■1 次反応

医薬品の化学反応速度は，微分方程式を用いて記述されることがある．量 A に比例して減少していく薬品の反応を，**1 次反応**という．このとき，時間 t の関数として A は微分方程式

$$\frac{dA}{dt} = -kA \qquad (k \text{ は定数})$$

をみたす．k は**反応速度定数**と呼ばれる．この微分方程式は変数分離形である．$A > 0$ としてよいので，

$$\frac{dA}{dt} = -kA \quad \text{より} \quad \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = -k.$$

したがって，

$$\int \frac{1}{A}\frac{dA}{dt}\,dt = -k\int dt.$$

よって，

$$\log A = -kt + C \quad (C \text{ は定数}).$$

したがって，$A = e^C e^{-kt}$ となる．$A_0 = e^C$ とおくと $A = A_0 e^{-kt}$ (A_0 は定数) が得られる．$t = 0$ のとき $A = A_0$ より，A_0 は反応が始まったときの量となる．

例題 87 ラジウムは放射線をだしながら崩壊してラドンになる．崩壊の速さは，そのときのラジウムの量に比例する．ラジウムが最初の量の半分になるためにかかる時間 (半減期) は 1600 年である．

(1) 3200 年後には，初めの量のどれくらいになるか．

(2) 800 年後には，初めの量のどれくらいになるか．

【解答】 (1) 初めの 1600 年で半分になり，その後の 1600 年でそれのまた半分になるので $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 倍になる．すなわち，4 分の 1 の量になる．

(2) この反応は 1 次反応より，初めのラジウムの量を A_0 とすると，t 年後のラジウムの量 A は，$A = A_0 e^{-kt}$ となる．1600 年たつと半分になるので

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-k1600}$$

となり，$k = \dfrac{\log 2}{1600}$ となる．t 年後には，

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{1600}\log 2} = A_0 e^{\log 2^{-\frac{t}{1600}}} = A_0\, 2^{-\frac{t}{1600}} \qquad (e^{\log x} = x \text{ より})$$

となる．したがって，800 年後のとき $t = 800$ より，

$$A = A_0\, 2^{-\frac{800}{1600}} = A_0\, 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_0$$

である．$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \fallingdotseq 0.707$ より，約 0.707 倍になる．　(解終)

例題 88 ある化合物があって，その量は 1 次反応によって減少する．測定を行って，10 時間後にその量が 10% 減少した．量が半分になるためにかかる時間 (半減期) はいくらか．また初めの量の 10% になるのは何時間後か．

【解答】 初めの化合物の量を A_0 とすると，t 時間後の量は $A = A_0 e^{-kt}$ となる．10 時間後に 10% 減少するので，$t = 10$ のとき $A = 0.9A_0$ となる．よって，$0.9A_0 = e^{-10k} A_0$ から両辺の自然対数をとって，$k = -\dfrac{1}{10}\log 0.9$ となる．よって，t 時間後の量は

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{\frac{t}{10}\log 0.9} \\ &= 0.9^{\frac{t}{10}} A_0 \end{aligned}$$

となる．したがって，半減期 t' は，

$$\frac{1}{2} A_0 = 0.9^{\frac{t'}{10}} A_0$$

より，両辺の自然対数をとって，

$$t' = -\frac{10 \log 2}{\log 0.9} \fallingdotseq -\frac{10 \times 0.693}{-0.105} = 66.0$$

となる．したがって，半減期は 66 時間である．

t'' 時間後に，初めの量の 10% になるとする．$A = 0.1A_0$ より，

$$0.1A_0 = 0.9^{\frac{t''}{10}} A_0 \quad \text{から} \quad t'' = \frac{10 \log 0.1}{\log 0.9} \fallingdotseq \frac{10 \times (-2.303)}{-0.105} = 219.33\ldots$$

よって 219.3 時間後となる．（$\log 0.1 \fallingdotseq -2.303$，$\log 0.9 \fallingdotseq -0.105$，$\log 2 \fallingdotseq 0.693$ を使った）　(解終)

練習問題 65 温度が 20 °C に保たれている部屋に水を置いた．t 分後の水の温度 $u = u(t)$ は，微分方程式

$$u' = -k(u - 20) \quad (k \text{ は正の定数})$$

をみたす．この部屋の 100 °C の湯が，5 分後に 80 °C になったとする．

(1) 10 分後の湯の温度を求めよ．

(2) 湯が 30 °C になるのは何分後か.

14.3　線形微分方程式

定義 14.3.1 (線形微分方程式) $p_1(x)$，$p_2(x)$，...，$p_n(x)$，$q(x)$ を x の連続関数とするとき，微分方程式

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y^{(1)} + p_n(x)y = q(x)$$

を $\boldsymbol{n}$ **階線形微分方程式**という．とくに，$q(x) = 0$ のとき**同次 (斉次) 線形微分方程式**という．

証明は与えないが，次の定理が知られている．

定理 14.3.2 (解の存在性と一意性) 上の n 階線形微分方程式において，$x = a$ における**初期条件**

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

が与えられたとき，解は存在してただ 1 つである．