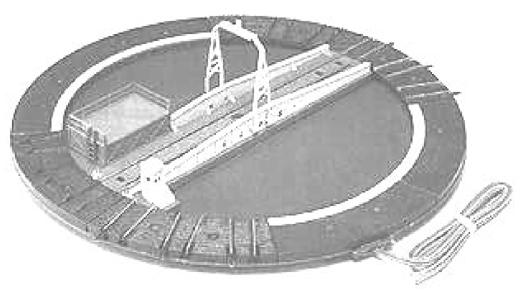


図 11: ターン・テーブル

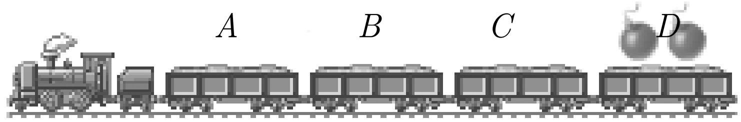


図 12: 機関車と貨車

貨車を入れ換えるのにターン・テーブル 図 11 と言うものがある．テーブルには貨車が 2 台のる．テーブルを 180 度回転させるとこの 2 台の貨車の順番を入れ換える事ができる．いま、貨車が A, B, C, D (図 12) あったとする．ここで、D には火薬をつんでいるので気動車のすぐあとには置けないとしよう．$ADBC$ の順番に並んでいる列車を $CBDA$ にする事はできるか？また、どのような手順が**一番効率が良いか？**

> 社会生活においては、効率も問題となる．10 回でできるものを 100 回もしないといけないような答えだと学校では正解でも、社会では不正解となってしまう．

このような問題も，グラフ理論で解けるわけですね．

頂点の集合を貸車の並び方で考える．$\{A, B, C, D\}$ の並べ方で D は先頭に置くことができないので

$V = \{(ABCD), (ABDC), (ACBD), (ACDB), (ADBC), (ADCB),$
$(BACD), (BADC), (BCAD), (BCDA), (BDAC), (BDCA),$
$(CABD), (CADB), (CBAD), (CBDA), (CDAB), (CDBA)\}$

となる[1].

一回ターンテーブルを使うことで移りあうことのできる頂点を辺で結ぶ．たとえば $ABCD$ に対して AB をターンテーブルにのせて回転させると $BACD$ になる．このとき $ABCD$ と $BACD$ を辺で結ぶ

このようにグラフを描いていくと図 13 のようになる．

問 1 図 14 のような線路上に客車 A と B がある．X の場所には客車を入れて左右どちらにも出せるが機関車は大きいので入れることができない．また、客車

[1] 規則正しく A, B, C, D が並んでいる事に注意

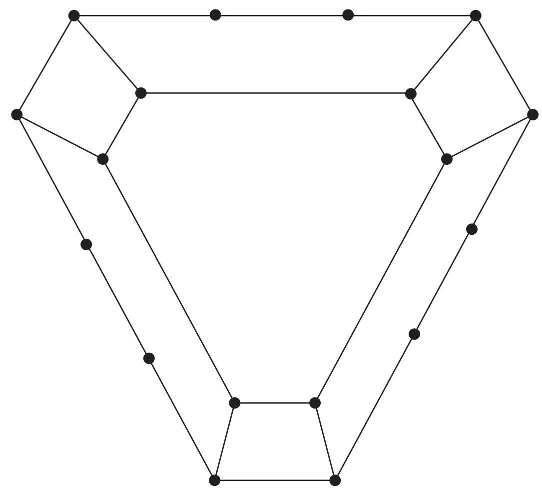


図 13: 貨車の入れ換えのグラフ

を 2 台以上入れることが出来ない．また、機関車は客車を前後に押したり引いたりできる．このとき、客車 A と B を入れ換えて機関車をもとにもどすのにはどうすれば良いか．グラフを使って考えなさい．

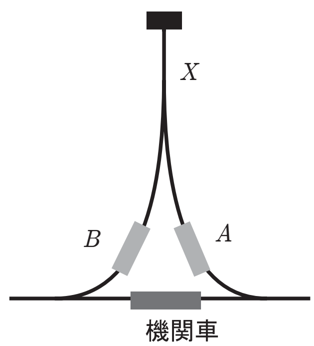


図 14: 貨車の入れ換え 2

この場合グラフの頂点には何を対応させればよいか良く考えましょう．
あまりにも場合わけを細かくしすぎると大変です．

なかには, この線路の状態をグラフと思う学生がたまにはいます. しかし、これはグラフの良い使い方ではありません．では, どのようなものをグラフの頂点とするのがよいでしょうか

その前に次の問に答えて下さい．図 15 (i) と図 15 (ii) は同じですか, 違うと思いますか.

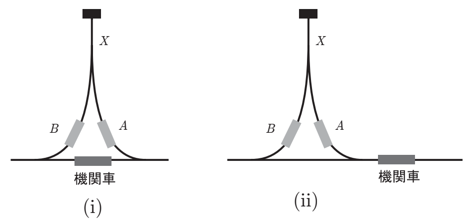


図 15: 貨車の入れ換え 3

この 2 つの状態を違うとしてしまうとあとあと場合わけが大変です. 同じだと思うことにしましょう. では図 16 の 2 つは同じですか.

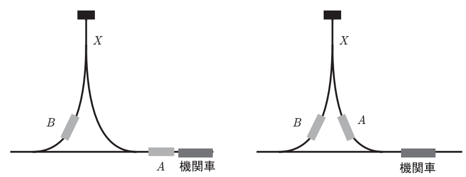


図 16: 貨車の入れ換え 5

この場合は少し難しいかもしれませんが同じだと思う方がらくです. なぜなら、この 2 つはすぐにたがいにうつすことができますね. すると図 17 は同じだとみなしたほうがいいことがわかります.

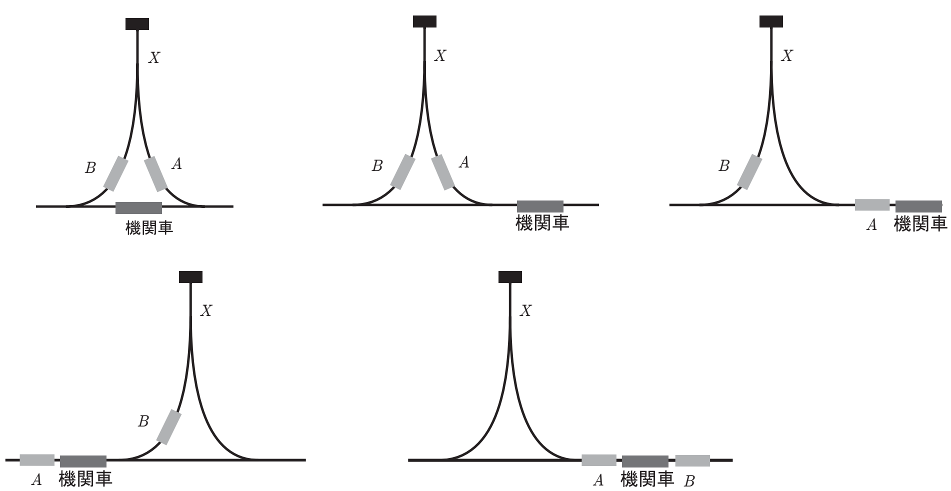


図 17: 貨車の入れ換え 6

すると最後の状態をグラフの頂点にすると機関車と A, B の並び方を考えればいい事がわかります. この場合は (A 機関車 B) ですね. このときの頂点の集合は $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 通りあります.

$V = \{(AB\,\text{機関車})(A\,\text{機関車}\,B)(BA\,\text{機関車})(B\,\text{機関車}\,A)(\text{機関車}\,AB)(\text{機関車}\,BA)\}$

次に辺は何が対応しているのでしょうか？ターンテーブルの時を思い出してみましょう．では, この頂点の状態をかえるのはどの様な操作でしょうか．

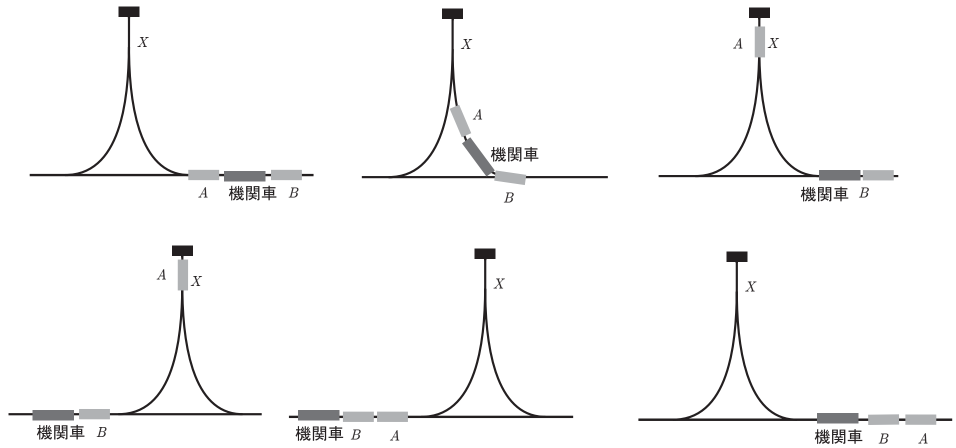


図 18: 貨車の入れ換え 7

図 18 の操作が考えられています．この場合頂点 (A 機関車 B) と (機関車 AB) とを辺で結びます．

レポート 2 以上をふまえて各自グラフをつくってみましょう．図 20 に貨車の絵を入れておきました．必要ならコピーして使いなさい．

レポート 3 図 19 のような線路上に客車 A と B がある．トンネルの場所には客車を入れて左右どちらにも出せるが機関車は大きいので入れることができない．客車 A と B を入れ換えて機関車をもとにもどすのにはどうすれば良いか．グラフを使って考えなさい．

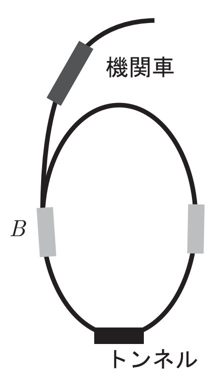


図 19: 貨車の入れ換え (トンネル編)

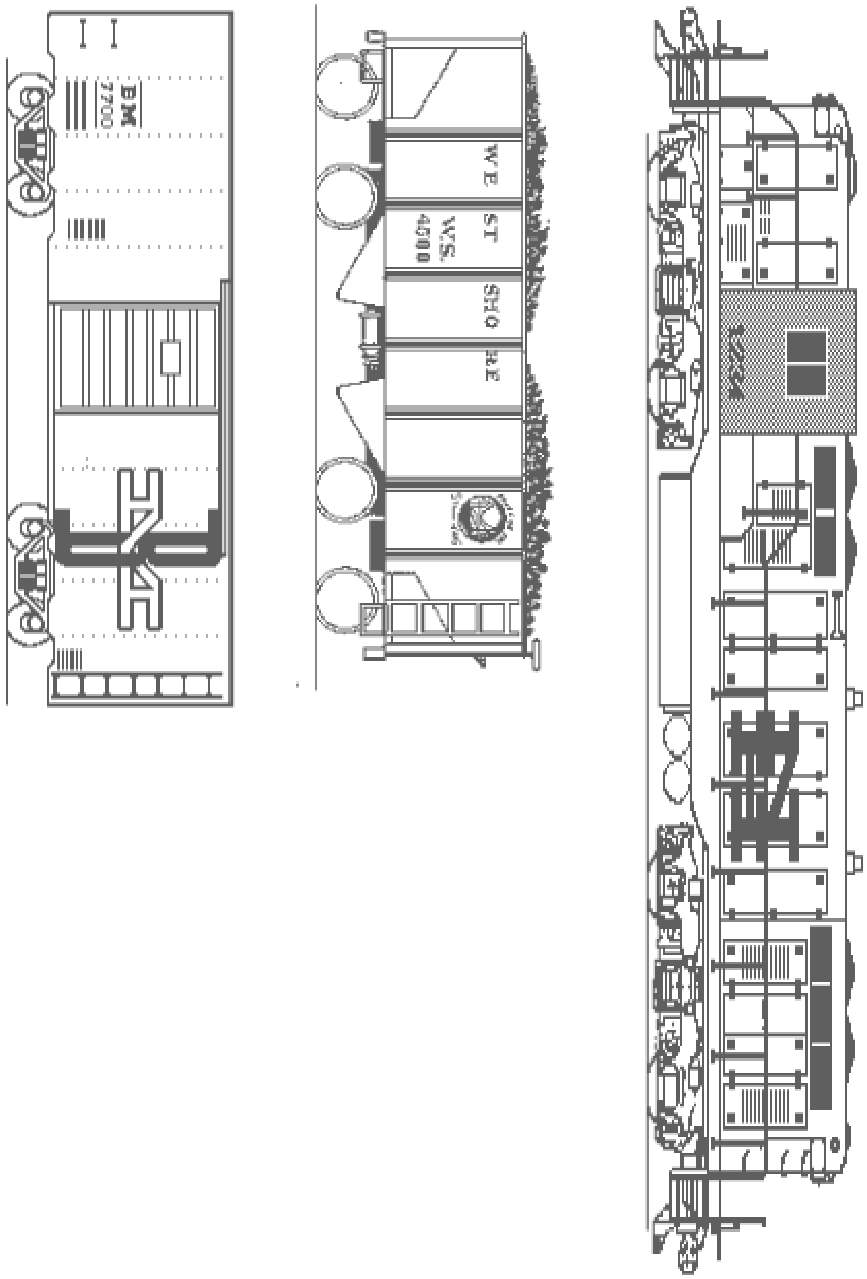


図 20: 貨車の図

レポート 4 (入試問題のグラフ理論) 次の入試問題は 1998 年の東京大学の後期の数学の入試問題から取ってきたものである．グラフ理論の問題なので興味のある

第 3 問

グラフ $G=(V,\ W)$ とは有限個の頂点の集合 $V=\{P_1,\ \ldots,\ P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{E_1,\ \ldots,\ E_m\}$ からなる図形とする。各辺 E_j は丁度2つの頂点 P_{i_1}，P_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ を持つ。頂点以外での辺同士の交わりは考えない。さらに，各頂点には白か黒の色がついていると仮定する。

例えば，図 1 のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個あり，辺 E_i $(i=1,\ldots,4)$ の頂点は P_i と P_5 である。P_1，P_2 は白頂点であり，P_3，P_4，P_5 は黒頂点である。

出発点とするグラフ G_1（図 2）は，$n=1$，$m=0$ であり，ただ1つの頂点は白頂点であるとする。

与えられたグラフ $G=(V,\ W)$ から新しいグラフ $G'=(V',\ W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する。

図 1

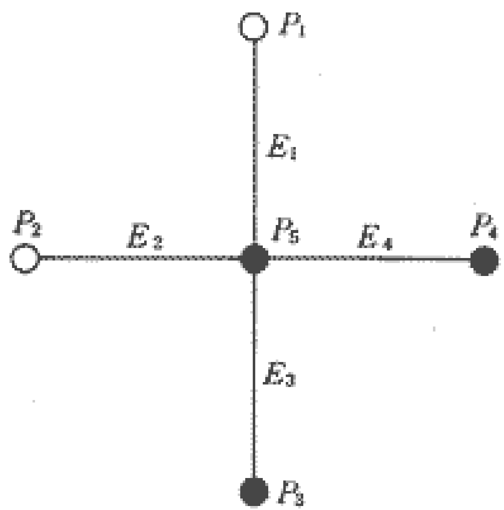
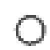
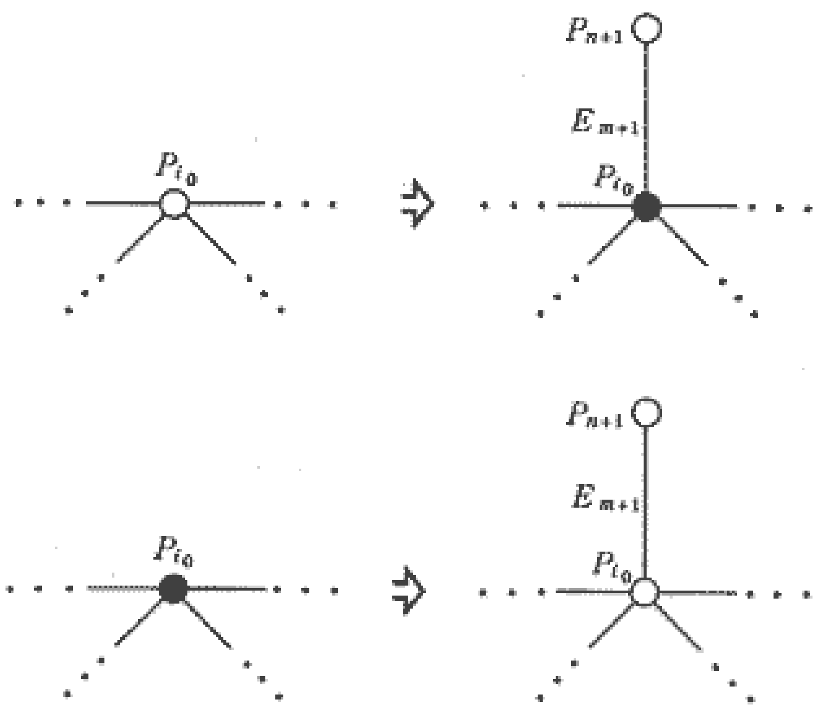


図 2



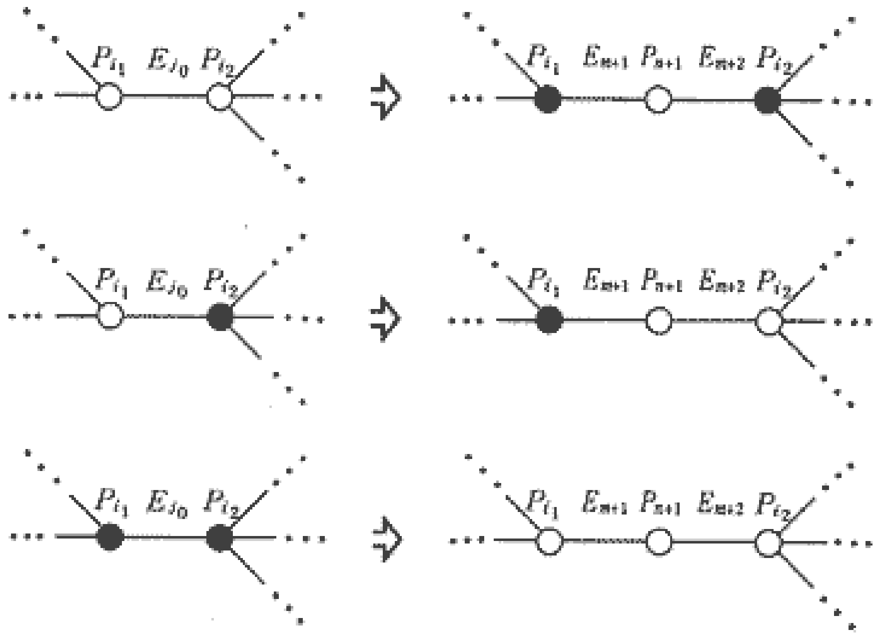
（操作１） この操作は G の頂点 P_{i_0} を１つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし，G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図３）。

図３



（操作２） この操作は G の辺 E_{j_0} を１つ選ぶと定まる。 V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W から E_{j_0} を取り去り，新しい辺 E_{m+1}，E_{m+2} を加えたものとする。E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき，E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり，E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。P_{i_2} についても同様に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図４）。

図 4



出発点のグラフ G_1 にこれら２種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする。次の問に答えよ。

(1) 図５の３つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ。ここで，すべての頂点の色は白である。

(2) n を自然数とするとき，n 個の頂点を持つ図６のような棒状のグラフが可能グラフになるために n のみたすべき必要十分条件を求めよ。ここで，すべての頂点の色は白である。

図 5

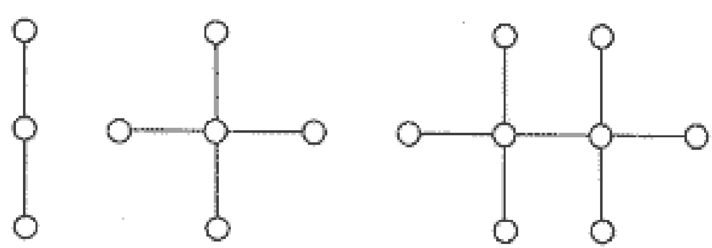


図 6