

7 貨車の入れ替えクイズ

7.1 貨車の入れ替え 1.

[クイズ]¹⁵ 貨車を入れ換える装置に図 7.1 のような転車台があります．図 7.2 のように、中央のターンテーブルに貨車を 2 台乗せ、テーブルを 180 度回転させるとこの 2 台の貨車の順番を入れ換える事ができます．機関車と貨車 A, B, C, D があります． D には火薬をつんでいるので機関車のすぐあとにはつなげる事ができません． $ADBC$ の順番に並んでいる貨車を、転車台を使って $CBDA$ にする事はできますか？また、できるとすればどのような手順が一番効率が良いでしょうか？

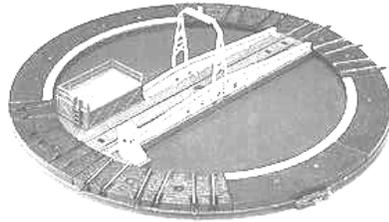


図 7.1: 転車台

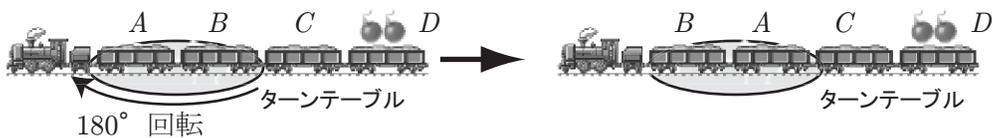


図 7.2: ターンテーブルを使って

この問題をグラフ理論を使って解いてみよう．

頂点の集合 V を貨車の並び方で定義しよう． $\{A, B, C, D\}$ の並べ方で D は先頭に置くことができないので

$$V = \{(ABCD), (ABDC), (ACBD), (ACDB), (ADBC), (ADCB), \\ (BACD), (BADC), (BCAD), (BCDA), (BDAC), (BDCA), \\ (CABD), (CADB), (CBAD), (CBDA), (CDAB), (CDBA)\}$$

となります¹⁶．

¹⁵ 本間龍雄 グラフ理論入門 講談社ブルーバックスより改題．

¹⁶ 規則正しく A, B, C, D が並んでいる事に注意．

一回ターンテーブルを使うことで移りあうことのできる頂点を辺で結びます。たとえば 頂点 $ABCD$ に対して AB をターンテーブルにのせて回転させると頂点 $BACD$ になる。このとき頂点 $ABCD$ と頂点 $BACD$ を次のように辺で結ぶ。



これらの情報からグラフを作成しよう。作成をする上で大事な事は、ある規則を作りその規則でグラフを作成することです。ここでは、一つの頂点に注目して、その隣の頂点を調べていくという規則でグラフを作成することにします。

- (1) 初めに、頂点 $ABCD$ と 1 本の辺でつながっている頂点をすべて考える。
- (2) $ABDC$ 、 $ACBD$ 、 $BADC$ の 3 個の頂点が辺でつながる。
- (3) したがって、頂点 $ABCD$ のまわりは図 7.3(i) のようになる。
- (4) 同様に頂点 $ABDC$ のまわりを考えると (ii) のようになる。
- (5) 頂点 $ADCB$ のまわりは、 D は機関車の後ろにつなぐ事ができないので (iii) のようになる。
- (6) 頂点 $ADCB$ の周りも、 D の条件から (iv) のようになる。
- (7) 頂点 $ACDB$ と頂点 $ACBD$ のまわりは (v) のようになる。

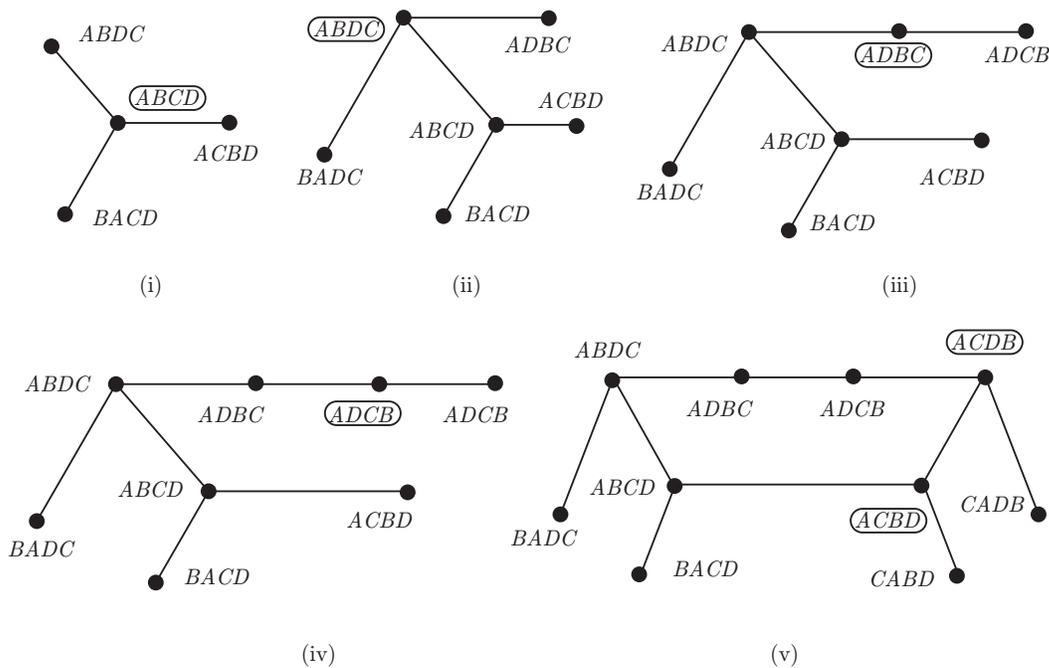


図 7.3: 貨車の入れ換えのグラフの作成

この様に考えていけば A で始まる頂点すべてを考えると考える事ができます。同様にして B と C で始まる頂点を考える事で図 7.4 を完成させましょう。

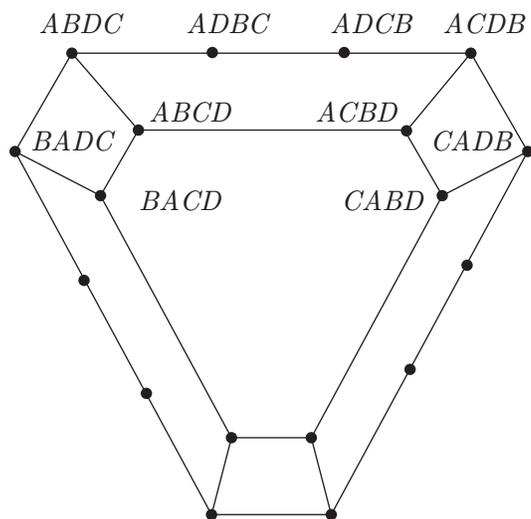


図 7.4: 貨車の入れ換えのグラフ

したがって、 $ADBC$ の順番に並んでいる貨車を、転車台を使って $CBDA$ にする事は頂点 $ADBC$ から頂点 $CBDA$ まで辺に沿った転車台の使い方で並べ替える事ができます。また、最短の手順は辺の数が最短になるようにすれば良い事がわかります。

7.2 貨車の入れ替え 2

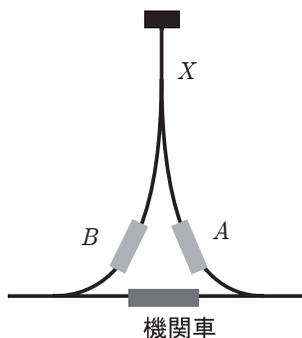


図 7.5: 貨車の入れ換え 2

[クイズ]¹⁷ 図 7.5 のような線路上に貨車 A と B がある。 X の場所には貨車を入れて左右どちらにも出せるが機関車は大きいので入れることができない。また、貨車を 2 台以上入れることが出来ない。また、機関車は貨車を前後に押し引き

¹⁷ 推理パズル 藤村孝三郎 河出文庫 より改題

たりできる．このとき、貨車 A と B を入れ換えて機関車をもとにもどすのにはどうすれば良いか．グラフを使って考えなさい．

初めは普通に考えてください．学生を見ていると、ノートに線路を書き消しゴムとかペンのキャップなどを貨車だとか機関車に見立てて考えている学生がいます．君達はどんな工夫をしましたか？

この場合の解答は次のようなものでしょう．

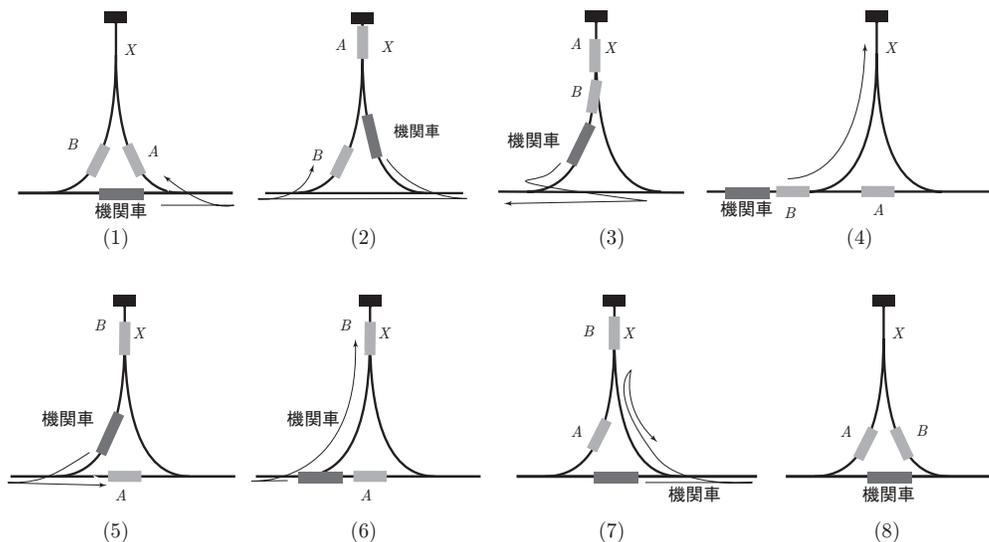


図 7.6: 貨車の入れ替えの答え

解答

- (1) 機関車を右の方に移動し貨車 A を X に入れる．
- (2) 機関車を一度戻してから左の方に行き貨車 B を X まで移動する．
- (3) 機関車を使って B と A と繋げる．
- (4) A と B を引き出して A を機関車があった所に置く．
- (5) B を X に入れる．
- (6) 機関車を使い A を B が在った所に移動する．
- (7) 機関車を右側に移動し B を A のあったところに移動する．
- (8) 機関車をはじめの位置に戻す．

図 7.6 のような操作がイメージができあがれば大丈夫です．

次に、グラフ理論なので前のクイズのようにグラフを使って解きたい．頂点と辺に何を対応させれば良いでしょうか？

頂点 頂点は機関車と貨車 A 、 B の状態を対応させます．そこで、どれくらい異なる状態があるか考えます．図 7.7 の 2 つの状態は同じとみなした方が良いですか、

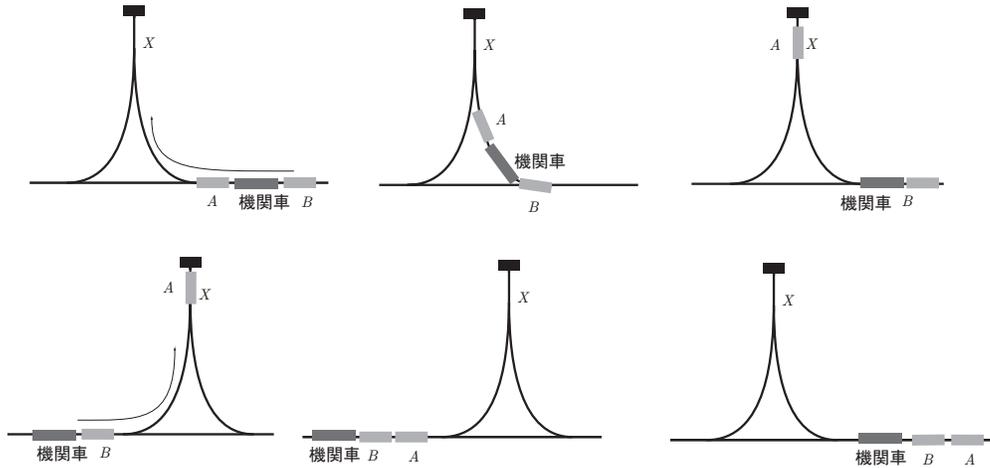


図 7.9: 貨車の入れ換え

操作 2 この操作はポイントを使って行います。(AB 機関車)を図 7.10 のようにポイントを使って (BA 機関車) にします。同様に、左側のポイントを使うことにより (機関車 AB) を (機関車 BA) にできます。

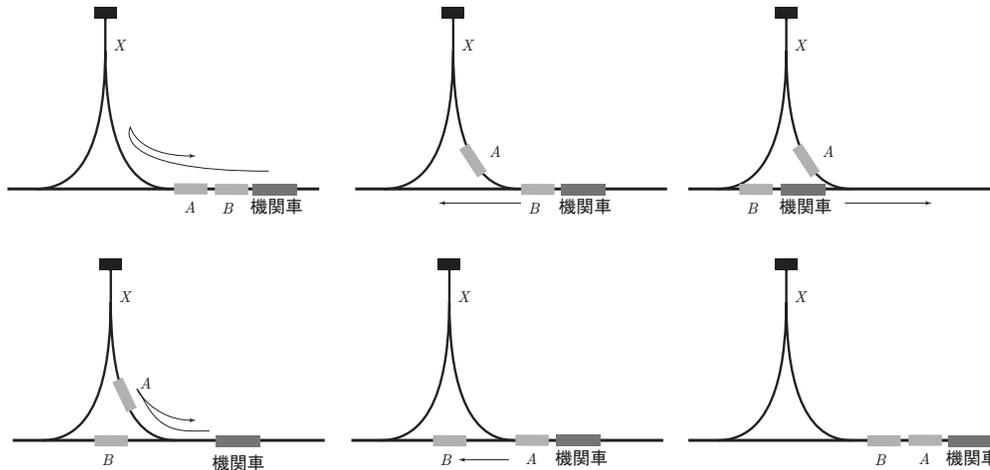


図 7.10: 貨車の入れ換え

各頂点に対して、上の 2 つの操作で移りあう頂点を考えます。

問 図 7.11 に辺を描き込みグラフを完成させなさい。

(A 機関車 B) の状態から (B 機関車 A) の状態に変えればよいので、それらの頂点を辺で結ぶ操作で辺の個数が最小の行き方がこのクイズの解答になります。

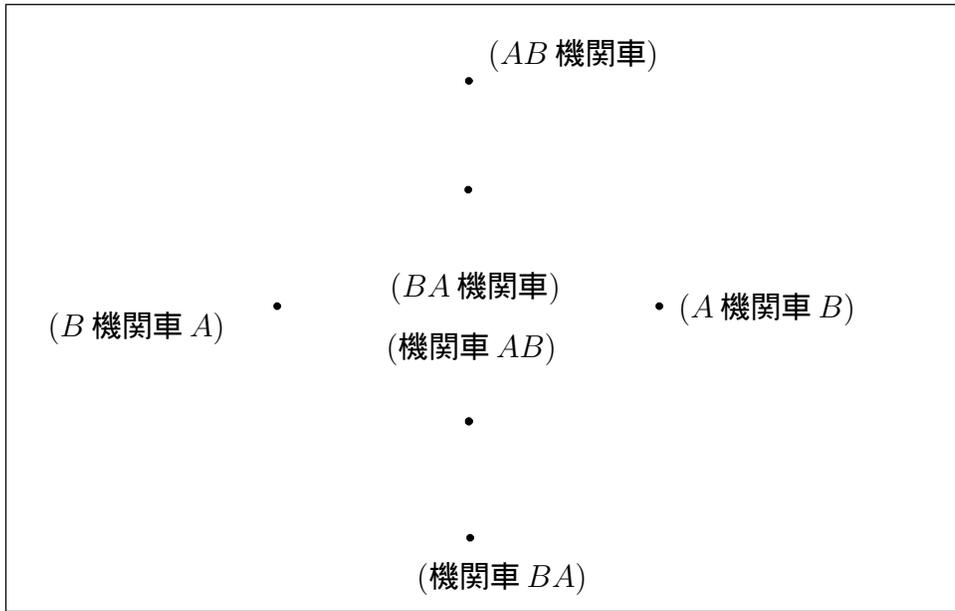


図 7.11: 頂点だけのグラフ

レポート 16 図 7.12 の線路上に貨車 A と B がある。トンネルの長さは貨車の長さと同じで一方から入れて他方から引き出すことができる。ただし機関車は大きいのでこのトンネルを通り抜ける事ができない。貨車 A と B を入れ換えて機関車を元に戻すにはどうすれば良いでしょうか。グラフを使って考えなさい。



図 7.12: 貨車の入れ換え (トンネル編 1)

レポート 17 また、図 7.13 の線路上に貨車 A と B がある。トンネルの長さは貨車の長さと同じで一方から入れて他方から引き出すことができる。ただし機関車は大きいのでこのトンネルを通り抜ける事ができない。貨車 A と B を入れ換えて機関車を元に戻すにはどうすれば良いでしょうか。グラフを使って考えなさい。

7.3 同値類

機関車のクイズは、たくさん場合わけがある機関車と貨車の位置を全部つなげてある場所に持ってくることにより 6 個の場合にすることにより解くことができ

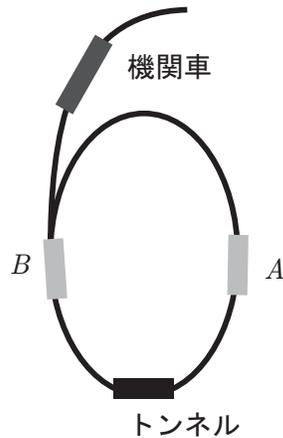


図 7.13: 貨車の入れ換え (トンネル編 2)

た．この様に、たくさんある状態を分類していくつかの状態に分類すれば考え方が簡単になる場合があります．このように分類する事を同値類で分類すると言います．

同値類で考える方が楽な事がたくさんあります．たとえば、学校の時間割も同値類で考えています．曜日で分類しているのです．もし曜日で分類しなければ毎日時間割を作成しないといけなくなって大変です．

日常生活でも同値類を良く使っています！林檎 2 個と林檎 5 個がありました．全部でいくつになりますか？」と言う問題を考えます．頭の中で「 $2+5=7$ 」を計算します．同じ事をみかんでしてみましょう．この場合も頭の中で「 $2+5=7$ 」を計算します．みかん 1 個、林檎 1 個、原子 1 個、惑星 1 個などのように大きさ形に関係なくすべて 1 つだけあるので同じものだと考えています．だから、原子 1 個と 5 個でも惑星 1 個と 5 個でも「 $1+5=6$ 」の計算をすれば良い事になります．

複雑な状態を考える場合には、分類の仕方をちょっと変えると簡単になり考えやすくなる場合があります．

安野光雅¹⁸の絵本で同値類について扱った「なかまはずれ」と言うものがあります．これは、「はじめてであうすうがくの絵本 1」(福音館書店)の中に収められています．このシリーズの本は数学を教える上で色々ためになるので、興味のある学生は一度読んでみてください．

¹⁸津和野出身で、風景、絵本、エッセーなど幅広い分野で活躍する画家．なぜか数学に造詣が深く、数学セミナーに連載していたりする．中には、変わった絵や不思議な絵を描く画家とされている人もいたりする．