6　彩色グラフ

6.1　グラフに色を塗って

頂点から出ている辺の本数が 1 の頂点 ——● を持たない平面上の (辺と辺が交差しない[7]) グラフを考えます．このとき見やすいように面に色を塗りたい．

面を区別できるように、辺で隣り合う面は異なる色で塗ることにします．しかし、面が頂点だけで接していれば区別できるので同じ色で塗っても良いことにします．たとえば図 6.1 の様に塗ります．この様にグラフの面に色を塗ることを**彩色**と言います．

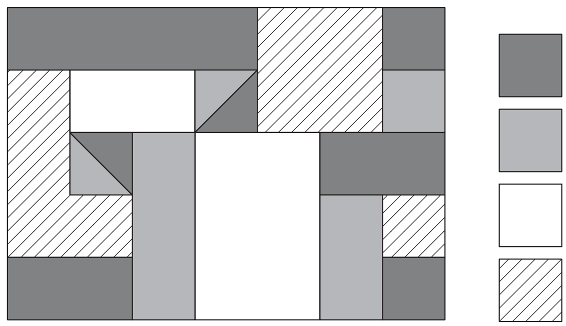


図 6.1: グラフの塗り分け

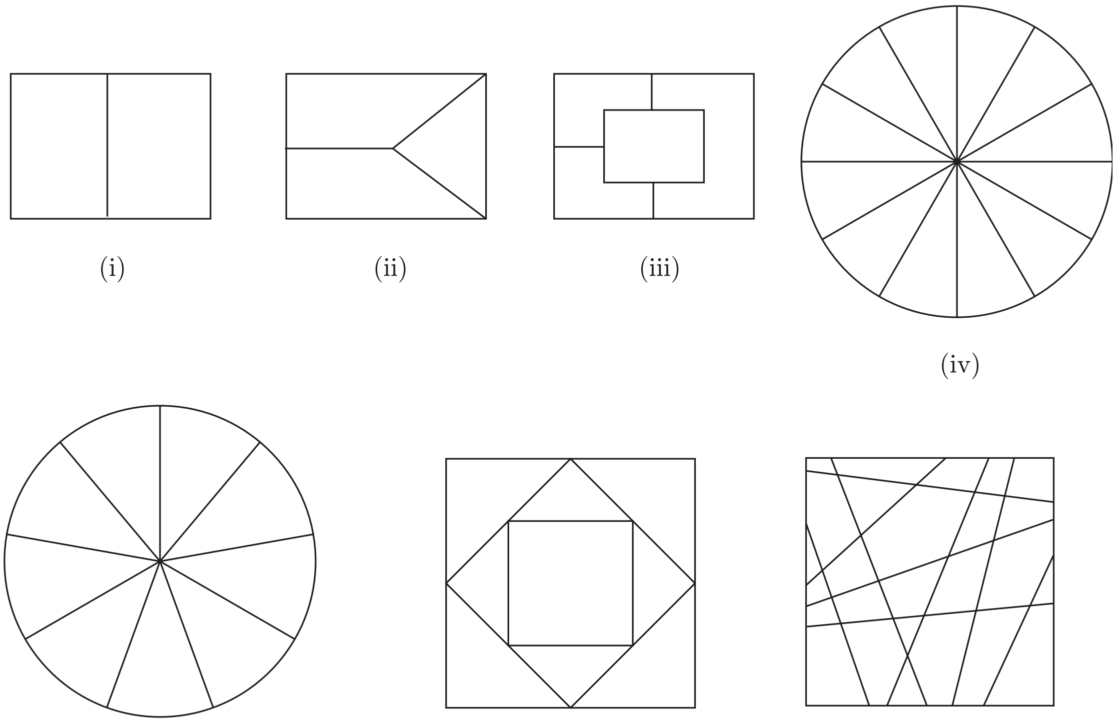
何色必要か 平面上にあるグラフが与えられた時、彩色するためには何色必要でしょうか？面の数だけ色を用意しておけばすべての面を異なる色で彩色できます．しかし，色が多すぎて経済的ではありません．

そこでグラフが与えられた時に、彩色するために必要な色の最小数を考えます．

[**考えましょう**]
以下を満たすグラフをノートに描きましょう．
(1) 2 色必要なグラフを考えましょう．
(2) 3 色必要なグラフを考えましょう．
(3) 4 色必要なグラフを考えましょう．
(4) 5 色ではどうでしょうか．

考察 図 6.2 のグラフを彩色してみよう．
(i) のグラフは 2 色必要です．
(ii) のグラフは 3 色必要です．
(iii) のグラフは 4 色必要です．

[7]厳密に言えば「辺と辺が交わるならば頂点のみ」と言わなければなりません．



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii)

図 6.2: 色を塗ってみよう

これらのグラフは、実際に色を塗ってみれば何色必要か理解できると思います.残りのグラフは、複雑なグラフなので色の数はもっと必要でしょうか？実は (v) を除き 2 色で色を塗ることができます．そして、(v) は 3 色で彩色できます.

それでは、5 色必要なグラフはどのようなグラフでしょうか？

実は「**どんな平面上のグラフも 4 色あれば彩色可能である**」と言うことが示されています．これは 4 色問題と呼ばれ 1976 年にアペルとハーケンによりスーパーコンピューターを 1,200 時間ほど使う事により証明されました.

練習 図 6.3 のグラフに対して 4 色で塗ってみよう．失敗しても良いように図 6.3 に同じグラフを 9 個準備してあります．しかし、失敗した場合は、なぜ失敗したのかを考えないといけません．なぜ失敗したかを良く考えてから新しいグラフに挑戦しましょう.

グラフを 4 色で塗る簡単な方法はまだ見つかっていません．したがって、与えられたグラフを 4 色で塗るときには、すこし、試行錯誤をしないといけないかもしれません.

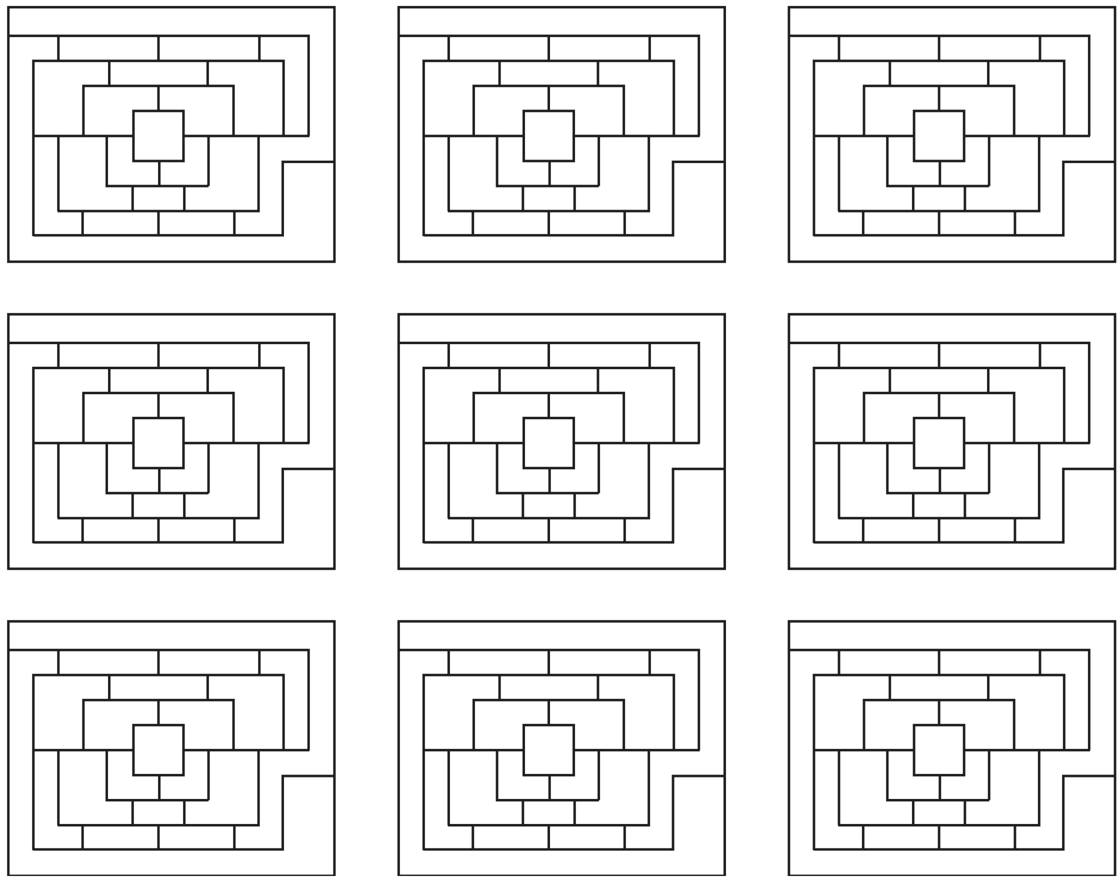


図 6.3: 4 色で塗り分け

練習 図 6.4 のグラフに対して 4 色で彩色しなさい．簡単なアルゴリズムはありませんが、色を塗るときに考えながら 4 色で彩色できるようにしましょう．

5 色使って良い場合にはアルフレッド・ブレイ・ケンプの論理を改良した簡単なアルゴリズムが知られています[8]．

4 色問題は、地図の色塗りの問題から派生してきました．印刷業者は経験則として 4 色あれば十分だとわかっていたみたいです．少し複雑なグラフで考えてもらいたいので図 6.5 の東北 6 県の地図[9]をグラフとみなして 4 色で塗ってください．

レポート 11 図 6.5 の中からひとつの県を選び 4 色で彩色しなさい．(レポートには見やすいように拡大コピーして下さい．) または、各自で好きな都道府県の白地図を用意して 4 色で彩色しなさい．

[8]グラフ理論 ：R. ディーステル著 根上生也・太田克弘訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 p.123

[9]最近の市町村合併には対応していません．

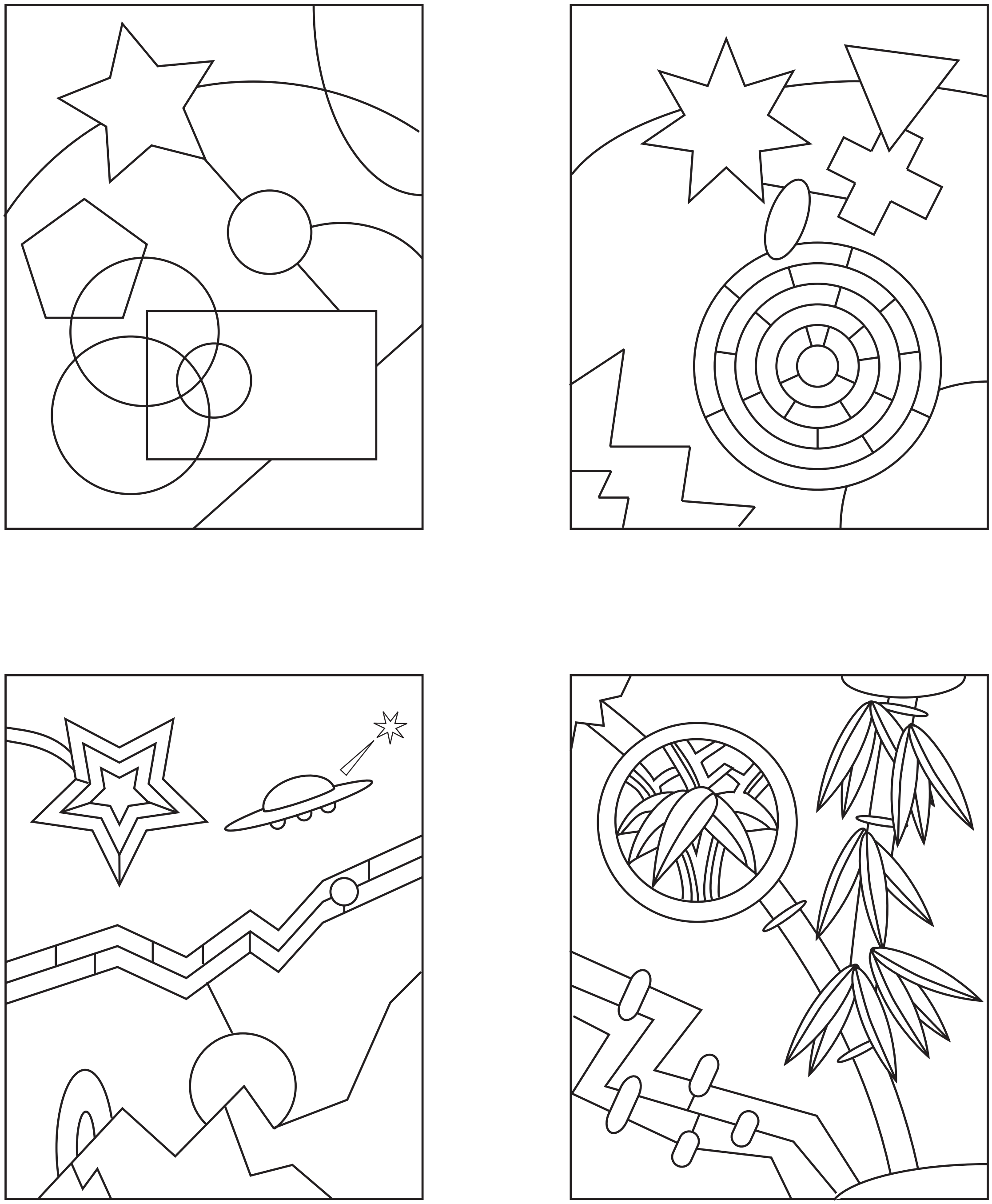


図 6.4: 4 色問題

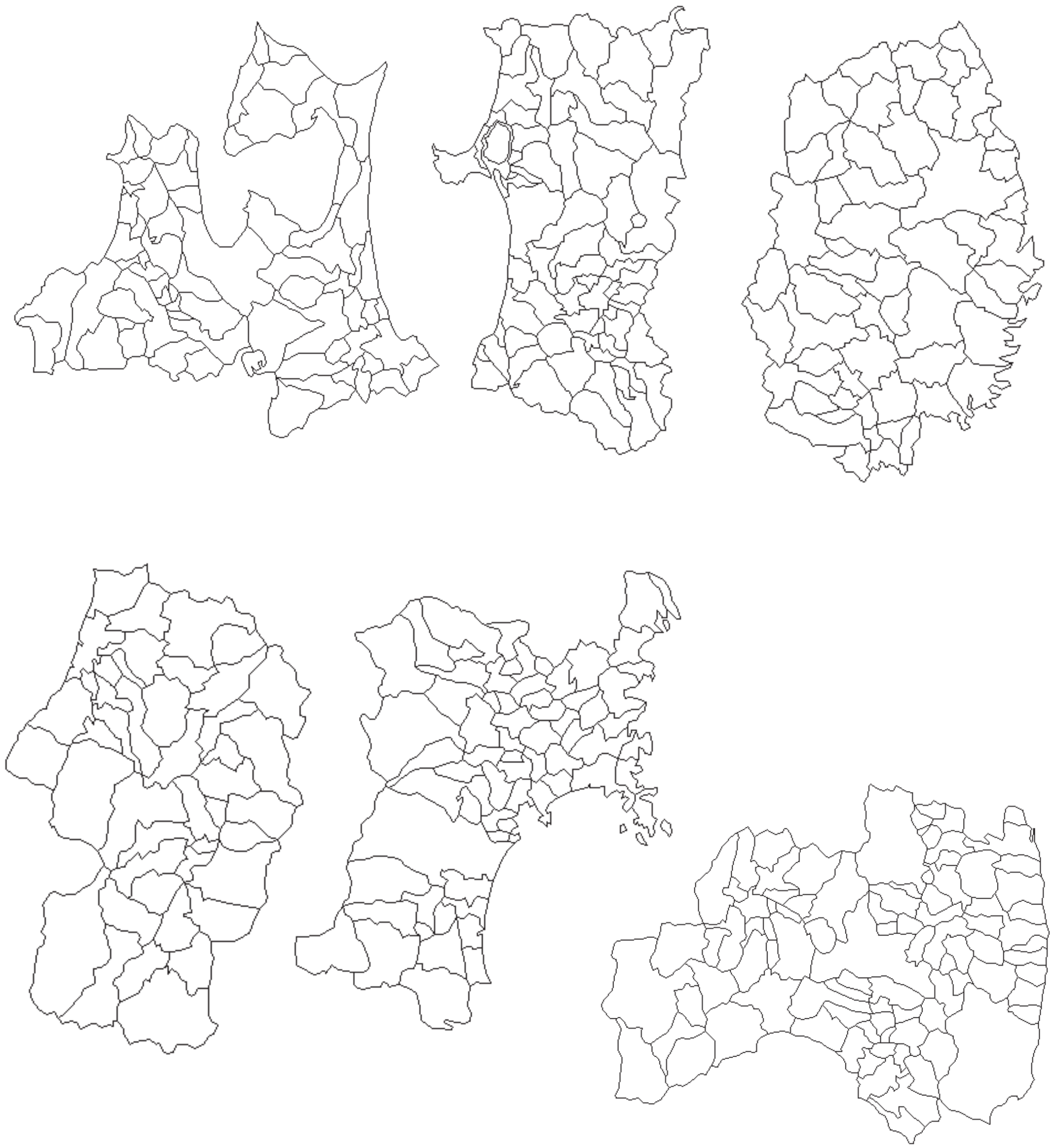
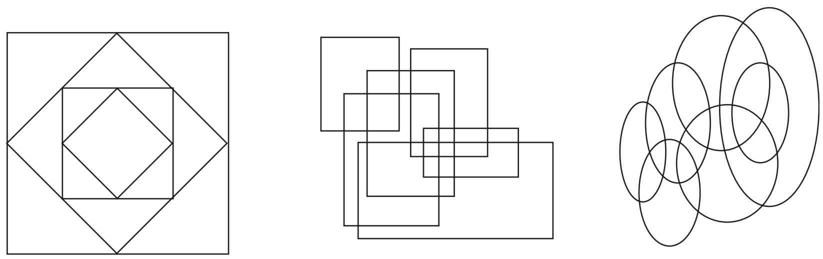


図 6.5: グラフに色を塗って

6.2　2色塗りと一筆書きのグラフ

平面上のグラフに対して 4 色あれば，色塗りが可能だということがわかりました．それでは，3 色あれば色塗りが可能だというグラフとは，どのようなものでしょうか？また，2 色あれば可能なグラフとはどのようなグラフでしょうか？ここでは、簡単のために 2 色あれば彩色できるグラフを考えます.

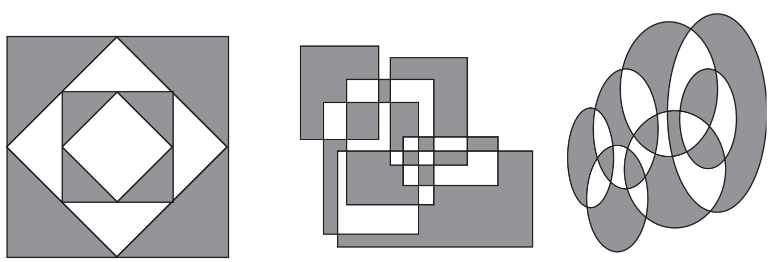
問題 図 6.6 のグラフを 2 色で彩色できるでしょうか.



(i)　(ii)　(iii)

図 6.6: 2 色あれば十分なグラフか？

図 6.7 は 2 色で彩色したグラフですが，この 2 つのグラフを見てどのような性質を持つグラフか考えて下さい.



(i)　(ii)　(iii)

図 6.7: 2 色で彩色されたグラフ

2 色で彩色可能なグラフが連結ならば，このグラフは一筆書きできるグラフで，始点と終点が一致します．逆に一筆書きできるグラフで始点と終点が一致するグラフは 2 色で彩色可能です.

練習 図 6.8 のグラフのグラフを 2 色で彩色して下さい.

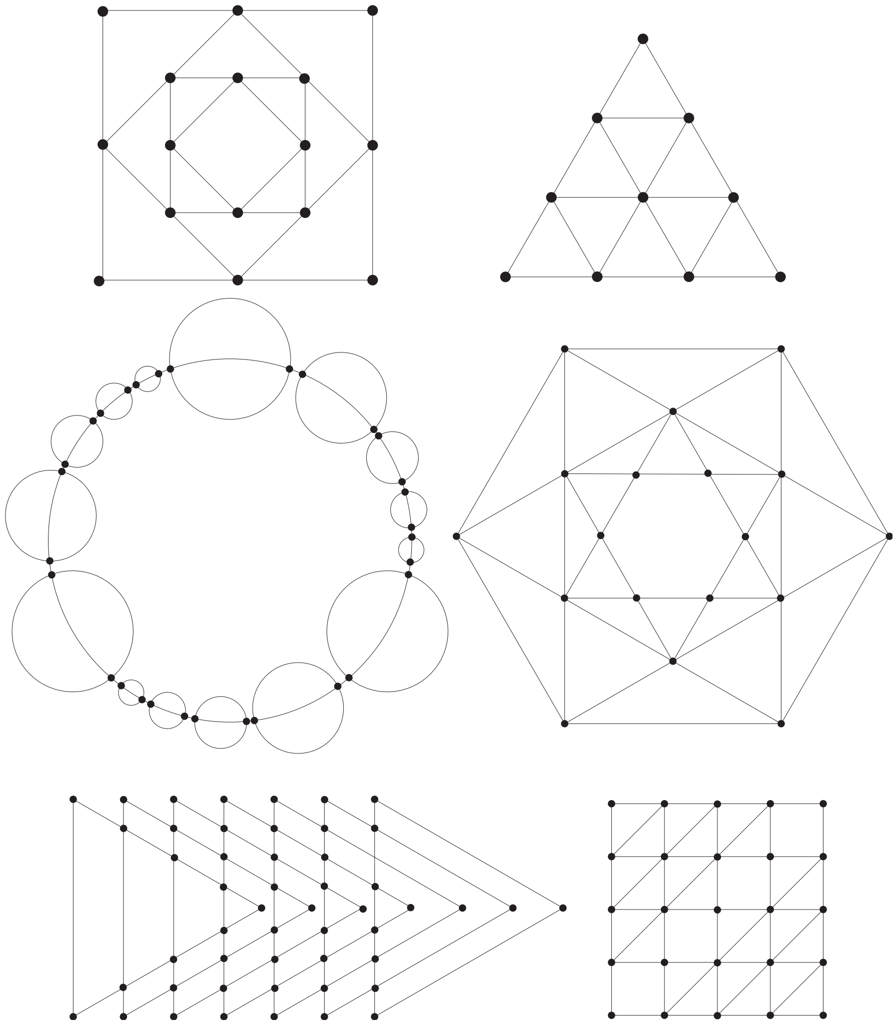


図 6.8: 一筆書き可能なグラフと 2 色塗り

レポート 12 一筆書きできるグラフで，始点と終点が一致するグラフは，2 色で彩色可能となることを示せ.

レポート 13 3 色必要なグラフをたくさん作り，なぜ 3 色必要なのかを述べなさい.

6.3　浮き輪のデザイン

平面上のグラフと同様に球面上のグラフに関して彩色問題を考える事ができます．これは、平面上のグラフでグラフの外側の領域にも色を塗ることに対応します．したがって、4 色あれば球面上のどんなグラフも彩色可能です．

球面上のグラフを考える事は、球面をビーチボールのようにカラフルに塗る事と同じです．そこで、ビーチボールのかわりに浮き輪をカラフルに塗り分ける事を考えましょう．そして、色は最低何色必要かを考えていきます．

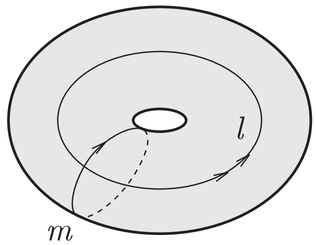


図 6.9: トーラス (torus)

図 6.9 に描かれているような浮き輪の形をしたものを**トーラス** (torus) といいます．トーラス上のグラフの色塗りを考えて見ましょう．

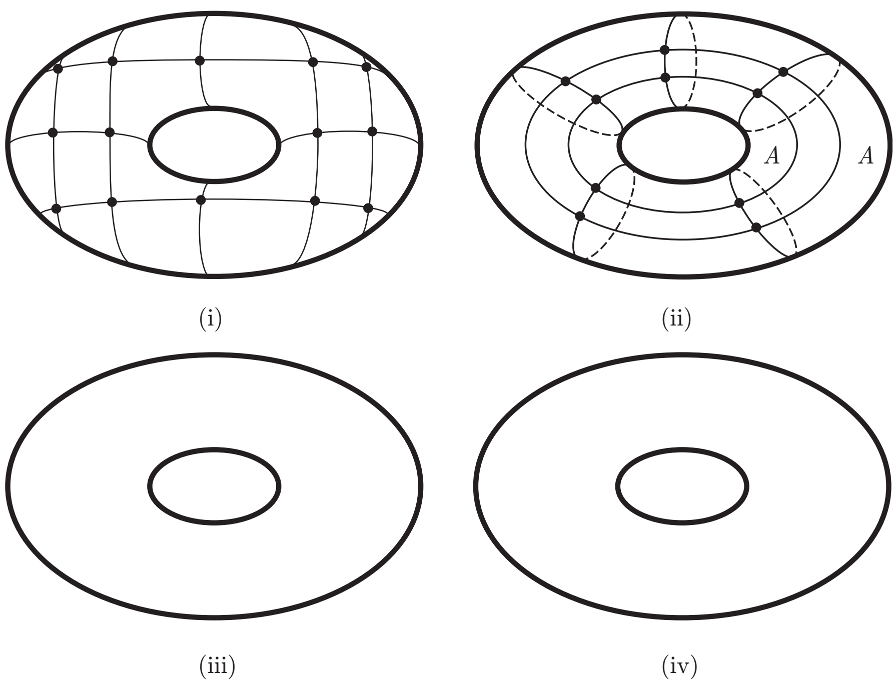


図 6.10: トーラス上のグラフ

初めにトーラス上にグラフを描く練習をしましょう．図 6.10 の上 2 つのトーラ

スには、グラフが描いてあります．トーラスは太い線で表し、グラフは細い線で描いてあります．(i) はトーラスの表面だけを表しています．(ii) はトーラスの裏側の状態も表したいので、辺が裏側ににあるときには破線で表したグラフです．グラフ全体を考えたいので、裏側にある辺も考える事にします.

練習 図 6.10(iii) と (iv) にグラフを描いてみなさい．慣れるまでは、破線と頂点をはっきり描きましょう.

グラフの彩色問題を考えたいので、グラフは彩色できるものを考えます[10].

図 6.10(i) のグラフに対して色を塗って見ましょう．これは、表側しか考えていないので、平面の時と変わりません.

次に、(ii) のグラフに色を塗ってみましょう．この場合、A で示された二箇所はトーラスの裏側でつながっているので同じ色で塗らないといけないことに注意してください.

トーラス上のグラフの彩色 トーラス上のグラフを彩色する場合、色は最低何色あれば可能だろうか.

練習 図 6.10(ii) のグラフは 3 色必要です．図 6.11 のグラフで 3 色で塗ってみてください．(2 つ同じグラフを用意してあります．)

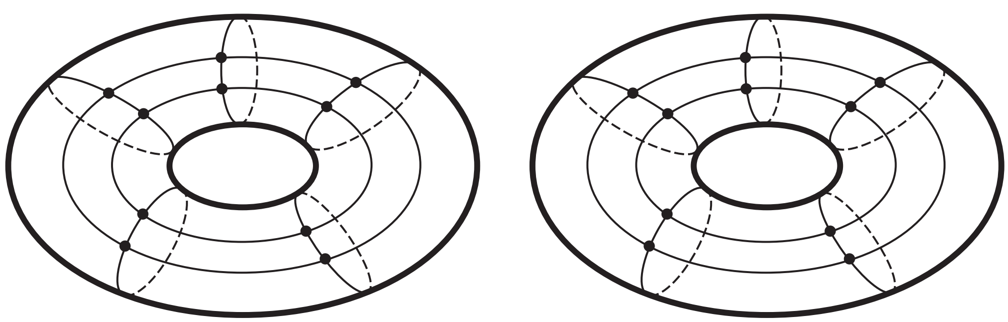


図 6.11: トーラス上のグラフの 3 色塗り

トーラス上のグラフに対して、何色必要かを考えます.

実験 1 図 6.12 のグラフに対して色を塗っていましょう．同じグラフを 4 つ用意しておきました．何色必要でしょうか？

平面上のグラフだと 4 色あればどんなグラフにも色を塗ることができたのですが，どうも図 6.12 のグラフは 4 色ではだめな感じがします．5 色必要だったのではないでしょうか.

[10]彩色できる条件は平面の時よりもきつくなります.

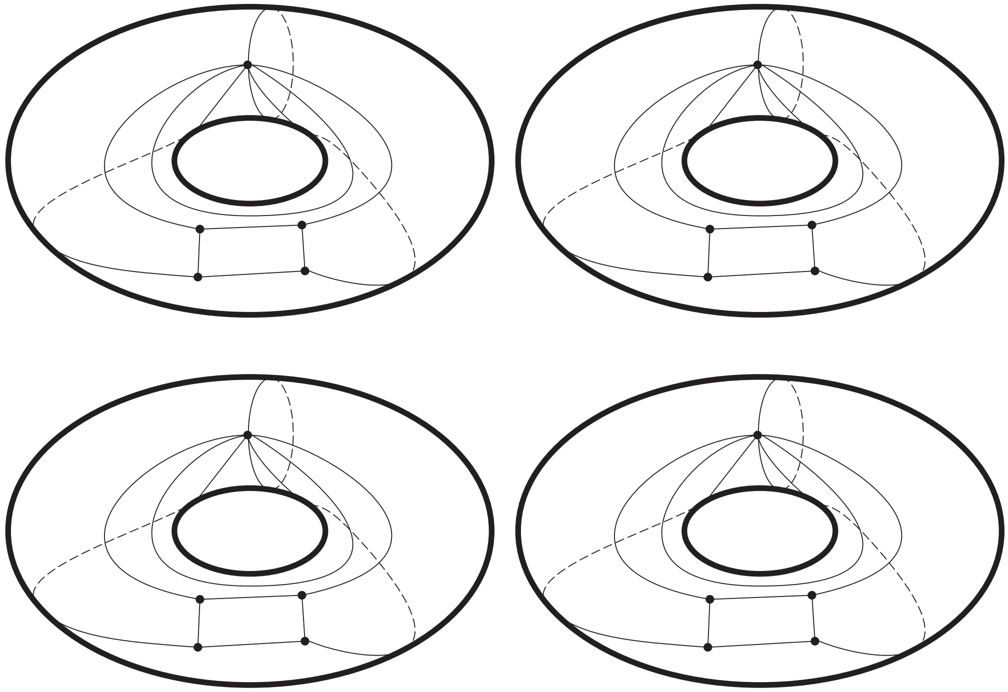


図 6.12: トーラス 1

5 色必要な事は次のように考えればわかります.

(1) 図 6.13 のように面に番号を振る.
(2) 1 の面に「赤」で着色する.
(3) 2 の面に注目すると 1 の面と接しているので新しい色「橙」で着色します.
(4) 3 の面に注目すると 1 と 2 の面に接しているので新しい色「黄」で着色します.
(5) 4 の面に注目すると 1〜3 の面に接しているので新しい色「緑」で着色します.
(6) 5 の面に注目すると 1〜4 の面に接しているので新しい色「青」で着色します.

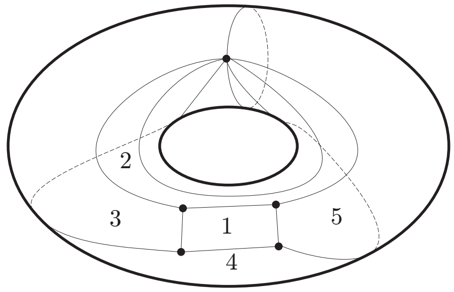


図 6.13: グラフの 5 彩色

したがって 5 色必要です.

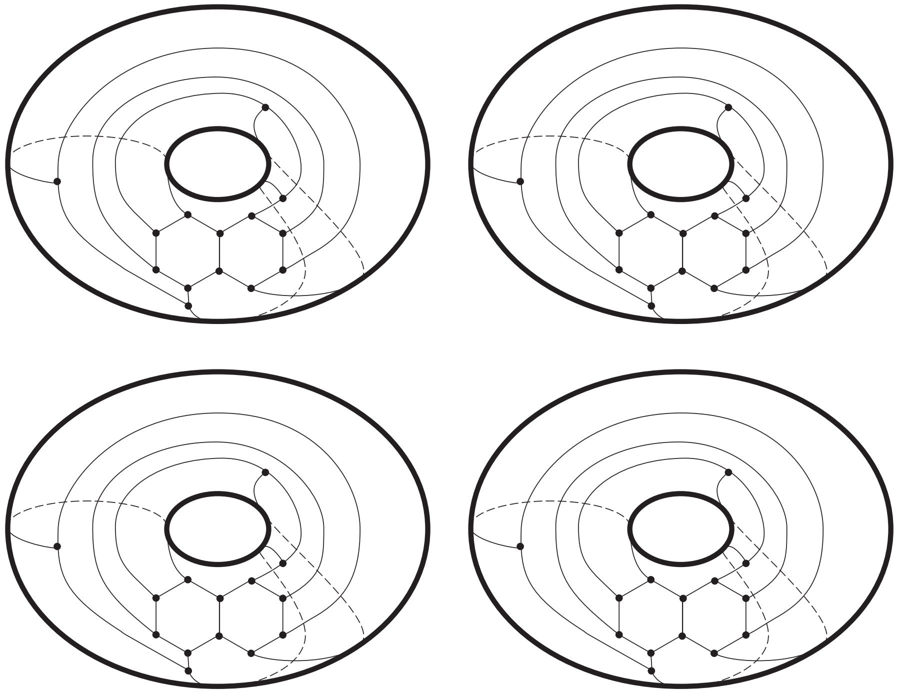


図 6.14: トーラス 2

実験 2 図 6.14 のグラフに対して色を塗って見ましょう．何色必要でしょうか？
この場合も実験 1 と同じように面に番号を振って考えればできます.

トーラス上のグラフの色塗りの問題に関しては次のことがわかっています.

定理 6.3.1 (トーラス上の七色問題) トーラス上のグラフは 7 色で塗り分けることができる．(かつ, 6 色では塗り分けることのできないグラフがある.)

7 色あれば彩色可能である証明[11]はしません．図 6.14 のグラフが 7 色必要なグラフです.

レポート 14 トーラス上のグラフで図 6.14 以外に 7 色必要なものを見つけ、なぜ 7 色必要なのかを述べなさい.

[11] 平面上のグラフの 4 色問題より証明は簡単です．興味のある学生は図書館でグラフ理論の本を探してみてください.

6.4 レポート 1 題

レポート 15 次のマジックは Mr. マリックがやっていたマジックです[12]. 超魔術[13]でも当然タネがあるわけで、グラフ理論を使ってタネを考えてみましょう[14].

図 6.15 で表された山手線と京浜東北線を考えます. 横浜駅がスタート地点で山手線には左回りを図のように決めておきます.

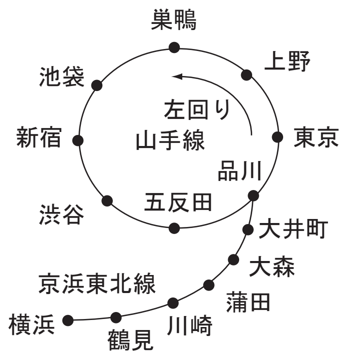


図 6.15: 山手線

手順 1 さあ、皆さん「7 以上の数を考えてください. あまり大きいとちょっと大変なので手ごろな数を考えましょう.」

手順 2 京浜東北線の横浜駅から順に数えていき、1 番目は鶴見、2 番目は川崎と進んでいきます. 品川駅からは左回りに山手線を回っていきます. 自分の考えた数のところが停車駅なのでそこで停まります.

手順 3 そこの駅が重要なのでしっかりと見つめましょう.

手順 4 そこの駅から今度は考えた数だけ山手線を逆の方向に戻っていきます. ただし、京浜東北線には入らないようにします.

手順 5. 自分のいる駅をしっかりと見てください. たぶん、巣鴨ではないですね. 新宿や品川でもないです.

実は 7 以上のどんな数を考えても必ずある駅になります. どの駅でしょうか？また, この理由を考えてください.

上の路線図をグラフだと思って少し変形をすればわかると思います.

[12]ナポレオンズもやっていました. 結構有名な手品みたいです
[13]本当に魔術だと思っている人がいるみたいですが.
[14]もっとも、手品はタネがわからない方が面白いのですが.