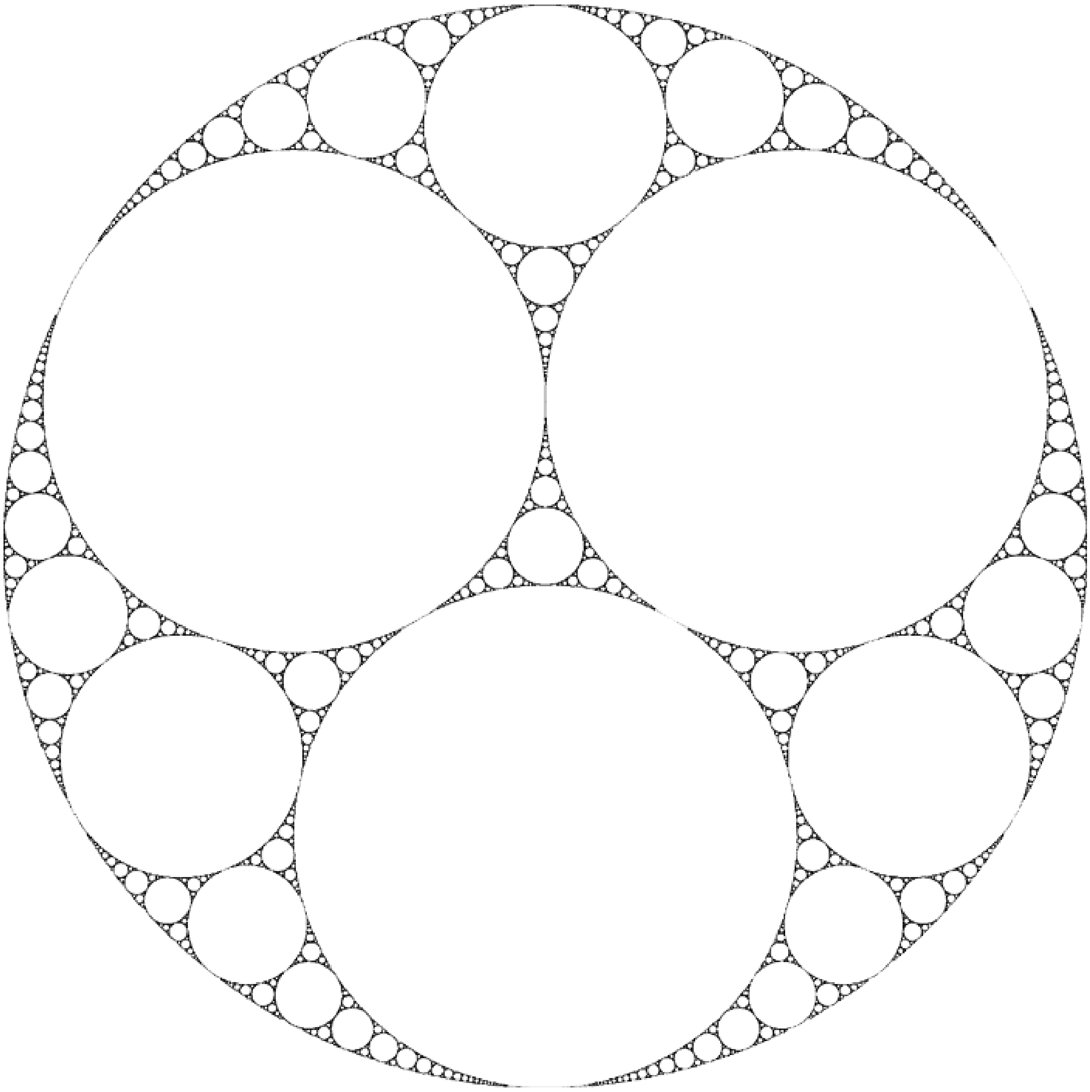
２０１１年 加古川東高等学校
理数科特別講座



神戸薬科大学
内田　吉昭

目次

1 はじめに 1

1.1 グラフ理論とは . . . 1

2 一筆書き 3

2.1 一筆書きに挑戦 . . . 3

2.2 一筆書き . . . 4

2.3 一筆書きの仕方 . . . 12

3 グラフの定義と応用 15

3.1 グラフの定義 . . . 15

3.2 グラフと電線 . . . 15

3.3 輪のある電線 . . . 17

3.4 さらに複雑な電線 (オイラーの公式を目指して) . . . 18

3.5 向きの付いたグラフ . . . 20

3.6 入試問題のグラフ理論 . . . 21

1　はじめに

1.1　グラフ理論とは

グラフ理論の初歩の一筆書きについて解説します．グラフ理論は双曲線・直線・三角関数とかのグラフを扱うわけでもなくまた、円グラフ・棒グラフとか折れ線グラフとかをあつかう理論でもありません．グラフ理論は、グラフと呼ばれる頂点と辺からなる図形を研究します．グラフの例は、一筆書きの図形やあみだ籤のようなものです．

ケーニヒスベルクの 7 つの橋の問題を聞いたことがあると思う．

図 1.1 の地図は東プロシアの古都ケーニヒスベルグ、旧ソ連のカリーニングラードとして知られる町です．

図 1.1　ケーニヒスベルクの橋 1

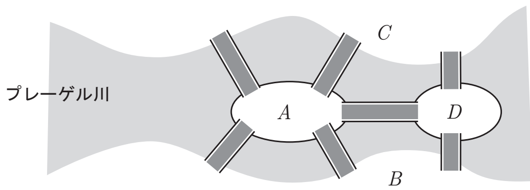


図 1.2　ケーニヒスベルクの橋 2

そこを流れるプレーゲル川は町を中央のクナイホフと呼ぶ島を含む 4 つの地区に分割していました．そこに 7 つの橋が図 1.2 のように掛けられていました．この七つの橋を、ちょうど一度ずつ渡る渡り方があるだろうか、と言う事が昔問題になりました．各自、図 1.2 で試してもらいたい．

当時の多くの市民が実際に橋を渡り問題の渡り方を試したが、成功した者はいなかったと言うことです．そこで、この橋を一度ずつ渡る事は不可能だと思われていました．しかし、誰一人として不可能だということを証明する事はできませんでした．ところが、スイス生まれの数学者オイラー (L. Euler、1707–1783) が数学的にこれを不可能だと証明をしました．

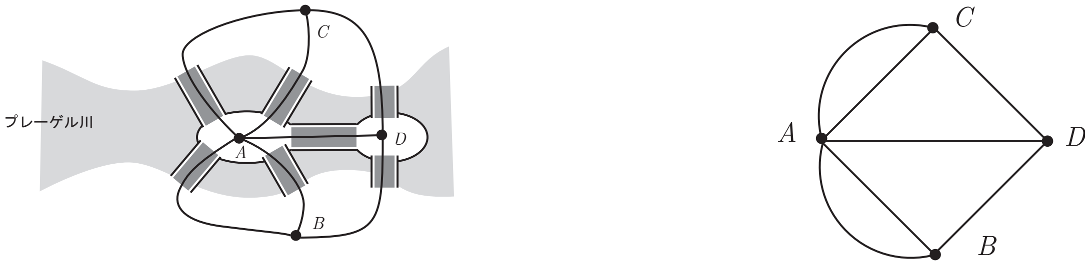


図 1.3　ケーニヒスベルクの橋のグラフ

オイラーは 1736 年の論文の中でこの問題では島の大きさとか橋の長さ・幅を無視してよい事を指摘してい

ます．長さ・幅を無視すると言う事は、島を頂点とみなし橋を辺と呼ばれる線分または曲線とみなした図形を考える事です．そして、この図形が**グラフ**と呼ばれる物の例になります．距離・面積・体積などの量を測る幾何学とは異なる質を調べる幾何学が生まれました．

ケーニヒスベルクの橋をグラフで表したのが図 1.3 です．ケーニヒスベルクの橋の問題は、このグラフが一筆書きできるかどうかという問題になります．

宿題 1

学校の建物などの階段にある電灯のスイッチを考えてみよう．どの階のスイッチでも階段のすべての電灯がついたり消えたりします．このときの電線の回路はどうなっているか考えてください．これもグラフ理論の 1 つです．

宿題 2

また電車を考えましょう．ドアの外側にちいさな電灯があります．これはドアが開くと電気がつき、 すべてのドアが閉まると電気が消えます．これの回路も考えてください．

2　一筆書き

一筆書きとは、グラフですべての辺をまわり同じ辺は 2 回以上通らない書き方があるかという問題です．ここでは、一筆書きできるグラフとできないグラフの見分け方と、そして、できるグラフに対して一筆書きの仕方を考えます．

2.1　一筆書きに挑戦

練習 図 2.1 のグラフに対して一筆書きをしてみてください．ただし、中には一筆書きできない図形もあるから注意して下さい (制限時間 5 分)

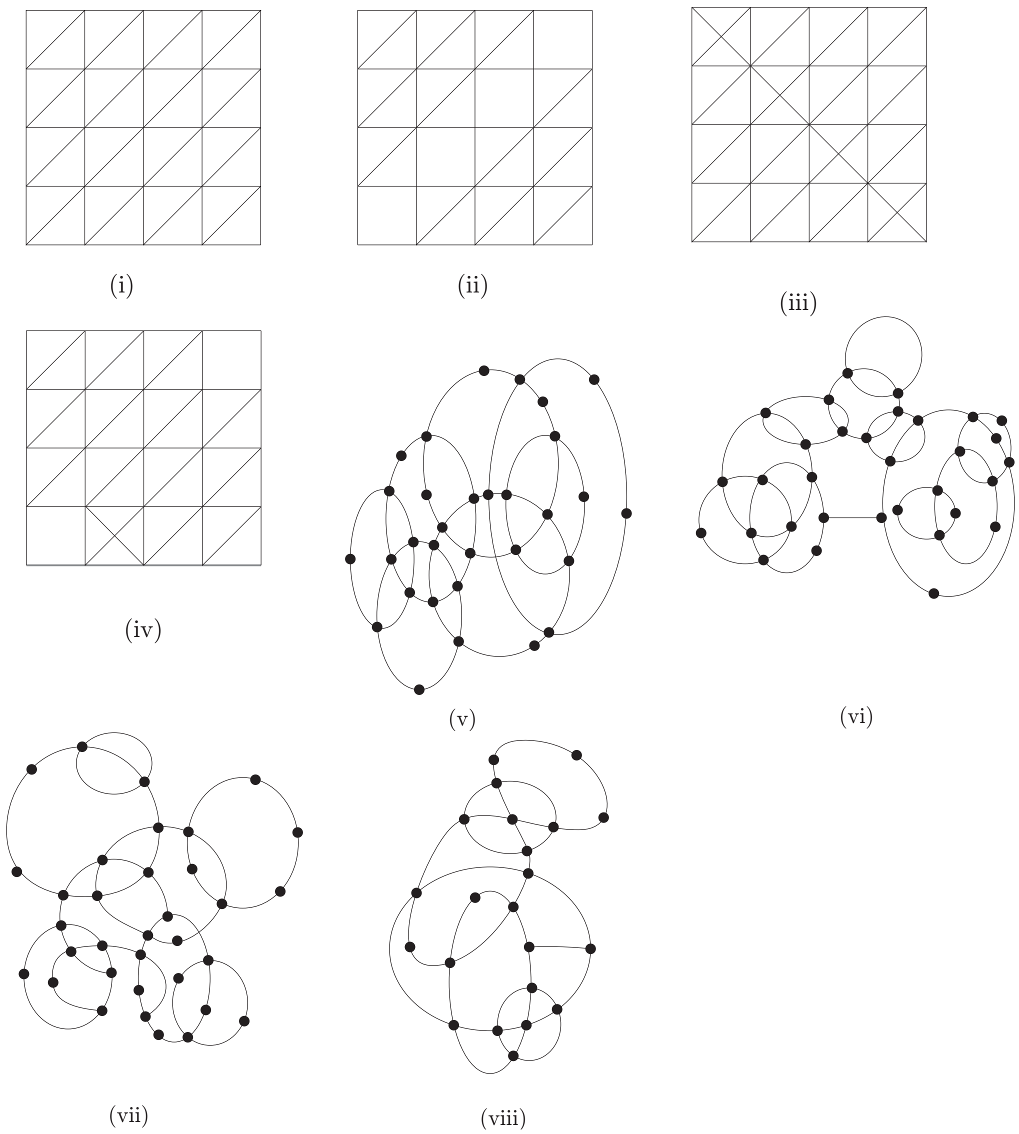


図 2.1　一筆書きをしてみよう

2.2　一筆書き

図 2.1 の複雑なグラフで考えると大変なので、少し簡単なグラフで考える事にしよう．図 2.2 のグラフに対して一筆書きできるかどうか調べてください．

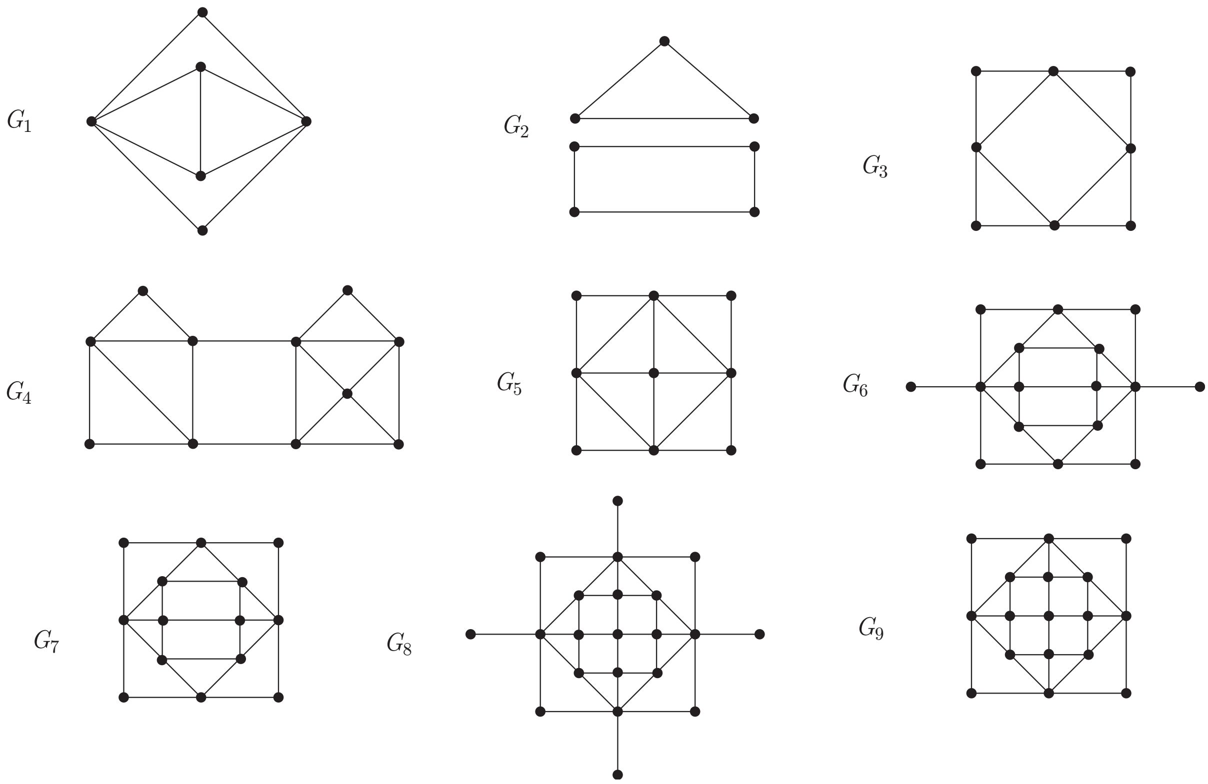


図 2.2　再び一筆書き

G_1、G_3、G_4、G_6、G_7 は一筆書きできるグラフで残りはできないグラフです．まず、連結でないと一筆書きできないので、G_2 はできない事にすぐにわかります．

G_3 は簡単に一筆書きができるグラフです．それに対して G_1、G_4、G_7 は一筆書き可能ですが、難しいグラフです．

G_6 のグラフは一筆書きの始点がすぐにわかるようなグラフです．両端に伸びている辺の端点から描き始めないといけないことはわかるでしょう．G_6 のグラフのように始点と終点が決まっているグラフがあります．G_7 は G_6 を少し変形したグラフなので、同じように始点と終点が決まっている事がわかります．

それに対して、G_3 はどの頂点を始点にしても良いグラフです．その理由を考えるために、図 2.2 の各頂点に集まる辺の本数を書き入れ偶数の時には頂点を青で奇数の時には頂点を赤で塗りましょう．一筆書きした時の始点と終点を除く頂点の色はどうなっていますか？

一筆書きの途中の頂点では、一筆書きをした時に入ってくる辺と出て行く辺の対があるので頂点に集まる辺の本数は偶数になることがわかります．

始点と終点ではどうなるのでしょう．始点と終点が同じならばその頂点に集まる辺の本数は偶数となります．始点と終点が異なる場合は対応する頂点に集まる辺の本数は奇数になるのがわかりますね.

よって、G_1 と G_5 では頂点に集まる辺の本数が奇数 (赤い頂点) から出発しまた赤い頂点で終わらないといけなかったのです.

G_3 はすべての頂点に集まる辺の本数が偶数なのでヘマをしない限りどの頂点から出発しても一筆書きできるのです.

では、頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か奇数が 2 つでその他はすべて偶数となるグラフは一筆書き可能でしょうか？すぐにわかるのはグラフは連結でなければならないということです.

次の定理が言えることがわかっています.

定理 2.1
連結なグラフ G が一筆書き可能という事と、頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か 2 つの頂点で奇数で残りはすべて偶数という事は、同値です.

一筆書きの数学的な説明は後にして、具体例で実践してみよう．一筆書きできないグラフの見分け方はわかったので、できるグラフを考えます．レベルをだんだんに上げていく練習問題を用意してあるので、挑戦してみてください．また、失敗しても良いようにグラフを 2 つ用意してあります.

一筆書き 難易度 1 図 2.3 が難易度 1 の問題です．ちょっと考えればできると思います．

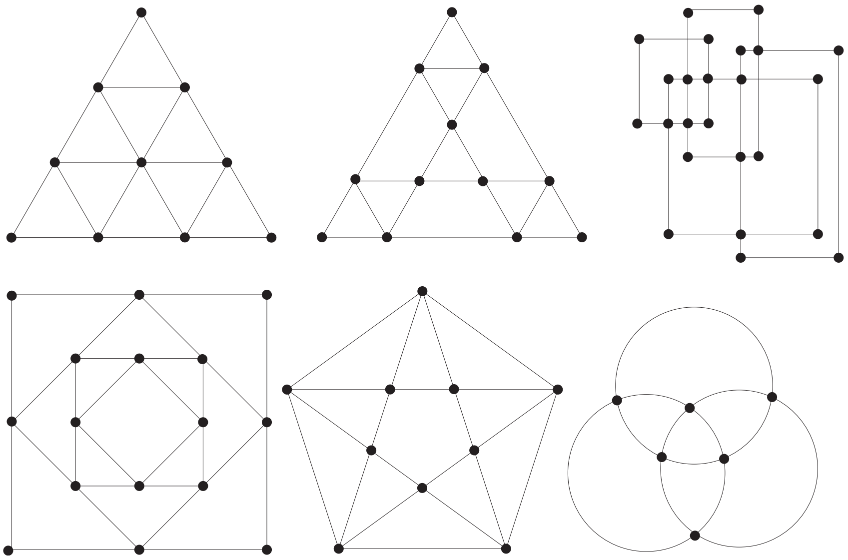


図 2.3　難易度 1

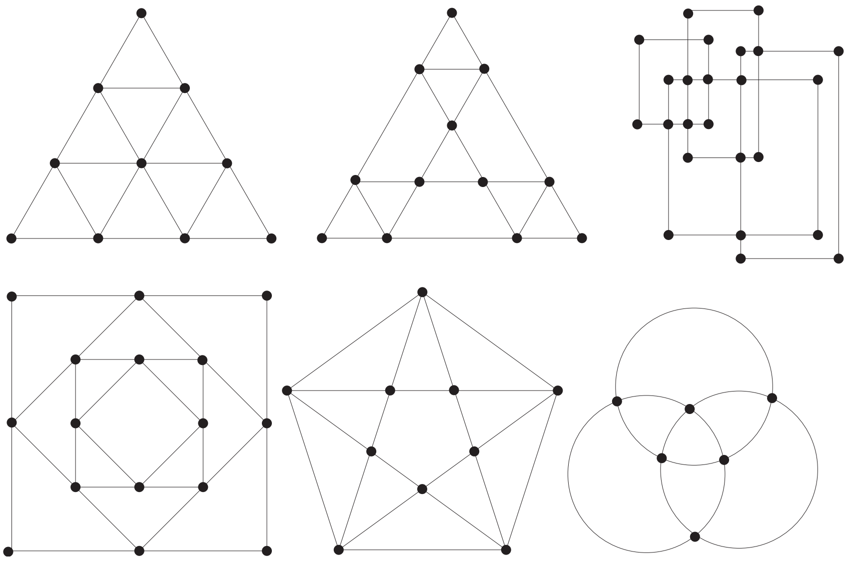


図 2.4　難易度 1 again

一筆書き 難易度 2 図 2.5 が難易度 2 の問題です．考えればできますね.

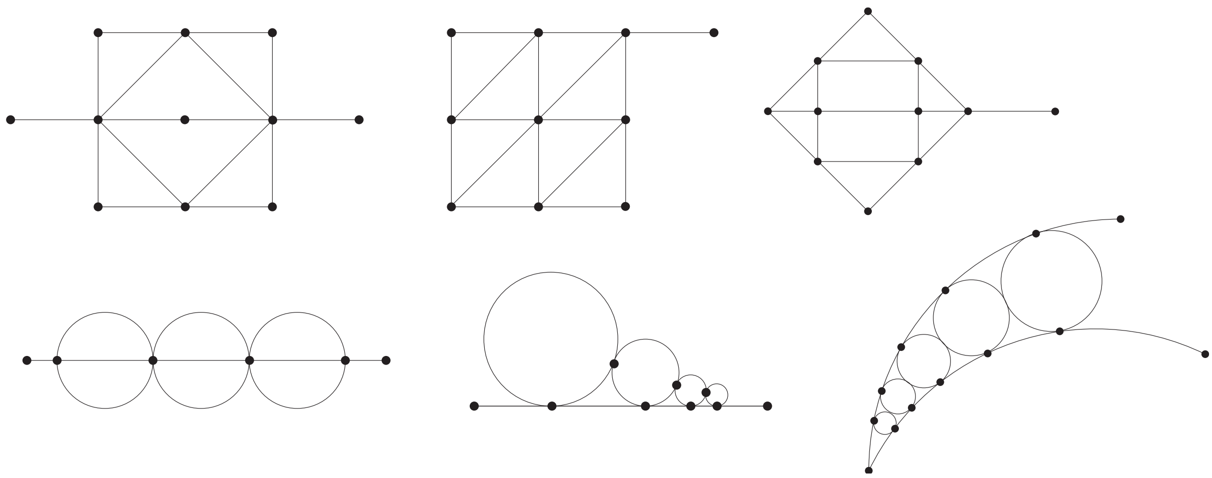


図 2.5　難易度 2

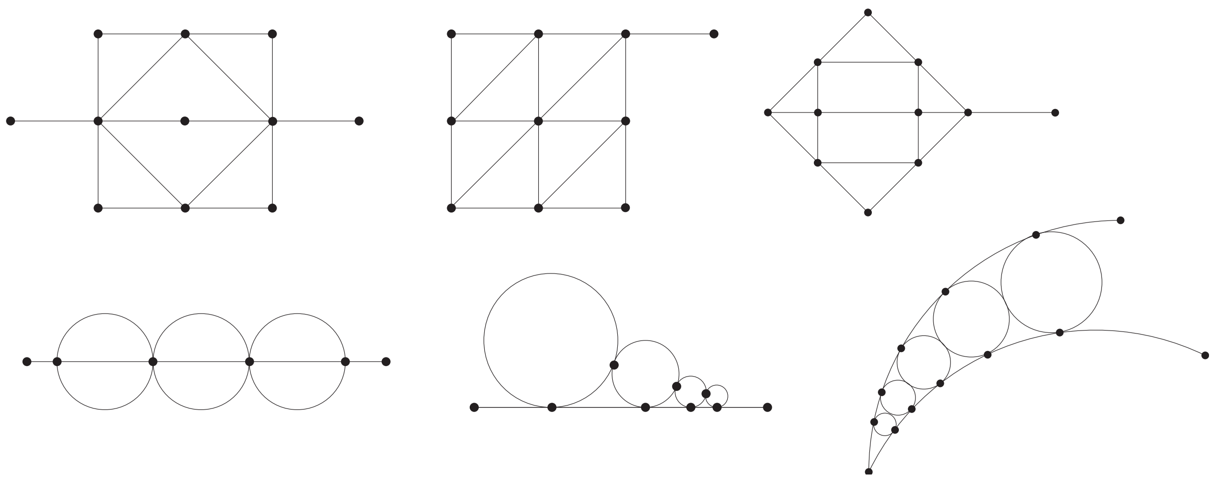


図 2.6　難易度 2 again

一筆書き 難易度 3 図 2.7 が難易度 3 の問題です．ちょっと頭を使ってください．

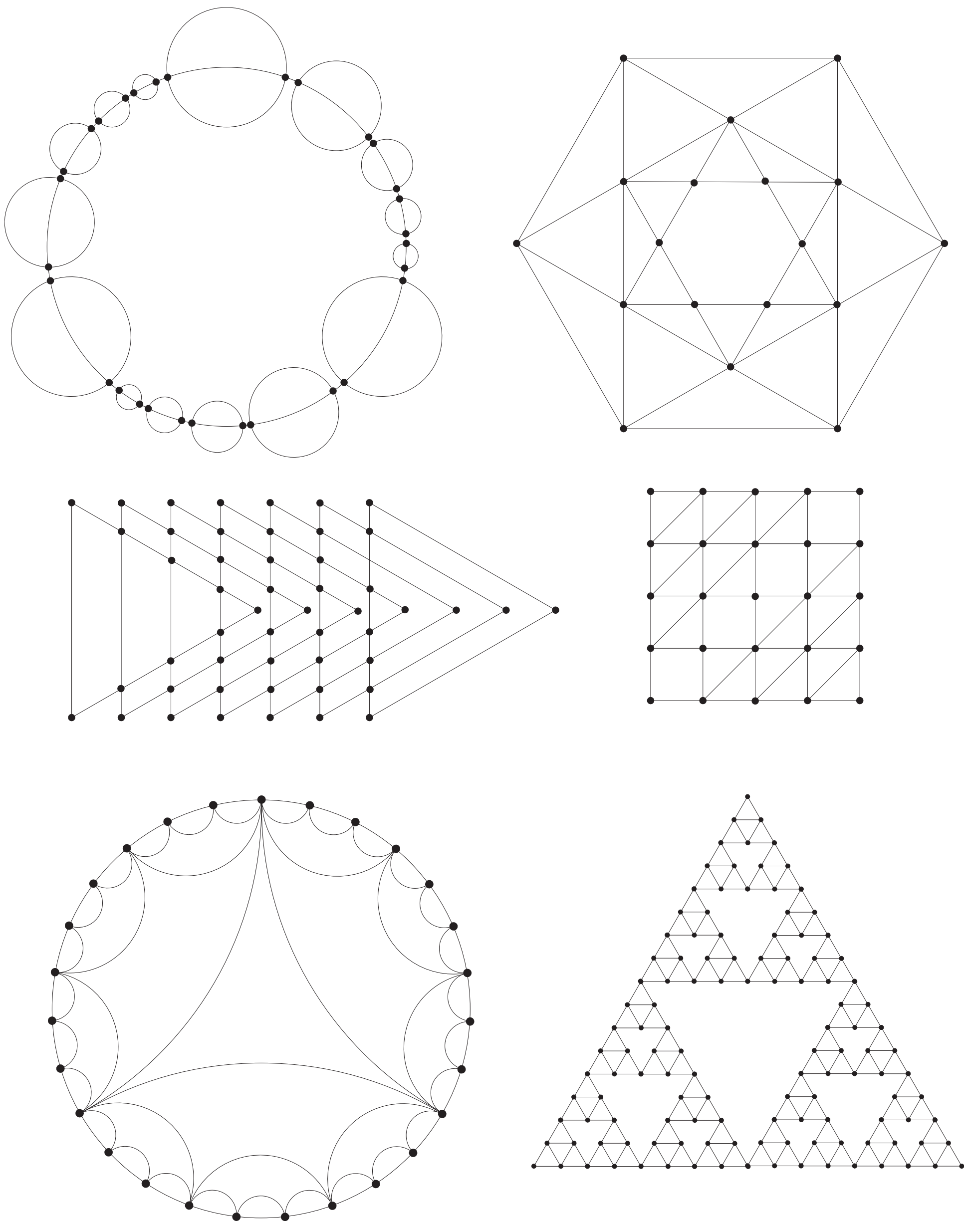


図 2.7　難易度 3

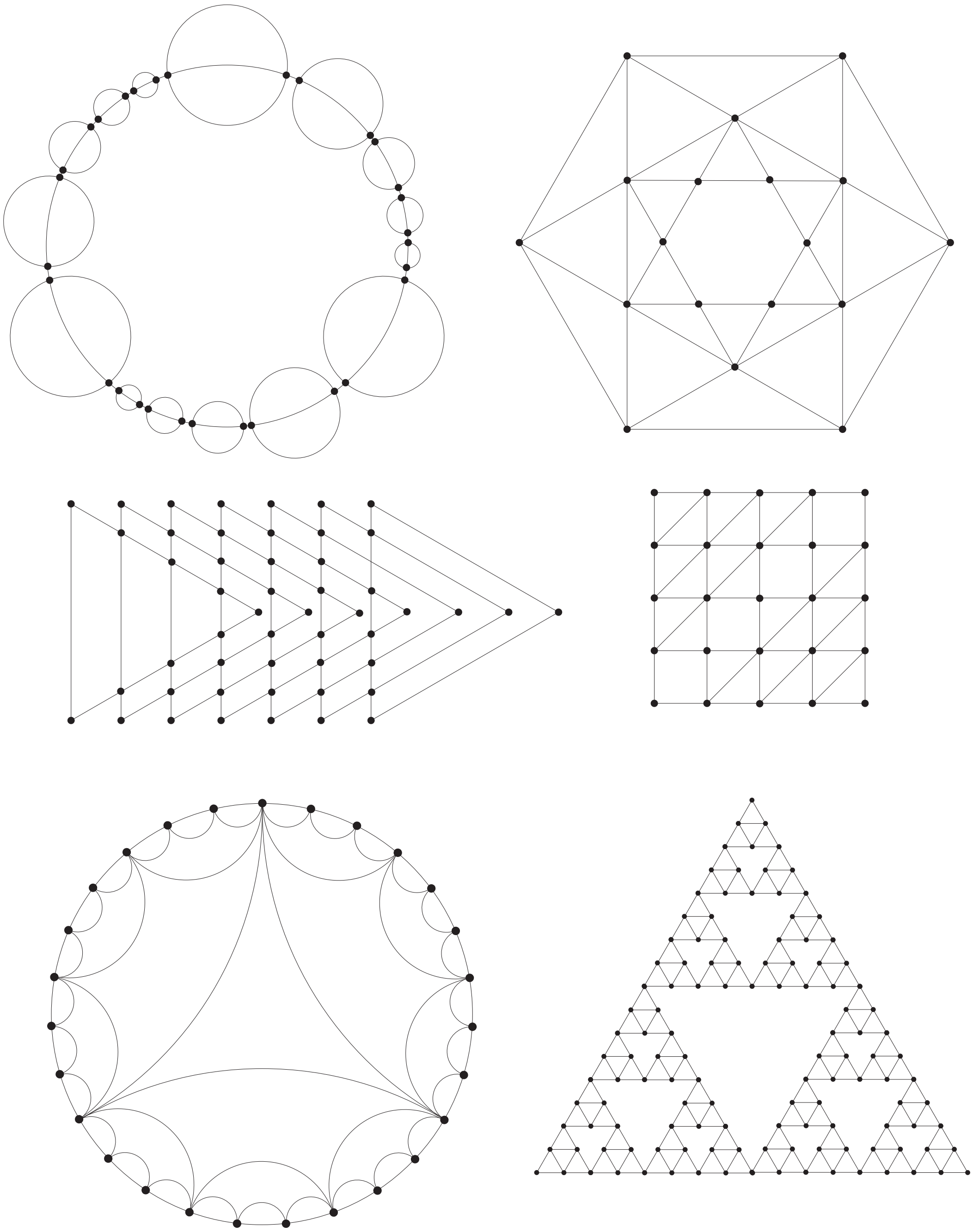


図 2.8　難易度 3 again

一筆書き 難易度 4 図 2.9 が難易度 4 の問題です．よく考えてないとできません．

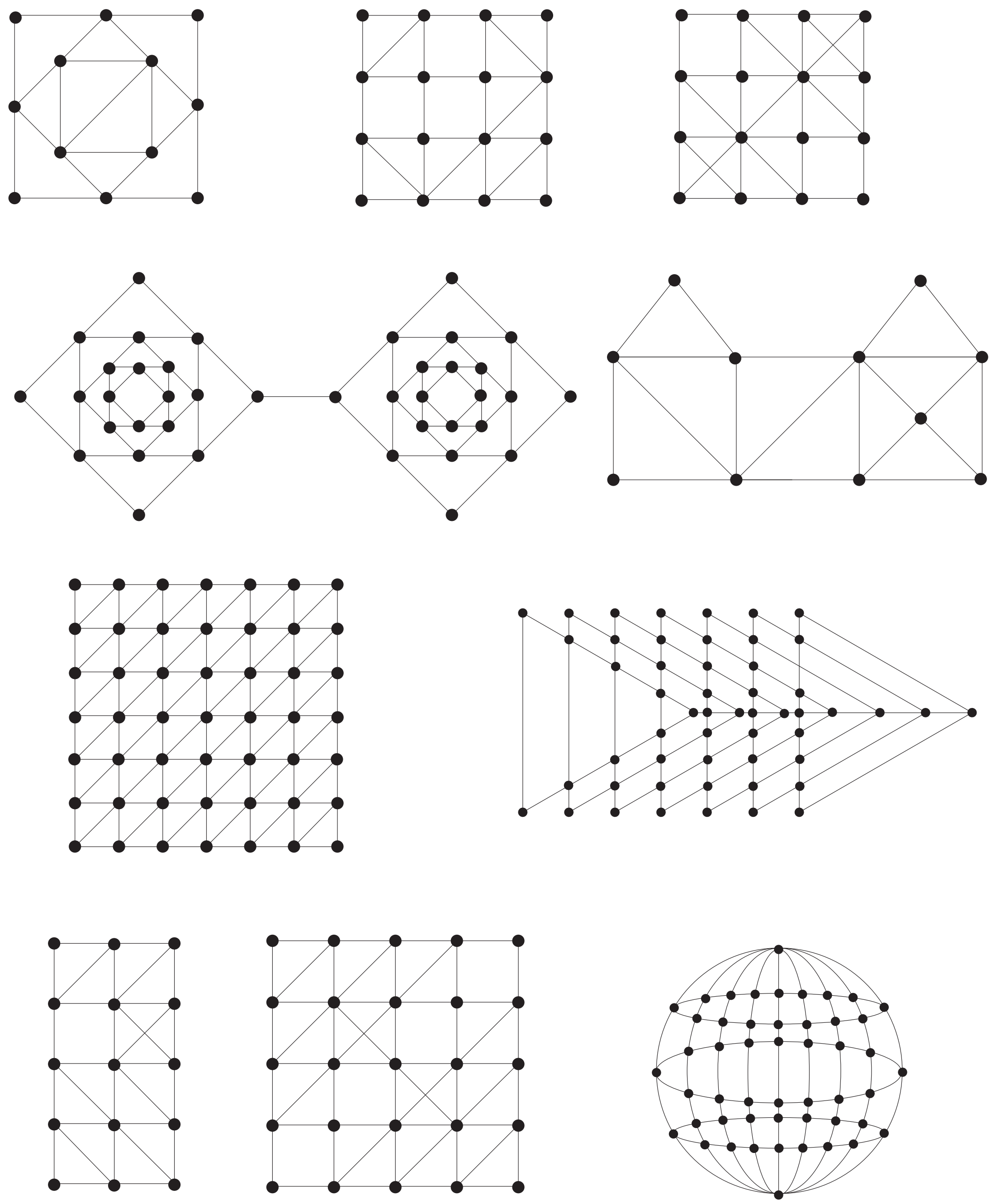


図 2.9　難易度 4

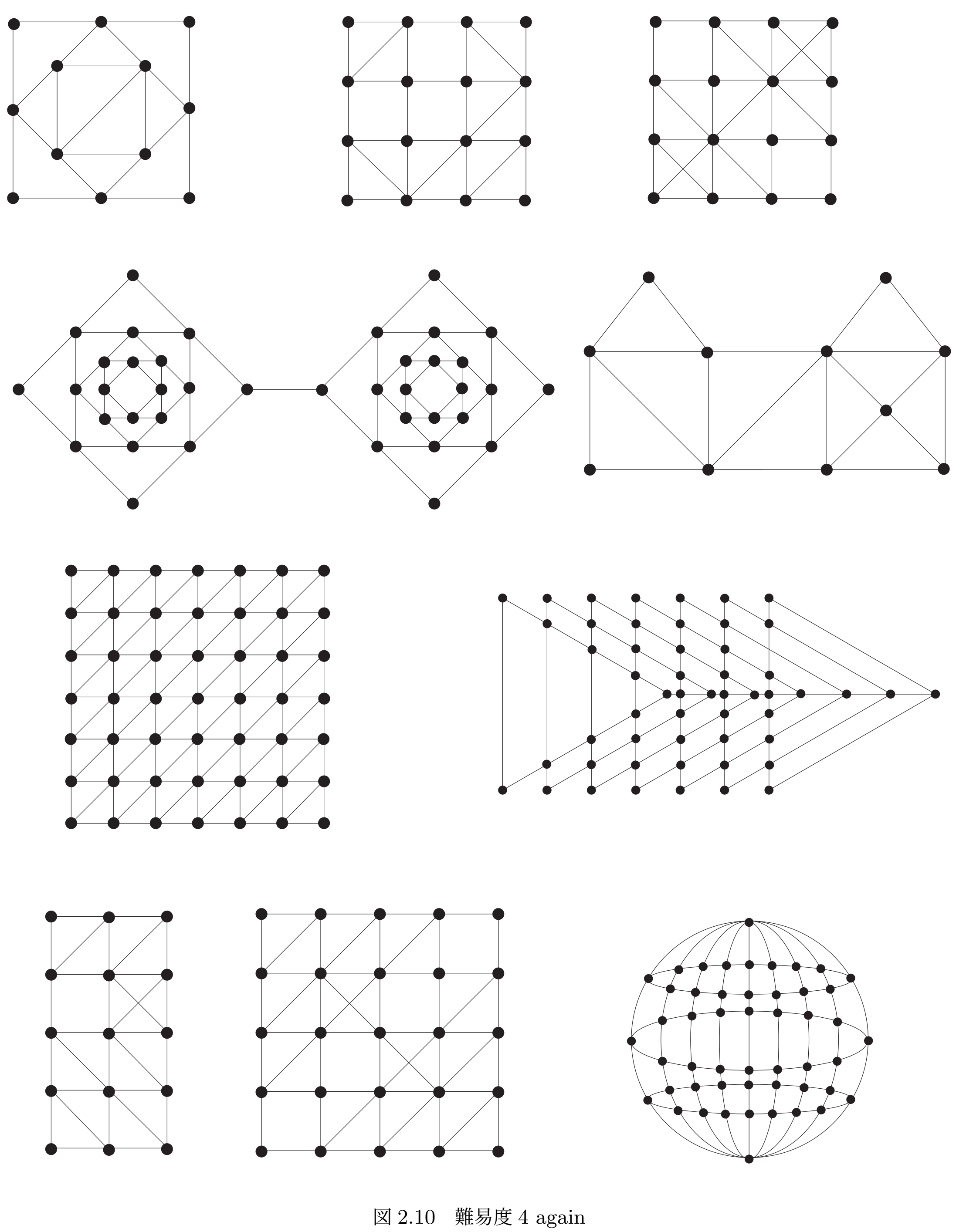


図 2.10　難易度 4 again

2.3　一筆書きの仕方

初めに頂点に集まる辺の本数がすべて偶数の時を考えます．この時、好きな頂点を選んで一筆書きをしていきます．この時もうこれ以上一筆書きできないという状態はどのような状態でしょうか．

この様な場合は具体例を自分で作って実験をするのが理解する上で非常に大事です．

簡単な例を作っておきましたので考えてみましょう．

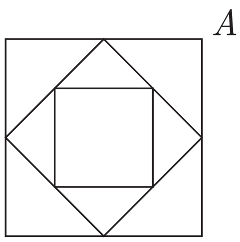


図 2.11　頂点に集まる辺の本数がすべて偶数

図 2.11 で実験してみます．図 2.12 のように、A から出発して外側の正方形を 1 周して見ましょう．元に戻った A でもうこれ以上進めないことがわかりますね．

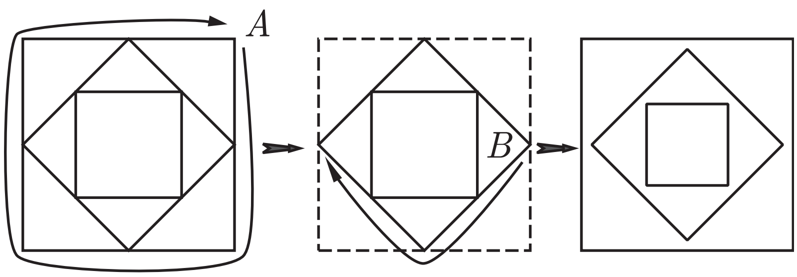


図 2.12　グラフの分割

一つの輪ができた事に気がついたでしょうか．でも、これではまだ通っていない所があるので一筆書きできた事にはなりませんね．

そこで、まだ通過していない所に注目します．頂点に集まる辺の本数はすべて偶数だという事に気がつきましたか．(偶数 − 偶数 = 偶数という事実を使っています．) なので、B から出発してまた同じ事を行なうことができます．

すると、このグラフはいくつかの輪に分解されることがわかります．では、これらのいくつかの輪からどうすれば一筆書きができるのでしょうか？

簡単のために輪が 2 つある場合を考えましょう．図 2.13 の様に回り道をすれば 2 つの輪が 1 つの輪に変わります．

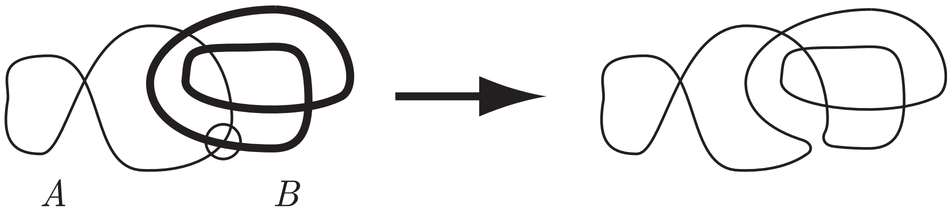


図 2.13　二つの輪を一つにして

この仕組みが理解できれば輪がいくつあっても大丈夫ですね．よって、頂点に集まる辺の本数がすべて偶数のグラフはどんなグラフでも一筆書き可能となります．図 2.1 の (ii) (v) 図 2.2 の G_3 がそうなので各自もう一度この理論にしたがって一筆書きしてみてください．図 2.1 (v) は輪がすぐに目に見える形で表現されていることに気がつきましたか？

今回はかなり簡単に一筆書きできたと思います．

次に頂点に集まる辺の本数が 2 つ奇数でそれ以外は偶数の時はどうなるでしょうか．新しい議論を始めないといけないでしょうか．

図 2.1 (iv) のグラフで具体的に考えてみます．仮想的に辺を 1 本図 2.14 の様に頂点に集まる辺の本数が奇数の 2 つの頂点を結ぶ様に付け加えます．(この辺は仮想的に付け加えてあるので他の辺の上を通ってもよい事に注意してください．また、他の辺とは交わりができない事に注意してください．) すると、頂点に集まる辺の本数はすべて偶数になりました．(奇数 + 奇数 = 偶数ということを使っています．)

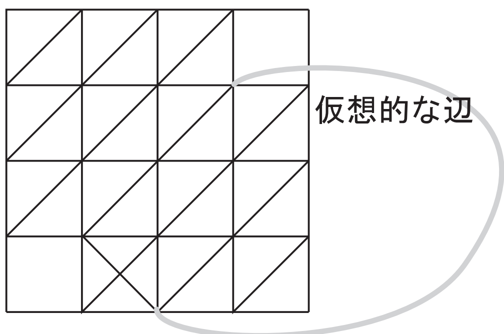


図 2.14　仮想的な辺

するとこの新しいグラフは頂点に集まる辺の本数がすべて偶数となり一筆書きできるグラフになります．
そして、付け加えた辺を消してやれば元のグラフの一筆書きが得られます．

以上のことを理解すれば、どんなグラフでも一筆書きできるかどうかわかるし一筆書きできるグラフは一筆書きができるようになります．

宿題 3
一筆書きできる複雑なグラフを 3 つ以上作れ

宿題 4

一筆書きできない複雑なグラフを 3 つ以上つくり、なぜ一筆書きできないかを述べよ.

うめくさ図 2.15 で一筆書きするためにはどうすればいいでしょうか.

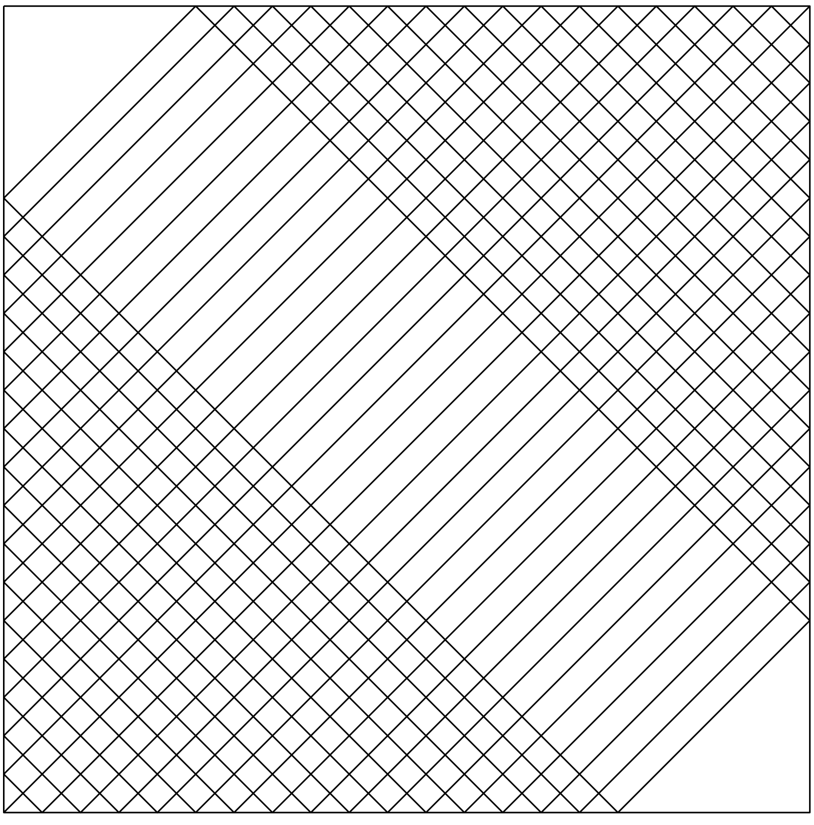


図 2.15　ちょっと複雑な一筆書き

3　グラフの定義と応用

3.1　グラフの定義

グラフとは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形です．1 章での一筆書きの図形などがグラフの例となります.

図 3.1 はグラフの例です．図 3.1 の最初の八角形のグラフを見てほしい．このグラフで頂点は八角形の 8 つの頂点だけであり、対角線が交わっているところは、頂点ではありません．この授業では頂点は点で表します．Planarity[*1] と言う頂点を動かしてグラフを平らにするゲームを知ってれば、頂点と辺と辺との交差との違いがわかりやすいと思う.

練習 ノートにいくつかグラフを描いてみよう．また、図 3.1 の様に特徴を持ったグラフをいくつか作れ.

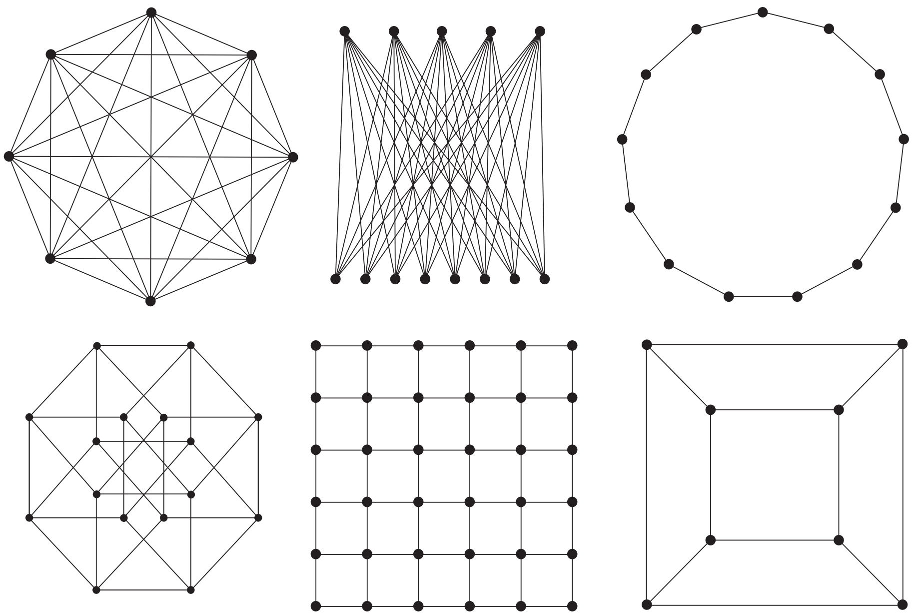


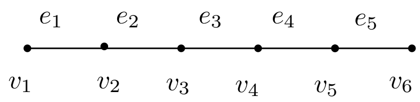
図 3.1　グラフ・グラフ・グラフ

3.2　グラフと電線

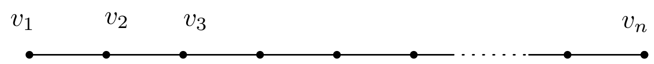
グラフは色々なものに応用できます．たとえば、電柱と電線を考えてみよう．電柱を頂点、電線を辺とすればグラフができます.

下のように 6 本の電柱が直線上に並んで立っているときを考えよう．電線は何本ありますか？

[*1] http://www.planarity.net/



では、つぎのように n 本の電柱が立っているとき電線は何本あるでしょうか？



わからない時は、n が 1, 2, $\cdots$, n というふうに考えていけばわかりますね.

電柱	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線							

では、ちょっと複雑になって図 3.2 の場合にはどうなりますか？ (i) から (v) のグラフの電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください.

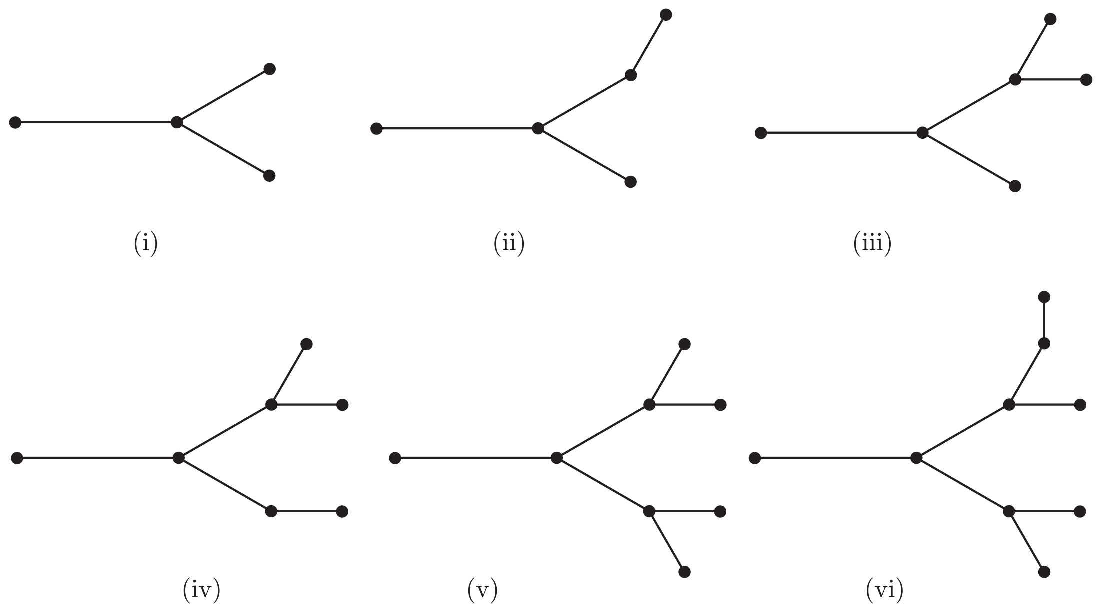


図 3.2　ちょっと複雑な電線

図 3.2 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
電柱						
電線						

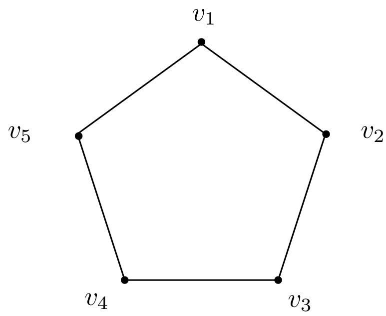
自分で図 3.2 の電線と電柱の例を拡張して電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください. 何か関係が見つかりませんか？

電柱	9	10	11	12	13	$\cdots$	n
電線							

問題 電線の数と電柱の数の関係を求めて、なぜそうなるかを説明しなさい．また、その説明を友達などに見せてその説明を理解してくれるか確めてみなさい．理解できなければ、もっと良い説明になるようにしなさい．

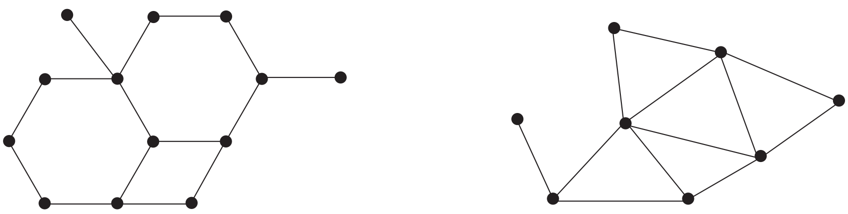
3.3　輪のある電線

次の図のように輪のような電柱と電線があった場合はどうなるでしょうか？



上のように 5 本の電柱があった場合には電線は何本ありますか？また、電柱が n 本あった場合に電線は何本あるでしょうか？次の空欄を埋めてください．

電柱	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線						



(A)　　(B)

図 3.3　たくさんの電線

さらに、図 3.3 のように電柱と電線がありました．電柱と電線の関係はどうなるでしょうか？ (A) と (B) のそれぞれの場合に電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい．

	A	B
電柱		
電線		

気がついたかもしれませんが、電柱と電線の関係は他に何か条件がないと求めることはできません.

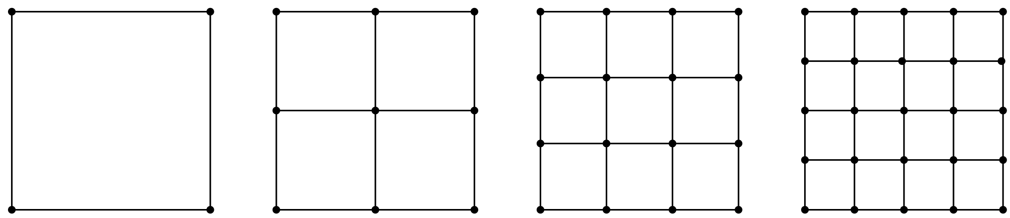
宿題 5
どのような条件か考えましょう．ただし、考え方の一例を次の節でします.

宿題 6
兵庫県または好きな都道府県の国道からなるグラフを描け．国道を辺とみなして、いくつかの国道が交わっている点を頂点と考えよ．名古屋地下鉄の路線図[*2]をグラフと考えて作成してみよ．ただし、すべての駅名を入れなくてよい．また、元気な学生は東京・パリ・ニューヨークなど、地下鉄が複雑に走っている都市の地下鉄の乗り換え図を作成してみよう．(大阪近郊や東京近郊の路線図はいかにうまく 1 枚の地図にわかりやすく作成されているかに気づいてほしい)

3.4 さらに複雑な電線 (オイラーの公式を目指して)

前の節の最後で、複雑な電線を考えました．このような場合、どのように問題を考えていけば良いのかの一例を示す事にします.

初めに複雑なグラフを描いてもあまり手がかりは得られそうにありません．そこで、次の四角形からなるグラフで考えていきましょう.



(i) (ii) (iii) (iv)

図 3.4 正方形の電線

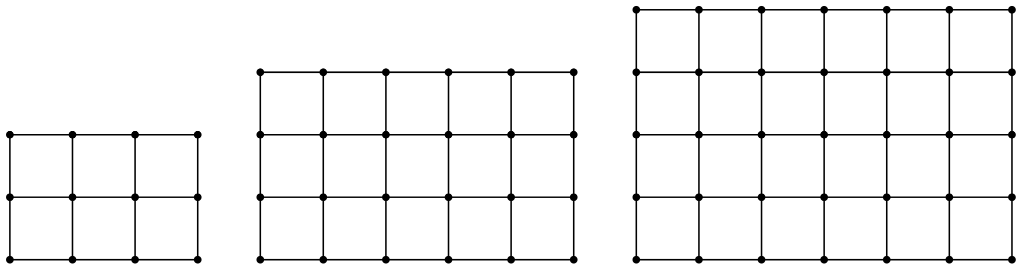
図 3.4 のグラフは格子状の形をしている正方形からなり正方形の一辺が 1 つ、2 つ、3 つと分割されています．各々のグラフで一番小さな正方形を最小の正方形と言う事にしよう．このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみよう.

グラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	$\cdots$	
頂点数						
辺数						
面の数						

頂点数、辺数、面の数の間に関係がないだろうか？これらを足したり引いたり掛けたりして考えてほしい.

図 3.5 のグラフは最小の正方形の配置がちょっと複雑になったグラフです．このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形の数の間の関係はどのようになっていますか．また、縦に m 個、横に n 個最小の正方形

[*2] 路線図は時刻表やインターネットで検索すれば出てきます.



2×3 のグラフ　　3×5 のグラフ　　4×6 のグラフ

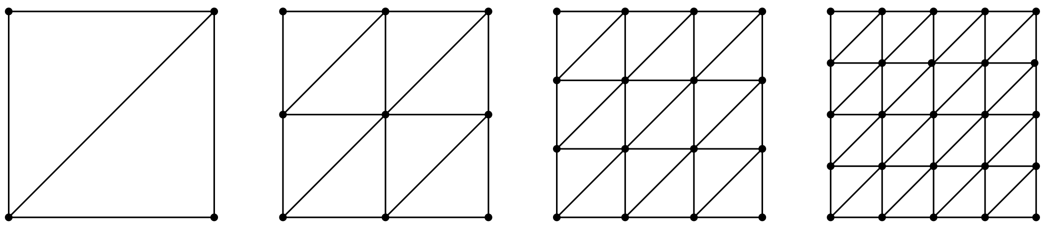
(a)　　(b)　　(c)

図 3.5　四角形の電線

が配置されているグラフを $m \times n$ のグラフと言う事にする．$m \times n$ のグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみましょう．

図 3.5 のグラフ	(a)	(b)	(c)	$\cdots$	$m \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					

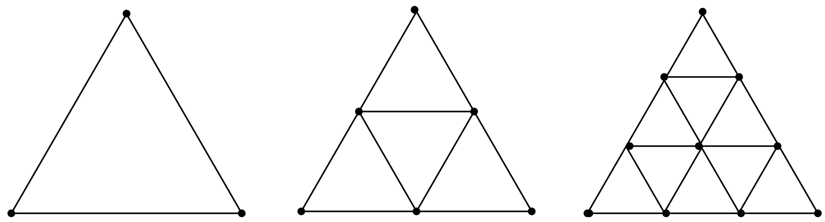
このグラフは図 3.6 図 3.7 ようにして三角形からなる複雑なグラフにする事ができます．これらのグラフにも前と同じように $n \times n$ の (三角形の) グラフと名前をつけて頂点数、辺数、最小の三角形で囲まれた面の数を求めてみましょう．



(i)　　(ii)　　(iii)　　(iv)

図 3.6　正方形の中の三角形の電線

図 3.6 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	$\cdots$	$n \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					



(i) (ii) (iii)

図 3.7　三角形の中の三角形の電線

図 3.7 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	$\cdots$	
頂点数					
辺数					
面の数					

正方形の時も三角形の時も頂点数 v、辺数 e、面の数 f の関係は (求めた関係が正しかったら) 同じ関係になっています．v、e、f の関係式を求めて、興味のある学生はなぜそうなるのか考えてください．この関係式がオイラー標数です．

3.5　向きの付いたグラフ

5 つのチーム a, b, c, d, e でリーグ戦（総当り戦）をした．その結果つぎの表のようになった．

	a	b	c	d	e
a		◯	◯	×	◯
b	×		◯	◯	◯
c	×	×		◯	◯
d	◯	×	×		◯
e	×	×	×	×	

これをグラフを使って表してみよう．図 3.8 のように矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね．

この様に辺に向きをつけて考えることもあります．

問題 A、B、C、D、E、F の 6 チームがリーグ戦（総当たり戦）をしました．成績は A が四勝一敗、B が全勝、C が二勝三敗、D が三勝二敗でした．E は一度だけ勝っていますが、どのチームとの試合で勝ったのでしょうか？

この問題は、上のリーグ戦のグラフを使えば、簡単に解けます．6 チームなので正六角形の各頂点に A、B、C、D、E、F を対応させます．

図 3.9 のグラフに条件に合うように辺に向きを書き入れていきましょう．ところが、A の頂点から書き入れようとしても、どのチームと勝ったかどうかは、わからないですね．どのチームから考えればよいでしょ

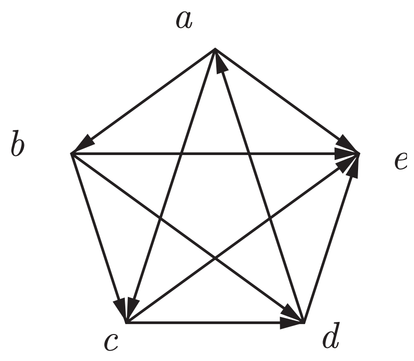


図 3.8　向きの付いたグラフ

うか？

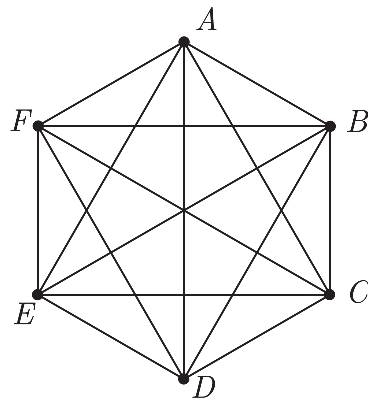


図 3.9　リーグ戦のグラフ

B は全勝しているので、残りのすべての頂点に対して B を始点とする矢印つきの辺で結びます.
A は四勝一敗なので B 以外とはすべて勝っているのでそれらの頂点に対して同様に矢印つきの辺で結びます.
D は三勝二敗なので A と B 以外の頂点に対して同様に矢印つきの辺で結ぶ事ができます.
C は二勝三敗なので E と F の頂点に矢印つきの辺で結びます.
すると、条件から E は 1 回だけ勝っているので残りの F の頂点と矢印つきの辺で結ぶ事になります．したがって、E は F に勝ったことがわかります.

宿題 7
このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を考えよ.

3.6　入試問題のグラフ理論

次の入試問題は 1998 年の東京大学の後期の数学の入試問題から取ってきたものです.

宿題 8

この入試問題を解け．(2) の問題は、なぜある n では不可能かを証明する必要があります．すなわちどのような仕方でも不可能であることを示さなければなりません．

問題 グラフ $G = (V, W)$ とは有限個の頂点の集合 $V = \{P_1, \cdots, P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W = \{E_1, \cdots, E_m\}$ からなる集合とする．各辺 E_j は丁度 2 つの頂点 P_{i_1}、P_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ を持つ．頂点以外での辺同士の交わりは考えない．さらに、各頂点には、白か黒の色がついていると仮定する．

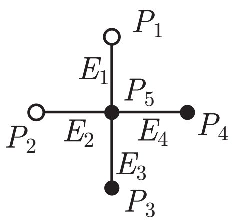


図1


図2

例えば、図 1 のグラフは頂点が $n = 5$ 個、辺が $m = 4$ 個あり、辺 $E_i (i = 1, \cdots, 4)$ の頂点は P_i と P_5 である．P_1、P_2 は白頂点であり、P_3、P_4、P_5 は黒頂点である．

出発点とするグラフ G_1(図 2) は、$n = 1$、$m = 0$ であり、ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする．

与えられたグラフ $G = (V, W)$ から新しいグラフ $G' = (V', W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する．これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する．

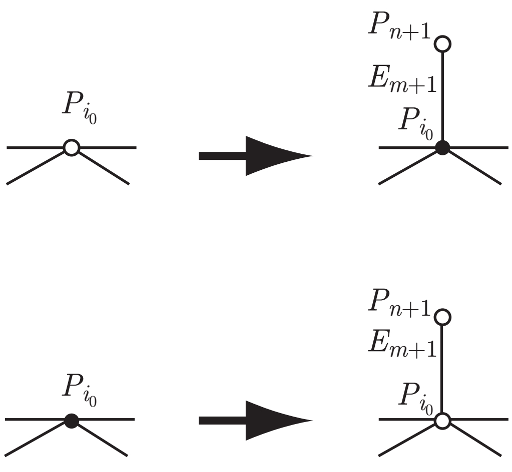


図3

(操作 1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を 1 つ選ぶと定まる．V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする．W' は W に新しい辺点 E_{m+1} を加えたものとする．E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし、G' のそれ以外の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする．G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば、G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる．それ以外の頂点の色は変化させない．また、P_{n+1} は白頂点にする．(図 3).

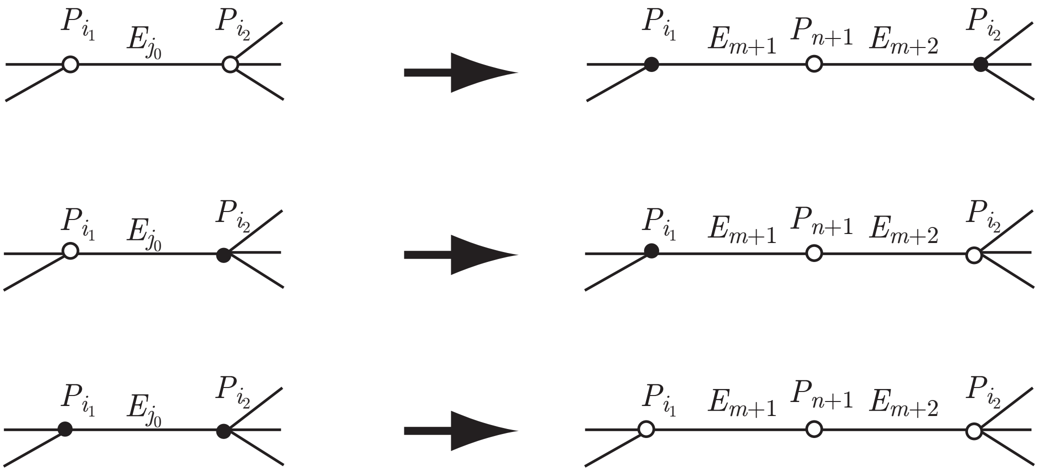


図 4

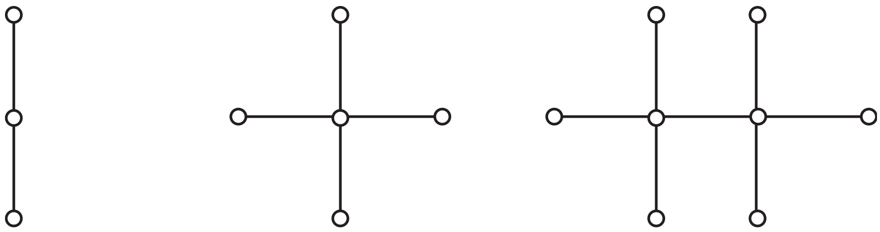


図5

図6

(操作 2) この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる．V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする．W' は W から E_{j_0} を取り去り、新しい辺 E_{m+1}、E_{m+2} を加えたものとする．E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき、E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり、E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする．G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする．G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば、G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる．P_{i_2} についても同様に変化させる．それ以外の頂点の色は変化させない．また、P_{n+1} は白頂点にする (図 4)．

出発点のグラフ G_1 にこれらの 2 種類の操作を有限回繰り返して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする．以下の問題に答えよ．

(1) 図 5 の 3 つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ．ここで、すべての頂点の色は白である．

(2) n を自然数とするとき、n 個の頂点を持つ図 6 のような棒状のグラフが可能グラフとなるために n の満たすべき必要十分条件を求めよ．ここで、すべての頂点の色は白である．

索引

edge, 15

Planarity, 15

vertex, 15

オイラー, 1
オイラーの公式, 18
オイラー標数, 20

グラフ, 1, 15
グラフ理論, 1

ケーニヒスベルク, 1

頂点, 15

電線, 15
電柱, 15

入試問題, 21

一筆書き, 2

辺, 15

向きの付いたグラフ, 20

リーグ戦, 20