8　グラフの基本概念

8.1　同じグラフ (グラフの同形)

グラフ G_1 と G_2 が、同じ個数の頂点を持ち、頂点と辺のつながり方が同じ時に、G_1 と G_2 を**同じグラフ**または**同形なグラフ**と言う．図 8.1 の 2 つのグラフは見かけは異なるが同じグラフです.

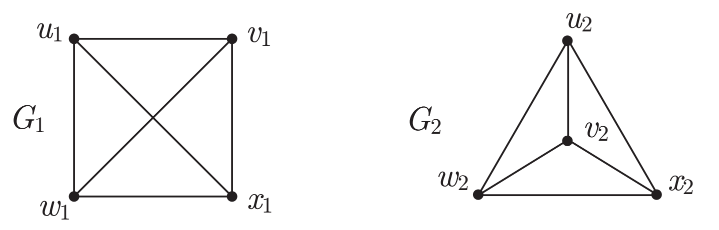


図 8.1: 同じ (同形な) グラフ

図 8.1 の G_1 と G_2 が同じグラフであるのは、G_1 の頂点 $\{u_1, v_1, w_1, x_1\}$ に対して G_2 の頂点 $\{u_2, v_2, w_2, x_2\}$ をこの順序で対応させると辺は (辺を頂点 2 つの対であらわす事にする．u_1v_1 は u_1 と v_1 を結ぶ辺です)

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
u_1v_1 & \leftrightarrow & u_2v_2 & u_1w_1 & \leftrightarrow & u_2w_2 \\
u_1x_1 & \leftrightarrow & u_2x_2 & v_1w_1 & \leftrightarrow & v_2w_2 \\
v_1x_1 & \leftrightarrow & v_2x_2 & w_1x_1 & \leftrightarrow & w_2x_2
\end{array}
$$

のように対応するので同じグラフと言うことができます[19]．幾何的には図 8.2 のように頂点を移動させています．この操作は planarity[20]と言うゲームをした人ならばすぐにわかると思う.

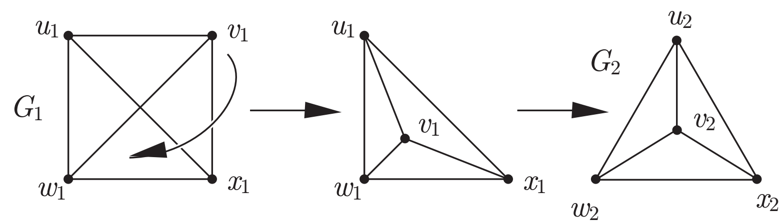


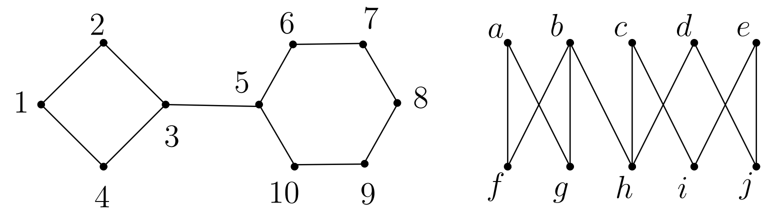
図 8.2: 頂点の移動

[19] ここで、頂点の並び方を見て欲しい．規則的に並べてありますね．物事を考えるときにはこのようにある順序で考えた方が効率が良いのです.

[20] http://planarity.net/

また、同じグラフに対して頂点の個数[21]と辺の個数[22]は一致します.

例題 図 8.3 の 2 つのグラフは同じグラフです.

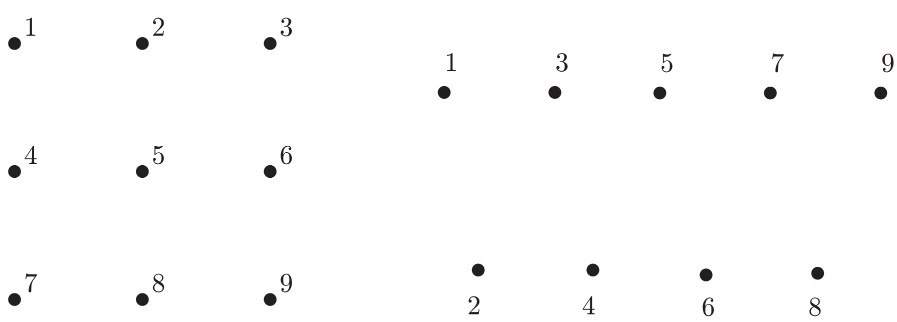


(i)　　　　　　(ii)

図 8.3: 同じグラフの例

(1) (i) のグラフと (ii) のグラフの頂点と辺の集合を求めよ.
(2) 次に頂点の対応を考えよ.
頂点 $1, \cdots, 10$ が 右のグラフの頂点 $a, b, \cdots, j$ のどれに対応しているか？
(3) 上の頂点の対応で辺もうまく対応している事を確めよ.

この様に、グラフが与えられれば頂点と辺の集合が得られる．逆に、頂点の集合と辺の集合が与えられれば、グラフを復元できる．コンピューターにグラフのデーターを入れるときなどに使われる.



(i)　　　　　　(ii)

図 8.4: 同じグラフを描こう

練習 頂点 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$、辺 $\{12, 23, 14, 25, 36, 45, 56, 47, 58, 69, 78, 89\}$ を持つグラフを描きたい．頂点が描かれている図 8.4(i) と (ii) の各々に辺を書き入れなさい．ただし、辺 ij は頂点 i と j を結ぶ.

[21]グラフの頂点の個数を**位数**と言います.
[22]グラフの辺の個数をグラフの**サイズ**と言います.

図 8.4 でもわかるように、同じグラフでも頂点の配置により見かけはかなり異なる.

レポート 18 図 8.5 の 3 つのグラフが同じグラフであることを示せ.

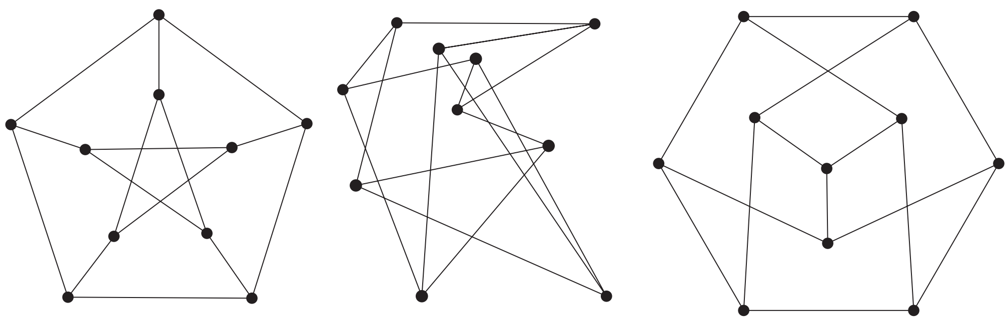


図 8.5: さまざまなペテルセン・グラフ

レポート 19 カタカナをグラフでできているものとして (端点と交差点を頂点とみなす. 単に折れ曲がっているところは頂点とはみなさない.) グラフの同形で分類せよ.

8.2 グラフの頂点の個数と辺の個数

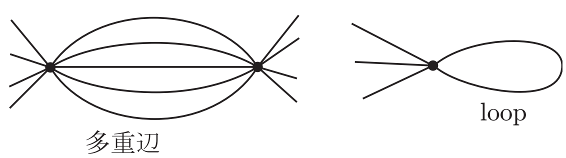


図 8.6: 多重辺とループ

図 8.6 に図示してあるように二つの頂点を二本以上の辺でつなぐ辺を**多重辺**と言い、両端の頂点が一致する辺を**ループ**と言う.

図 8.7 は、多重辺とループを含まない頂点の個数が 3 のグラフをすべて表しています. ただし、120 度の回転で移るグラフは同じグラフと考えている.

また、図 8.7 の右 2 つのグラフを連結なグラフといい、左 2 つを非連結なグラフと言う. すなわち、連結なグラフとはどの二つの頂点も辺をたどっていく事で結ぶ事のできるグラフです.

問題 頂点の個数が 4 のグラフをすべて求めて図 8.8 に描け. (連結でないものも考える.)

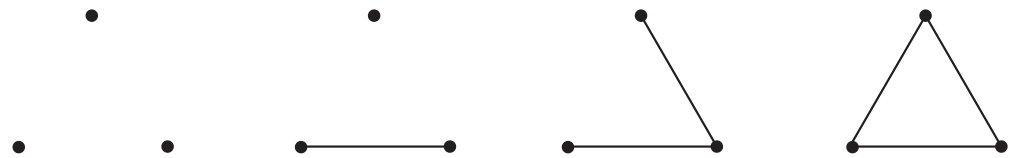


図 8.7: 頂点の個数が 3 のグラフ

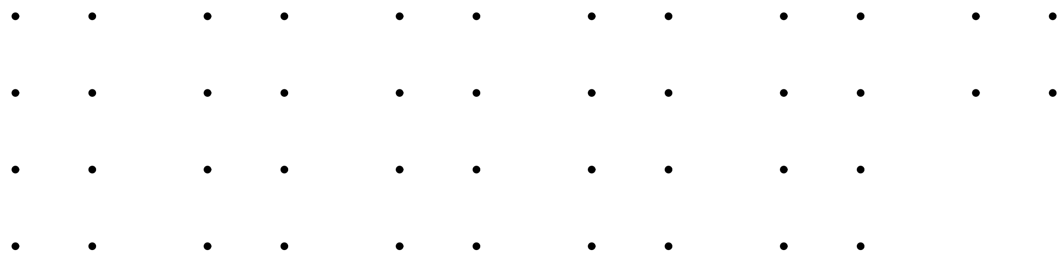


図 8.8: 頂点の個数が 4 のグラフ

レポート 20 マッチ棒の頭とお尻をグラフの頂点と思う事にしよう．図 8.9 で示されているように、マッチ棒一本と二本の時の連結なグラフは 1 つで三本のときは 3 個、そして四本の時は 5 個です.

では、五本と六本の時ではそれぞれ何個作る事ができますか？ただし、マッチ棒は立体的に作成してよい．ここでは、マッチ棒の本数がグラフの辺の本数になっている事がわかります.

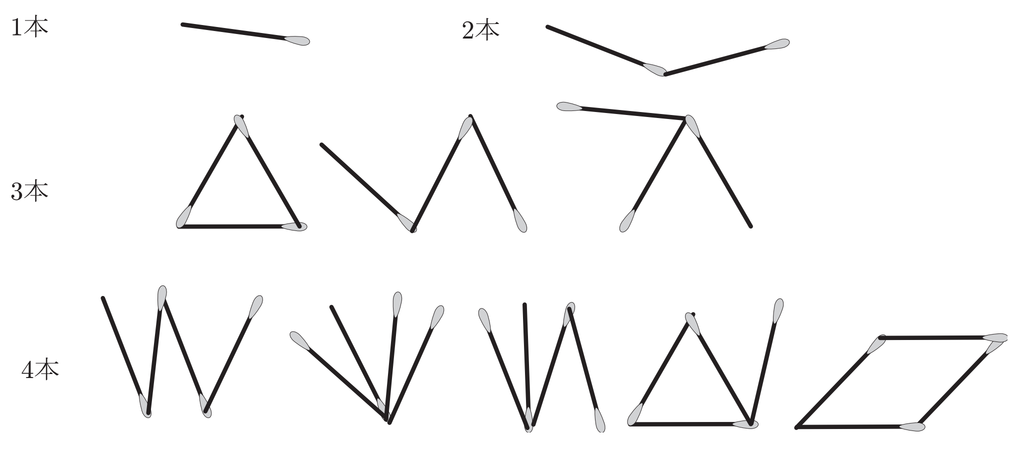


図 8.9: マッチ棒のグラフ

8.3　頂点に集まる辺の本数

この節ではグラフの頂点の個数と辺の本数を考えよう.

問題 図 8.10 のグラフの頂点の個数と辺の本数を下の表に書き込め.

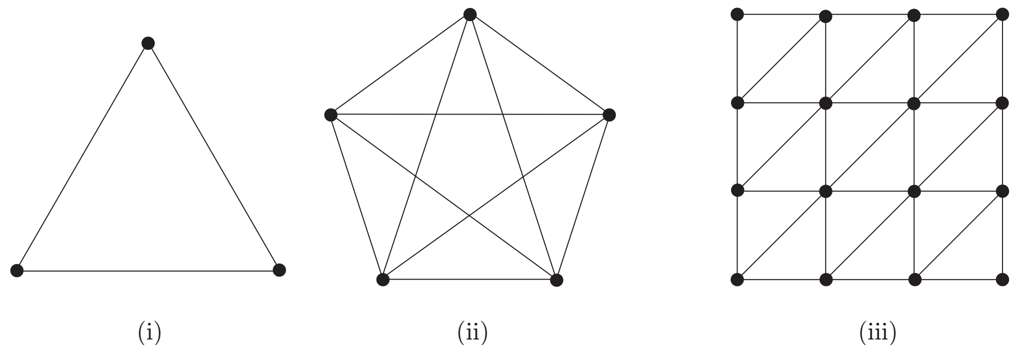


図 8.10: グラフの頂点の個数と辺の本数

図 8.10 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)
頂点の個数			
辺の本数			

図 8.11 のグラフ G を見てみよう．頂点の所に数字が書いてあります．何を意味しているのか考えよう.

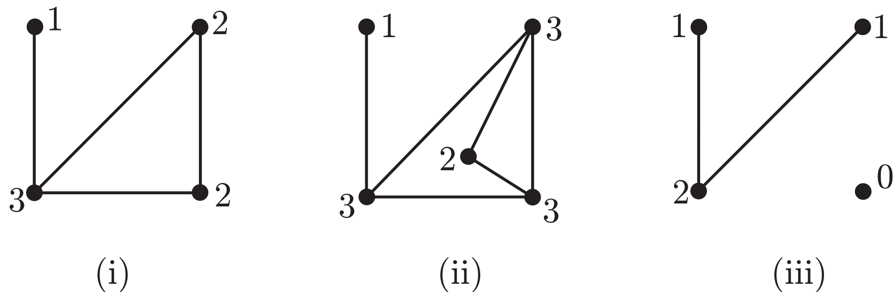


図 8.11: グラフとある数

これは、グラフの頂点に集まる辺の本数[23]だと言うことがわかります．一筆書きの時に考えました.

練習 図 8.10 のグラフについて，頂点に集まる辺の本数を求めよ.

[23] これを頂点の**次数**と言う.

つぎにグラフの辺の個数を計算してみましょう．頂点に集まる辺の本数との間にはなにか関係がないか考えてみてください．

図 8.10 の 3 つのグラフに対してつぎの表を埋めなさい．

図 8.10 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)
グラフの辺の本数			
頂点に集まる辺の本数の総和			

上の表からわかるように次のことがいえます．

補題 8.3.1 (握手の補題) 頂点に集まる辺の本数の総和はグラフの辺の本数の二倍になる．

これは、図 8.12 のように辺が両端に手が付いている腕で頂点のところで手が握手している状態だと思うと、辺の数は腕の数で、頂点に集まる辺の本数の総和は手の個数になります．腕一本に対して、手は二つあるのでこの補題が得られます．

図 8.12: 握手の補題

練習 図 8.11 のグラフで握手の補題が成り立つ事を確かめよ．また、マッチ棒で作ったグラフに対しても確めよ．

図 8.11 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)
グラフの辺の本数			
頂点に集まる辺の本数の総和			

簡単な補題ですが、さまざまな所で使います．

グラフ G において、すべての頂点に集まる辺の本数が r であるとき G を r-**正規グラフ** (r-**regular graph**)[24] という．正規グラフは頂点に集まる辺の本数が一定なので綺麗な形になるものが多い．例えば、自動車のアウディやメルセデス・ベンツのエンブレム、オリンピックの五輪などである．図 8.13 は 3-正規と 4-正規グラフの例である．

[24]なるべく数学用語を使わないようにしてきたが、これくらいは大丈夫だろう．

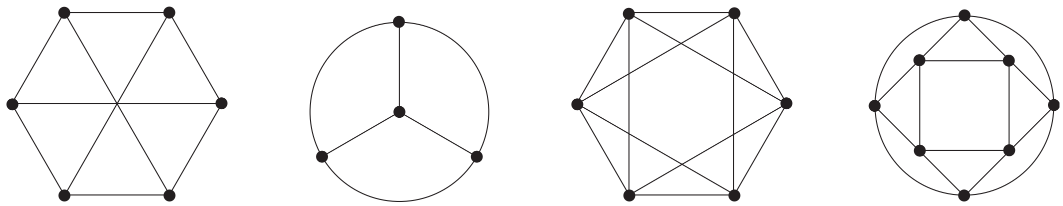


図 8.13: 正規グラフの例

レポート 21 2-正規グラフ、3-正規グラフ、4-正規グラフ、5-正規グラフをたくさん作れ.

問題 頂点の個数が 5 の 3-正規グラフは作ることができるか.

頂点の個数が 5 の 3-正規グラフは存在しない事が次の系からわかります.

系 8.3.1 グラフで、頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点は偶数個ある.

握手の補題から、頂点に集まる辺の本数の総和は辺の本数の二倍なので偶数になります. したがって、頂点に集まる辺の本数が奇数の頂点は偶数個あることになります. これは、偶数足す偶数は偶数、奇数足す奇数は偶数、偶数足す奇数は奇数を使っています[25].

練習 (1) 2.2 節で出てきたグラフに対して頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点の個数は偶数である事を確めよ.
(2) 頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点をもつグラフを 3 つ描き，それらの頂点に集まる辺の本数が奇数の頂点が偶数であることを確かめよ

完全グラフと言う正規グラフを考える. **完全グラフ**とはどの二つの頂点も一本の辺で結ばれているようなグラフである. 頂点の個数が n のとき K_n で表わす. この K はポーランドの数学者クラトウスキー (Kuratowski) の頭文字です.
図 8.14 に K_1 から K_5 までを描いておく. (K_4 だけ描き方を変えています.)

練習 完全グラフ K_6, K_7, K_8 を描け.

問題 完全グラフ K_n の頂点の個数と辺の本数を求めよ.

問題 コンピュータができる学生は K_n を作図するプログラムを作れ.

[25] (1) 握手の補題から頂点に集まる辺の本数の総和は偶数である. (2) 頂点には偶数本辺が集まるものと、奇数本集まるものがある. (3) 偶数本集まる頂点の辺の本数の総和は常に偶数である. (4) 奇数本集まる頂点の個数が奇数ならば総和は奇数になり、偶数ならば総和は偶数になる. (5) したがって、奇数本集まる頂点の個数は偶数個になる.

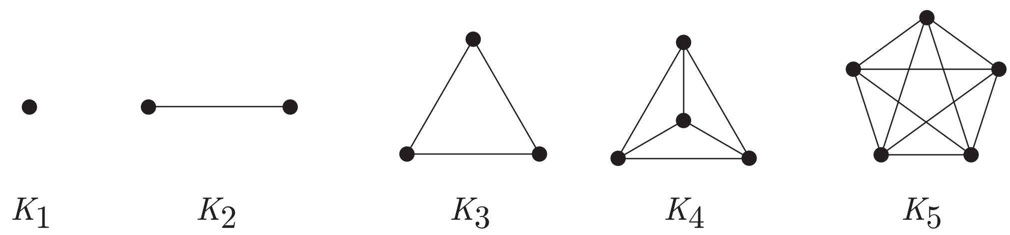


図 8.14: 完全グラフ

8.4 部分グラフ (subgraph)

グラフ G に含まれるグラフを G の**部分グラフ**という.

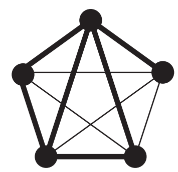


図 8.15: 部分グラフ

図 8.15 の太線のグラフは G の部分グラフになっています．便宜的になにもない集合 (空集合) と G も G の部分グラフと考えることがあります.

K_3 の部分グラフ 図 8.16 は K_3 のすべての部分グラフを表しています.

部分グラフで考えている例としては、図 8.17 で神戸から東京に行くルートを考える場合も、部分グラフを考えています.

問題 図 8.18 のグラフに対して連結な部分グラフをすべて求めよ．連結でない場合は、部分グラフの個数がかなり多くなる.

8.5 五角形

この授業ではたまに五角形がでてくる．綺麗に描くのにはどうすれば良いのでしょう？コンパスと定規だけで描くことができます．正三角形、正方形、正六角形も作図可能です．さらにもう少し角を増やして、正十七角形も作図可能です．しかし、正七角形、正九角形は作図（コンパスと定規だけでは）できません．特別な製図道具かコンピュータを使えば可能ですが.

レポート 22 正三角形、正方形、正五角形、正六角形をコンパスと定規で作図する方法を調べて作図せよ.

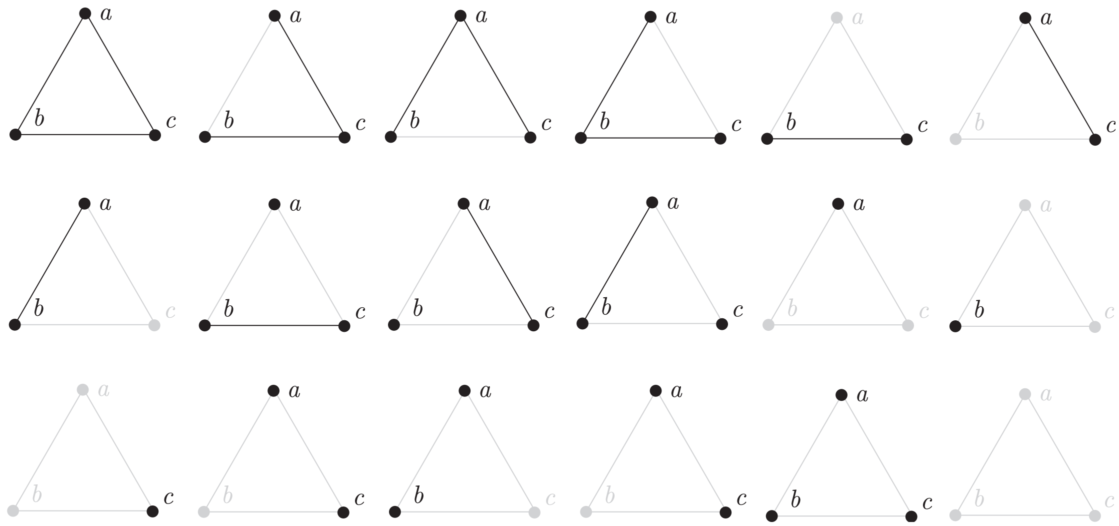


図 8.16: K_3 の部分グラフ

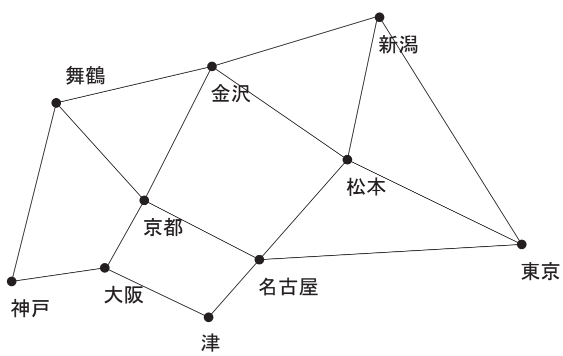
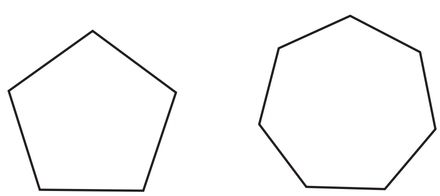


図 8.17: 地図の部分グラフ



正五角形と正七角形

正五角形と正七角形を描いてみました．変わった方法として折り紙で正五角形の作り方があります．正十七角形と正十九角形をがんばって描いてみました．あまり小さいと円と区別つかなくなります．

正多角形はたくさんありますが，正多面体は有限個しかありません．

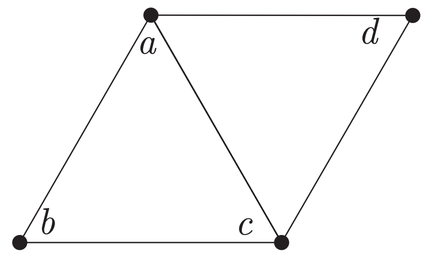


図 8.18: 連結な部分グラフを求めよ

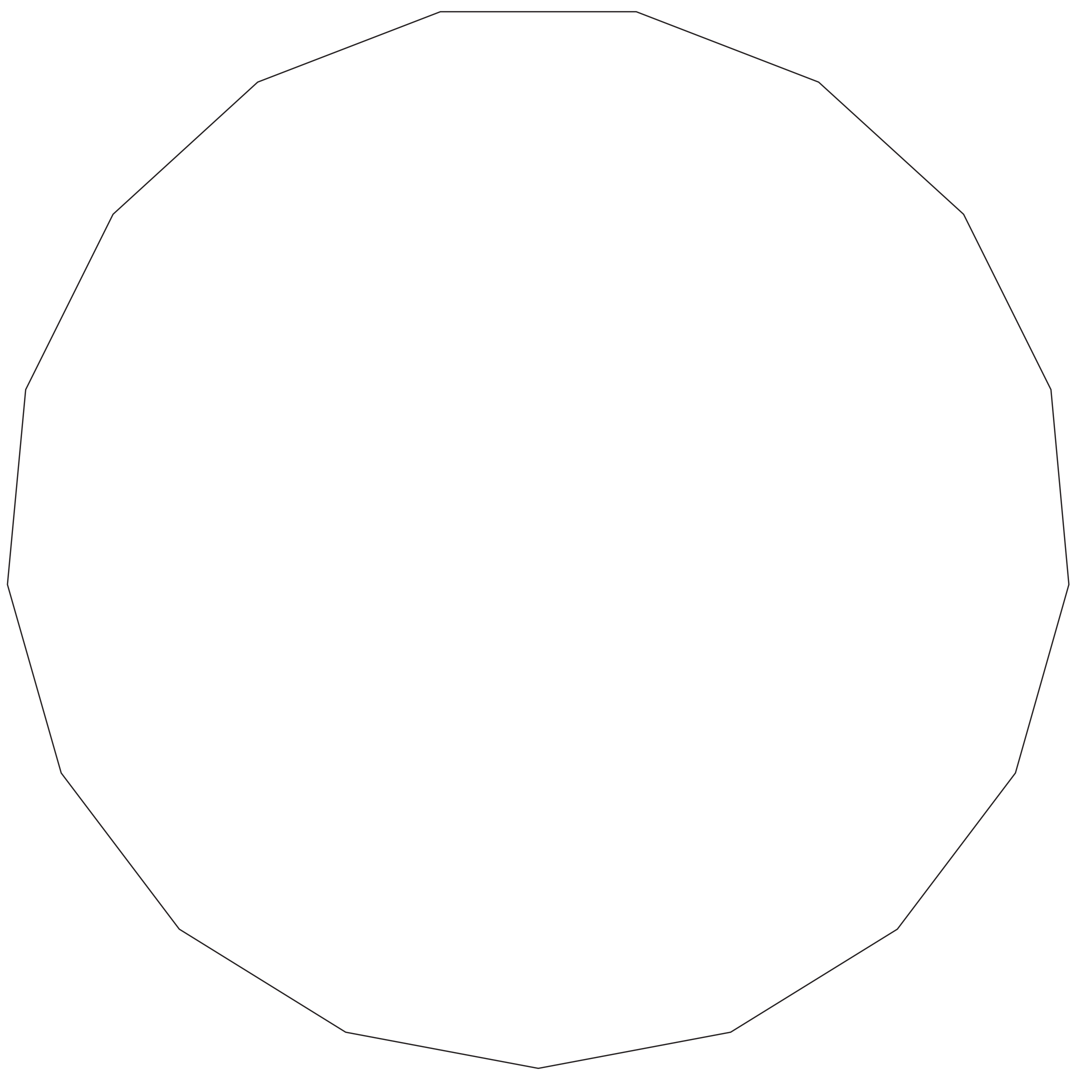


図 8.19: 正十七角形

レポート 23 「多面体の折紙—正多面体・準正多面体およびその双対」川村 みゆき (著) 単行本日本評論社 に正多面体を折り紙で作成する方法が載っています．作成してください．

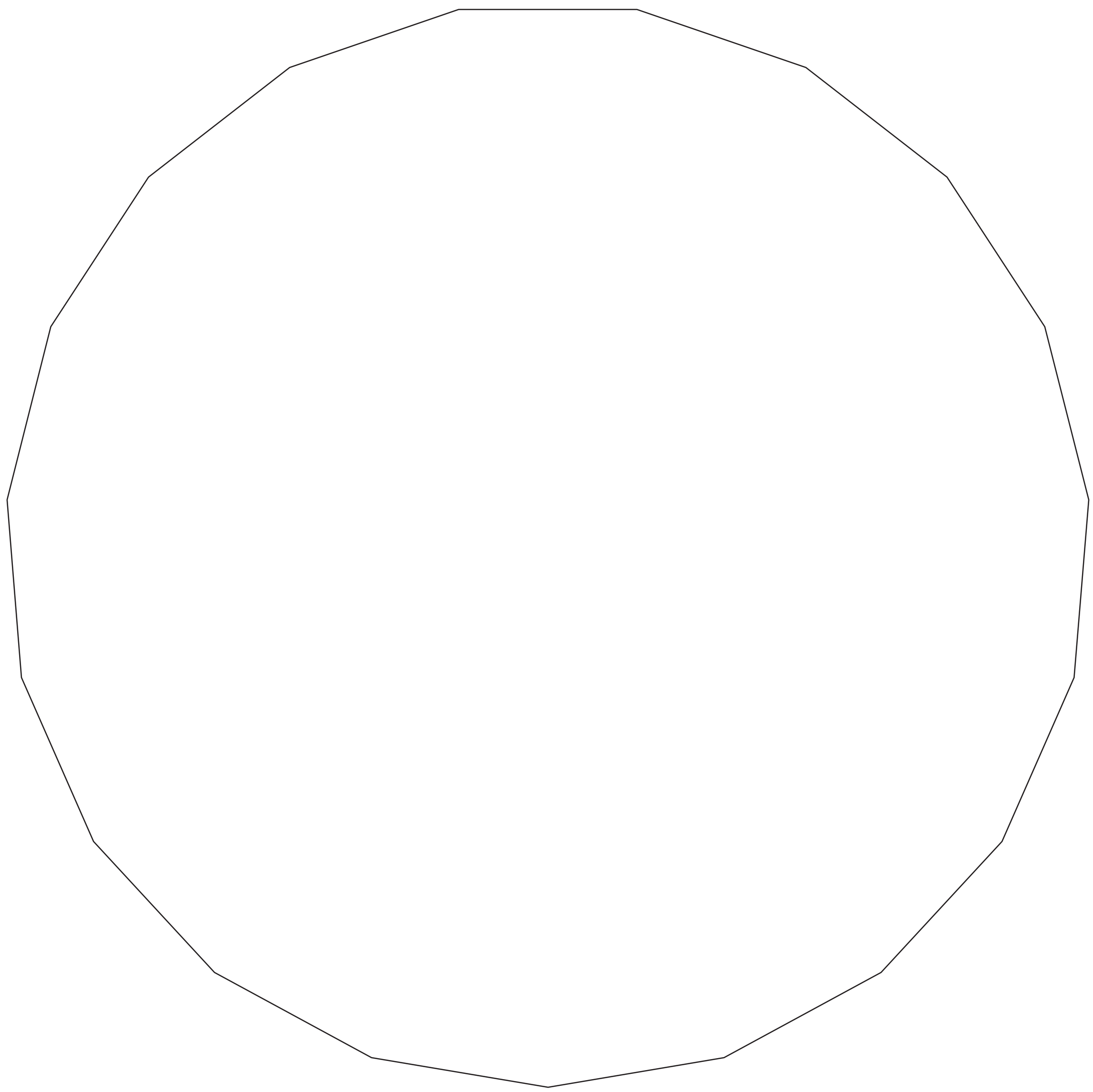


図 8.20: 正十九角形