

置換積分の計算

括弧の部分を t とおいて置換してみる.

【例題 53】

$$(1) \int (2x + 3)^5 dx$$

括弧の部分を t とおく.

$$t = \boxed{} \quad \dots \quad (1)$$

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dx = \boxed{} dt \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int (2x + 3)^5 dx &= \int \boxed{}^5 \boxed{} dt \\ &= \int \boxed{}^5 \boxed{} dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

$$(2) \int \sin(3x - 7) dx$$

括弧の部分を t とおく.

$$t = \boxed{} \quad \dots \quad (1)$$

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dx = \boxed{} dt \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \sin(3x - 7) dx &= \int \sin \boxed{} \boxed{} dt \\ &= \int \sin \boxed{} \boxed{} dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

練習問題 46 (4) (5) は括弧がないが, $\sqrt{5x - 1} = (5x - 1)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{7x - 3} = (7x - 3)^{\frac{1}{5}}$ と変形すればよい.

【例題 53】

$$(1) \int (2x + 3)^5 dx$$

括弧の部分を t とおく.

$$t = \boxed{2x + 3} \quad \dots \quad (1)$$

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{2} \quad \text{よって,} \quad dx = \boxed{\frac{1}{2}} dt \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int (2x + 3)^5 dx &= \int \boxed{(1) \text{ を代入}}^5 \boxed{(2) \text{ を代入}} dt \\ &= \int \boxed{t}^5 \boxed{\frac{1}{2}} dt \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \frac{1}{6} t^6} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{\frac{1}{12} (2x + 3)^6} + C \end{aligned}$$

$$(2) \int \sin(3x - 7) dx$$

括弧の部分を t とおく.

$$t = \boxed{3x - 7} \quad \dots \quad (1)$$

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{3} \quad \text{よって,} \quad dx = \boxed{\frac{1}{3}} dt \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \sin(3x - 7) dx &= \int \sin \boxed{(1) \text{ を代入}} \quad \boxed{(2) \text{ を代入}} dt \\ &= \int \sin \boxed{t} \quad \boxed{\frac{1}{3}} dt \\ &= \boxed{\frac{1}{3}(-\cos t)} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{-\frac{1}{3} \cos(3x - 7)} + C \end{aligned}$$

練習問題 46 (4) (5) は括弧がないが, $\sqrt{5x-1} = (5x-1)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{7x-3} = (7x-3)^{\frac{1}{5}}$ と変形すればよい.

【例題 54】

$$(1) \int \sin^2 x \cos x dx$$

$t = \sin x \cdots (1)$ とおく. この置換は経験が必要である.

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dt = \boxed{} dx \quad \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int \boxed{}^2 \boxed{} \\ &= \int \boxed{}^2 dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

【例題 54】

$$(1) \int \sin^2 x \cos x dx$$

$t = \sin x \cdots (1)$ とおく. この置換は経験が必要である.

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{\cos x} \quad \text{よって,} \quad dt = \boxed{\cos x} dx \quad \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int \boxed{(1) \text{ を代入}}^2 \boxed{(2) \text{ を代入}} \\ &= \int \boxed{t}^2 dt \\ &= \boxed{\frac{1}{3} t^3} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{\frac{1}{3} \sin^3 x} + C \end{aligned}$$

【練習問題】 $\int \cos^5 x \sin x dx$

$t = \cos x \cdots (1)$ とおく. この置換は経験が必要である.

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dt = \boxed{} dx \quad \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin x dx &= \int \boxed{}^5 \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \quad (2) \text{ を代入} \\ &= \int \boxed{}^5 (-1) dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

【練習問題】 $\int \cos^5 x \sin x dx$

$t = \cos x \cdots (1)$ とおく. この置換は経験が必要である.

x で微分する

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{-\sin x} \quad \text{よって,} \quad dt = \boxed{-\sin x} dx \quad \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin x dx &= \int \boxed{(1) \text{ を代入}}^5 \boxed{(2) \text{ を代入}} \\ &= \int \boxed{t}^5 (-1) dt \\ &= \boxed{-\frac{1}{6} t^6} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{-\frac{1}{6} \cos^6 x} + C \end{aligned}$$

$\sin x dx, \cos x dx, e^x dx$ などの場合に使う.

【置換積分を使った公式1】

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

$F'(ax + b)$ を $t = ax + b$ で合成関数の微分法を行うと $af(ax + b)$ と a が現れる。
したがって、積分を行うと逆に $\frac{1}{a}$ が現れる。

(1) $\int \sin(2x + 3) dx$

$$\int \sin x dx = -\cos x \text{ より}$$

$$\int \sin(2x + 3) dx = \frac{1}{\boxed{\quad}} \times (-1) \cos\left(\boxed{\quad}\right)$$

(2) $\int \cos(5x - 2) dx$

$$\int \cos x dx = \boxed{\quad} \text{ より}$$

$$\int \cos(5x - 2) dx = \frac{1}{\boxed{\quad}} \times \boxed{\quad}$$

以下の問題を同様にして解け。

(3) $\int (2x - 3)^7 dx$ (4) $\int \sqrt{3x + 4} dx$ (5) $\int (3x + 2)^{\frac{2}{3}} dx$

逆三角関数の積分【例題 56 参照】

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (3x + 1)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{Sin}^{-1}x \quad ax + b = \boxed{} \text{より}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (3x + 1)^2}} = \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{1}{3}x)^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{Sin}^{-1}x \quad ax + b = \boxed{} \text{より}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{1}{3}x)^2}} = \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{} = \boxed{}$$

$$(3) \int \frac{dx}{1 + (5x - 7)^2}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{Tan}^{-1}x \text{ より} \quad \int \frac{dx}{1 + (5x - 7)^2} = \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{}$$

$$(4) \int \frac{dx}{1 + (\frac{5}{9}x)^2}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{Tan}^{-1}x \text{ より}$$

$$\int \frac{dx}{1 + (\frac{5}{9}x)^2} = \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{} = \boxed{}$$

【置換積分を使った公式 2】

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

分数関数を積分する場合はこの公式に注意する。【練習問題 47 参照】

$$(1) \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$(x^2 + 1)' = \boxed{} \text{ より } \frac{x}{x^2 + 1} = \boxed{} \times \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1}$$

$$\text{したがって, } \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \boxed{} \times \log \boxed{}$$

$$(2) \int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx$$

$$(x^3 + 3x^2 + 1)' = \boxed{} \text{ より}$$

$$\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} = \boxed{} \times \frac{(x^3 + 3x^2 + 1)'}{x^3 + 3x^2 + 1}$$

$$\text{したがって, } \int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx = \boxed{} \times \log \boxed{}$$

次の積分を求めよ.

$$(3) \int \frac{x}{3x^2 + 5} dx \quad (4) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$