極限の計算

■ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ において, $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ が決まる場合はこの値が極限値である.

■ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ の場合

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ を求めよ.

Step 1. $x = 2$ のとき分母 $x - 2 = 0$ より, 分子 $x^2 - 4$ の中にも $x - 2$ が隠れている.

分子を因数分解すると $x^2 - 4 = \boxed{}$

Step 2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{}$

Step 3. $x - 2$ で約分して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x = 2$ を代入して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \boxed{}$

計算用紙

$\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ を求めよ.

Step 1. $x = 2$ のとき分母 $x - 2 = 0$ より, 分子 $x^2 - 4$ の中にも $x - 2$ が隠れている.

分子を因数分解すると $x^2 - 4 = \boxed{(x-2)(x+2)}$

Step 2. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}}$

Step 3. $x - 2$ で約分して, $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{(x+2)} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x = 2$ を代入して, $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \boxed{4}$

計算用紙

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ を求めよ.

Step 1. $x = 2$ のとき分母 $x - 2 = 0$ より, 分子 $x^3 - 8$ の中にも $x - 2$ が隠れている.

分子を因数分解する.

$x^3 - a^3 \ = \boxed{}$ であるから,

$x^3 - 8 = \boxed{}$

Step 2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{}$

Step 3. $x - 2$ で約分して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x = 2$ を代入して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \boxed{}$

計算用紙

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $x-2=0$ より, 分子 x^3-8 の中にも $x-2$ が隠れている.

分子を因数分解する.

$x^3-a^3 = \boxed{(x-a)(x^2+ax+a^2)}$ であるから,

$x^3-8=\boxed{(x-2)(x^2+2x+4)}$

Step 2. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to2}\boxed{\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}}$

Step 3. $x-2$ で約分して, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to2}\boxed{(x^2+2x+4)}\cdots(1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2} = \boxed{12}$

計算用紙

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $x-2=0$ より, 分子 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分子 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ より

$$\sqrt{x+7}-3=\sqrt{x+7}-3\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=\boxed{}$$

Step 2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\times\boxed{}\right)$

Step 3. $x-2$ で約分して, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\boxed{}\cdots(1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\boxed{}$

計算用紙

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $x-2=0$ より, 分子 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分子 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ より

$$\sqrt{x+7}-3=\sqrt{x+7}-3\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=\boxed{\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}}$$

Step 2. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\times\boxed{\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}}\right)$$

Step 3. $x-2$ で約分して, $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\boxed{\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}}\cdots(1)$$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

計算用紙

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $\sqrt{x+7}-3=0$ より, 分母 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分母 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$$\sqrt{x+7}-3=\sqrt{x+7}-3\times\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Step 2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Step 3. $x-2$ で約分して, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}\cdots(1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\boxed{\qquad\qquad}$

計算用紙

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $\sqrt{x+7}-3=0$ より, 分母 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分母 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$$\sqrt{x+7}-3 = \sqrt{x+7}-3 \times \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} = \boxed{\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}}$$

Step 2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \to 2} \boxed{(x-2) \times \dfrac{\sqrt{x+7}+3}{x-2}}$

Step 3. $x-2$ で約分して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \boxed{(\sqrt{x+7}+3)} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \boxed{6}$

計算用紙

☞ 極限を求める問題で無理式があればまずは有理化をしてみる

$\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3}$ を求めよ.

Step 1. $t=1$ のとき分子・分母ともに 0 になるので, 分子・分母に $t-1$ が隠れている.

分子・分母を因数分解する.

$t^2+4t-5 = \boxed{}$　　$2t^2+t-3 = \boxed{}$

Step 2. $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \lim_{t \to 1} \boxed{}$

Step 3. 約分して $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \lim_{t \to 1} \boxed{} \cdots (1)$

(1) に $t=1$ を代入して, $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \boxed{}$

計算用紙

$\lim_{t \to 1} \dfrac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3}$ を求めよ.

Step 1. $t=1$ のとき分子・分母ともに 0 になるので, 分子・分母に $t-1$ が隠れている.

分子・分母を因数分解する.

$t^2+4t-5 = \boxed{(t-1)(t+5)}$ $\quad 2t^2+t-3 = \boxed{(t-1)(2t+3)}$

Step 2. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \lim_{t \to 1} \boxed{\dfrac{(t-1)(t+5)}{(t-1)(2t+3)}}$

Step 3. 約分して $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \lim_{t \to 1} \boxed{\dfrac{t+5}{2t+3}} \cdots (1)$

(1) に $t=1$ を代入して, $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

計算用紙

次の極限を求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2+x-12}$　(3) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}$

解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2+x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{x+4}=\frac{3}{7}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}=\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}\times\frac{(t+\sqrt{3t-2})\sqrt{t-2}}{(t+\sqrt{3t-2})\sqrt{t-2}}\right)=$
$\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{(t^2-(3t-2))\sqrt{t-2}}{(t-2)(t+\sqrt{3t-2})}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t-1)\sqrt{t-2}}{(t-2)(t+\sqrt{3t-2})}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-1)\sqrt{t-2}}{t+\sqrt{3t-2}}=0$

☞ 分子・分母に 0 となる因子を見つければよい. (1) は x, (2) は $x-3$, (3) は $t-2$ である. 分子・分母ともに隠れているので注意すること.

☞ 無理式はまずは有理化

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^5}\right)$ を求めよ. [無限大の場合]

Step 1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ は証明なしに使ってよい.

Step 2. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^5}\right)=1$

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+x+1}$ を求めよ.

Step 1. 分子・分母の x で指数が一番大きい物に注目する. 今は 2 より, 分子・分母を x^2 で割る.

Step 2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+2x)\times\frac{1}{x^2}}{(x^2+x+1)\times\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$

計算用紙

$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})$ を求めよ.

Step 1. 無理式で $(\infty-\infty)$ の場合は有理化を行う.

$$x-\sqrt{x^2+2x}=(x-\sqrt{x^2+2x})\times\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$=\boxed{}$$

Step 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})=\lim_{x\to+\infty}\boxed{}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\boxed{}=\boxed{}$$

計算用紙

$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})$ を求めよ.

Step 1. 無理式で $(\infty-\infty)$ の場合は有理化を行う.

$$x-\sqrt{x^2+2x}=(x-\sqrt{x^2+2x})\times\frac{\boxed{x+\sqrt{x^2+2x}}}{\boxed{x+\sqrt{x^2+2x}}}$$

$$=\boxed{\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}}$$

Step 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})=\lim_{x\to+\infty}\boxed{\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\boxed{\frac{-2}{1+\sqrt{1+2/x}}}=\boxed{-1}$$

計算用紙

☞ $\dfrac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\dfrac{-2x\times\frac{1}{x}}{(x+\sqrt{x^2+2x})\times\frac{1}{x}}=\dfrac{-2}{1+\sqrt{(x^2+2x)\times\frac{1}{x^2}}}$ に注意.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

Step 1. 無理式を有理化する.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}\times\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$=\boxed{}$$

Step 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\boxed{}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\boxed{}$$

$$=\boxed{}$$

計算用紙

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

Step 1. 無理式を有理化する.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\boxed{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}}{\boxed{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

Step 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1})\times\frac{1}{x}}{x\times\frac{1}{x}}}$$

$$= \boxed{2}$$

計算用紙

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ と $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ も極限を求める問題でよく使われる.