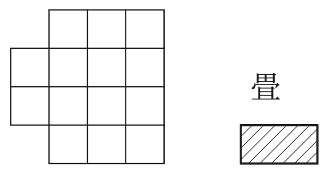
4　畳を敷きましょう

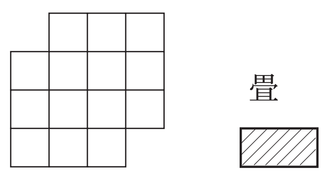
4.1　7畳敷

問題 1 下図のような 7 畳の部屋があった．ここに畳を敷き詰めたい．畳を敷いてください．

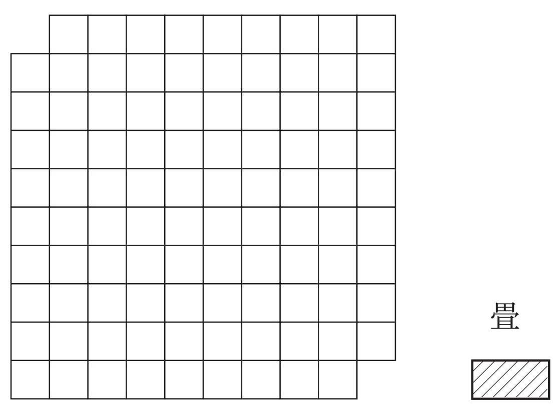


　簡単に畳を敷くことができましたね．

問題 2 下図のような 7 畳の部屋があった．ここに畳敷き詰めたい．畳を敷いてください．



問題 3 もう少し複雑にして次の部屋に畳を敷き詰める事ができるでしょうか？



　今回はなかなか手ごわいと思います．

　実は問題 2 も問題 3 もどちらも畳を敷き詰める事ができません．畳を敷き詰める事ができる事の証明は、実際に敷き詰めればよいのですが、できない事の証明は、**どのような敷き詰め方をしても不可能だ**と言うことを示さないといけないので大変なのです．

そして、敷き詰める事ができない事を示す時に、はじめから問題 3 の大きな図形で考えると大変です．そこで、7 畳敷きの部屋でなぜこの部屋に畳を敷き詰める事ができないのかを考えましょう．

この 7 畳の部屋にどのように畳を敷いても敷き詰める事ができない事を示さないといけません．すなわち、敷き方のすべての場合わけを考えないといけません．ところが、7 畳という狭い部屋なので次のように考えれば、一つの場合を考えればよい事になります．

[7 畳敷きの部屋の普通の解法]

いきなり、部屋の真中に畳を敷くのは良くありません．なぜなら、畳を縦向きと横向きに敷くことができるので、二通りの方法を初めから考えないといけなくなり、敷き方の場合わけが大変になります．左下の角から敷き始めるのが一般的だと思います．部屋の対称性から、図 4.1 の様に、畳の置き方は一通りしかありません．そこに畳を置いてみましょう．

次にどこに畳を敷くかを良く考えないといけません．畳の置き方が一つしかない所があります．すなわち、X で示した所に注目します．そこに畳を置くと、また、置き方が一つしかない場所が出てきます．

この操作を順次行っていきます．すると、図 4.1 の最後のグラフのように、最後のところで 1 畳分が半畳 2 枚に別れてしまうので敷く事ができない事がわかります．

7 畳の場合は一番目に畳を置く場所をうまく選べば場合わけの数が一つになり、簡略な議論で畳を敷き詰める事ができない事を示す事ができます．

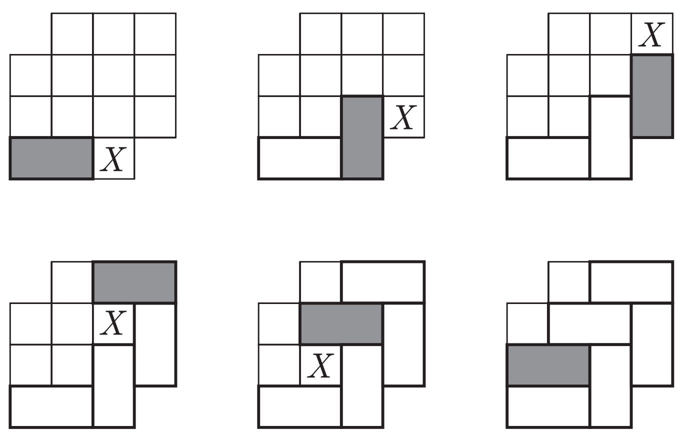


図 4.1: 7 畳敷きの答え

では、**問題 3** の複雑な部屋で同じことを考えるとどうなりますか？7 畳の時のようにできるかどうかやってみてください．同じように、左下の角に畳を置いても、2 番目に置く畳の位置が、一つに決まらないので場合わけが多くて証明する事は大変です．

新しい考え方 このような時には考え方を大きく変えないといけません．図 4.2 のように白と黒で色を塗ってみよう.

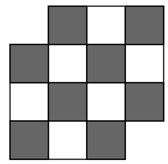
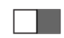


図 4.2: 7 畳の部屋に色を塗る

この色の塗られた部屋で畳の問題を考えてみます.

問題 図 4.2 の部屋に畳を敷き詰める事はできるでしょうか？

ぜんぜん問題が変わっていないと思うかもしれません．しかし、色を塗ったことで畳を敷き詰める事ができるかどうかすぐにわかります.

一つの畳をこの部屋にどのように置いても黒と白を 1 つずつ覆います．  のようになります．すると**畳を敷き詰めることができたとすると白と黒の数は同じでないといけません**.

すなわち、**白と黒の個数が異なれば、畳を敷くことができない**[4]ことがわかります．この部屋は黒が 8 個白が 6 個なので畳を敷くことができない事が簡単にわかりました．この様に、考え方を変えることで簡単に示す事ができる場合があります.

練習 少し簡単な図 4.3 の部屋に畳を敷き詰める事ができない事を同じようにして示してください．(色塗りに失敗しても良いように同じグラフを 3 個用意してあります．)

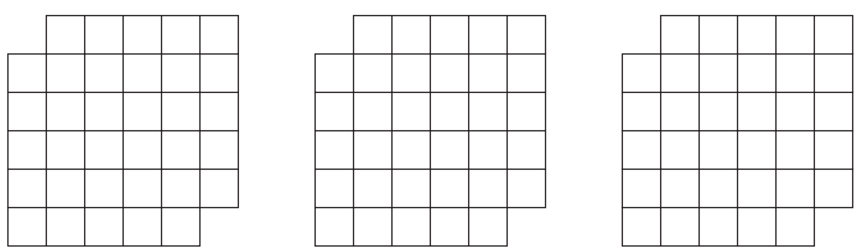


図 4.3: 畳敷きの答え

そして、その理由を自分の言葉でわかりやすくノートに書きましょう．**この書くという作業を大事にしておかないといい勉強の仕方ではなくなります**.

問題 3 はどのようにすれば解けるかもうわかったと思います.

[4]対偶を取っています.

4.2　畳敷きの更なる拡張

問題 図 4.4 のグラフを 1×4 のタイルで敷き詰める事は出来るでしょうか？

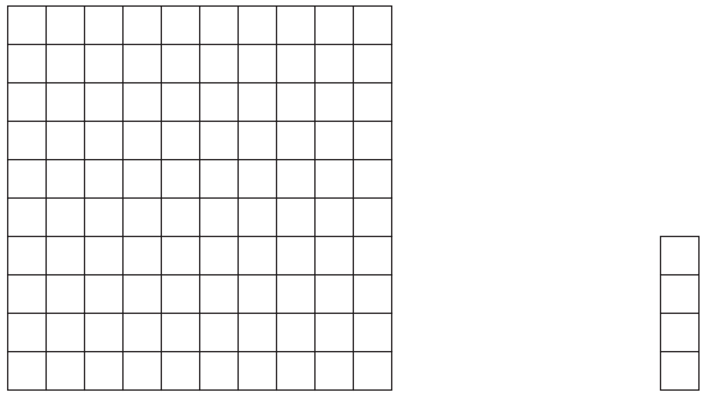


図 4.4: 1×4 のタイルで敷き詰めて

図 4.5 にたくさんグラフを用意しておいたので一度実験して、できるかどうか考えましょう.

実験してみると敷き詰める事はできそうにないような気がします．そこで、敷き詰める事ができない事を示そう．前の問題と同じように考えて、この図形を白と黒で市松模様に塗ってみましょう．図 4.5 のグラフで白と黒に塗ってください．
1×4 のタイルはどのように置いても白と黒を各々2 枚覆います、したがって、白と黒の個数が異なれば、敷き詰める事ができない事が示せます．そこで、色を塗ったグラフの白と黒の個数を数えると、残念ながら同数になるのでこの方法では駄目だと言う事がわかります.

しかし、7 畳の部屋の問題で考えたように、考え方を工夫すれば、問題が解けることがあります．新しいアイデアを考える前に、色を塗ると言う考え方を少し拡張して考えてみましょう．色の塗り方を少し変化させる事を考えます.

図 4.5 のグラフに色の塗り方を工夫して、いろいろアイデアを考えましょう.
本当は、解答を教えずに考えて貰うのが一番良い教育方法だと思うのですが、大学入学して 1 年目なので、解法の 1 つを次で示します．これ以外に良い解答がある可能性があるので考えてください．たまに、僕の考えている解答よりもいいのを考えてレポートにしてくれる学生がいます.

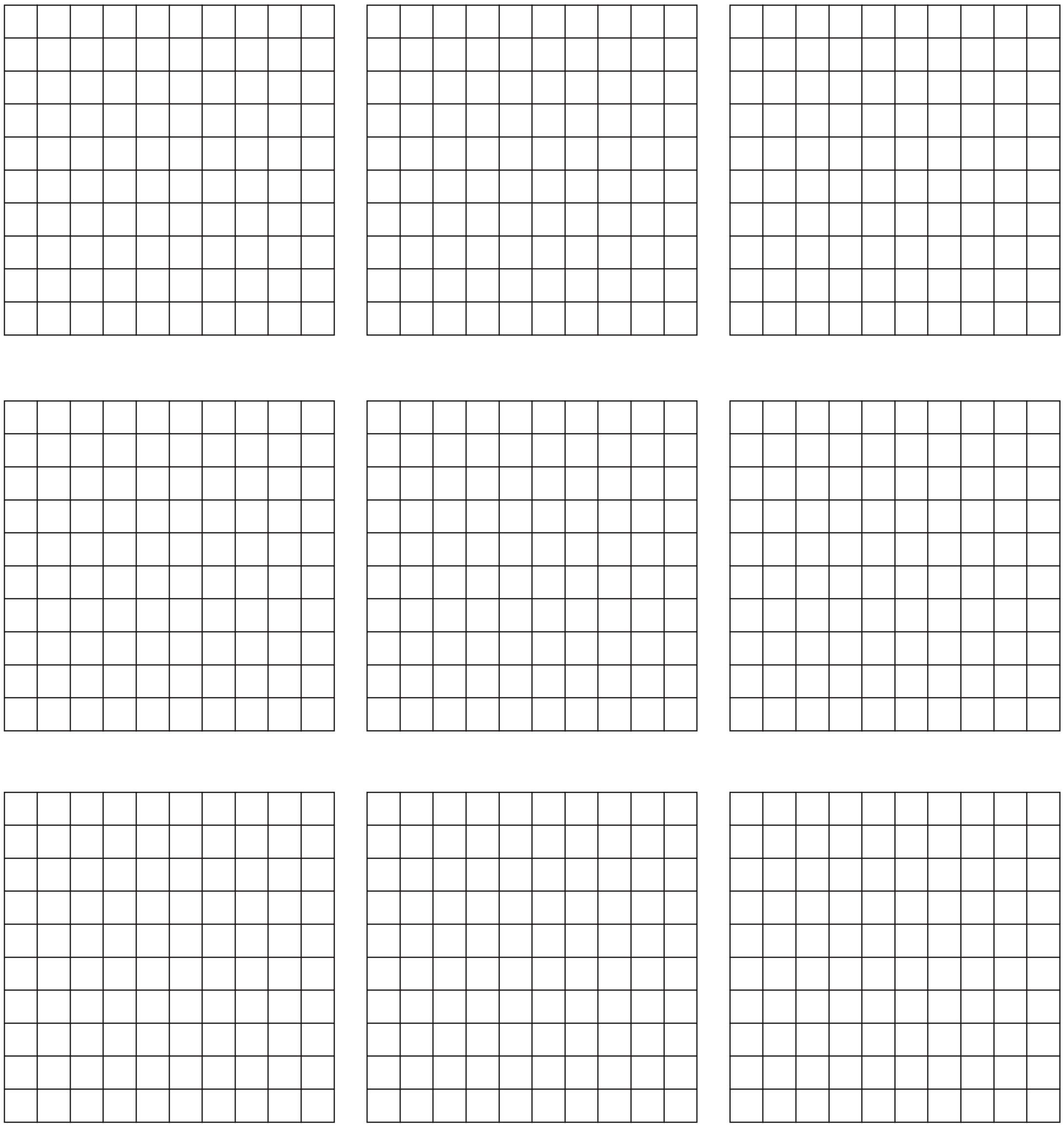


図 4.5: 1×4 のタイルで敷き詰めて、練習用

1×4 の解法のひとつ

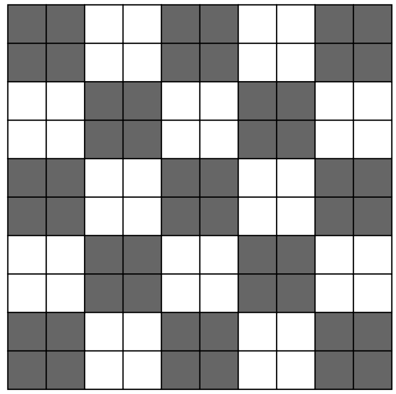


図 4.6: 1×4 のタイルを白黒に塗って

図 4.6 のようにちょっと工夫して 2×2 のマス目をひとつの単位として白と黒に塗ります．1×4 のタイルをどのように置いても白 2 枚と黒 2 枚を覆う事がわかります．ここで、図 4.6 の白と黒の数を数えてみましょう．

白と黒の個数が異なることに気がつきましたか？すると、7 畳敷の問題と同じ考え方ができることがわかります.

レポート 7 この問題の別の方法で解け.

拡張された問題 図 4.7 を 1×3 のタイルで敷き詰める事が出来ますか？

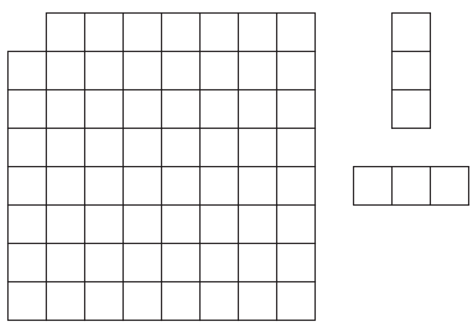


図 4.7: 1×3 のタイルで敷き詰めて

何回か試行錯誤できるように同じグラフを図 4.8 で用意しておきました．敷き詰める事ができるかどうか実験してみなさい.

実際にタイルを置いて考えると、この問題も敷き詰める事ができそうにないとわかります．そこで、敷き詰める事ができない事を証明しよう.

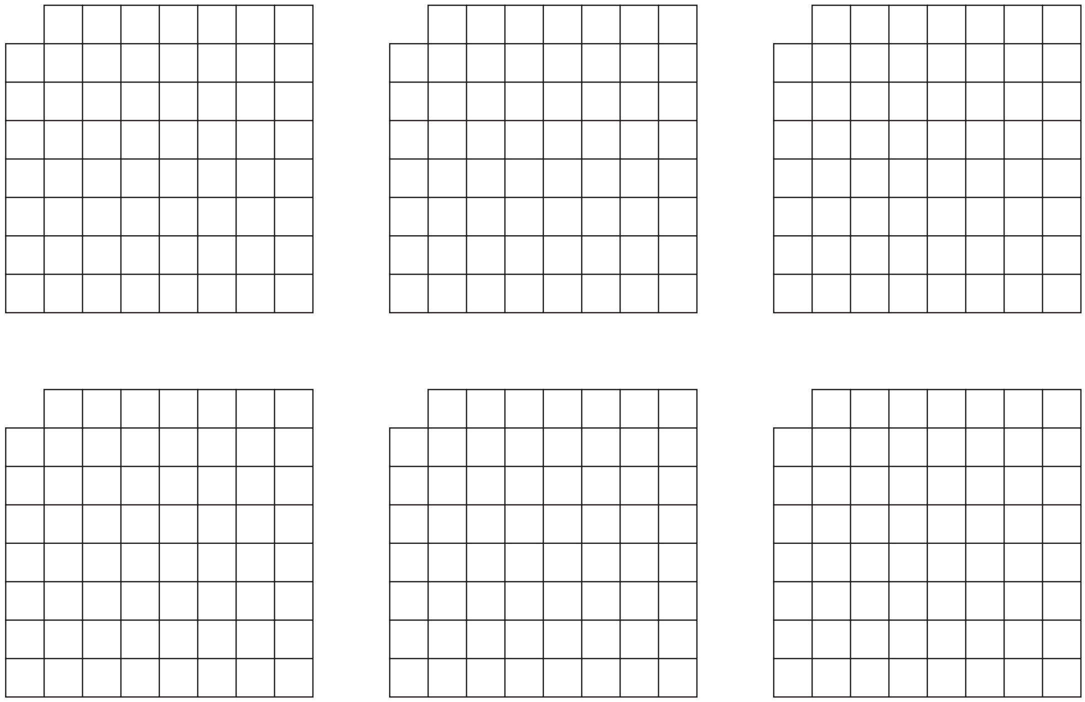


図 4.8: 1×3 のタイルで敷き詰めて (試行錯誤用)

前の問題では白と黒の色の塗り方を変えました．しかし、1×3 のタイルなので、白と黒の個数で考えてもうまくいきそうにありません[5].

色の個数を増やすとか、いろいろアイデアはあります.

レポート 8 p.32 の [拡張された問題] を解け.

ヒント この問題ではタイルの枚数が多いので、少ない場合を考えて見ます．図 4.9 の太い線で囲まれたところに 1×3 のタイルを敷き詰めたい．できるだろうか？ 1×3 のタイルなので白と黒の二色で塗っても意味がありませんね．(なぜでしょうか？) そこで、色の数を増やして三色にして塗ってみました.

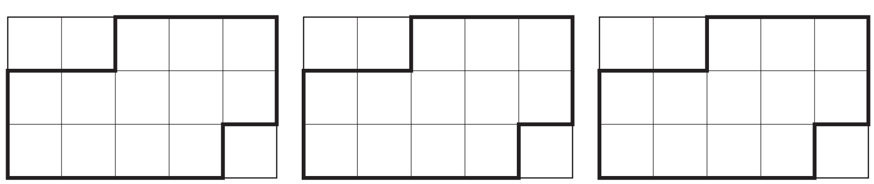


図 4.9: 1×3 のタイルで敷き詰めて (ヒント)

[5]白と黒の色塗りではこの問題は解けないと思っていました．しかし、山形大学の授業で白と黒の色塗りで解答した学生がいました．非常に上手な方法でした．その解法をこの章の最後に載せておきます.

図 4.10 がその図です．そこで、各々の色の個数を数えると…

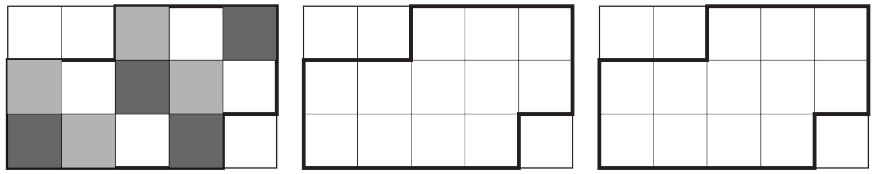


図 4.10: 1×3 のタイルで敷き詰めて (三色塗り)

4.3　すべての頂点をまわって

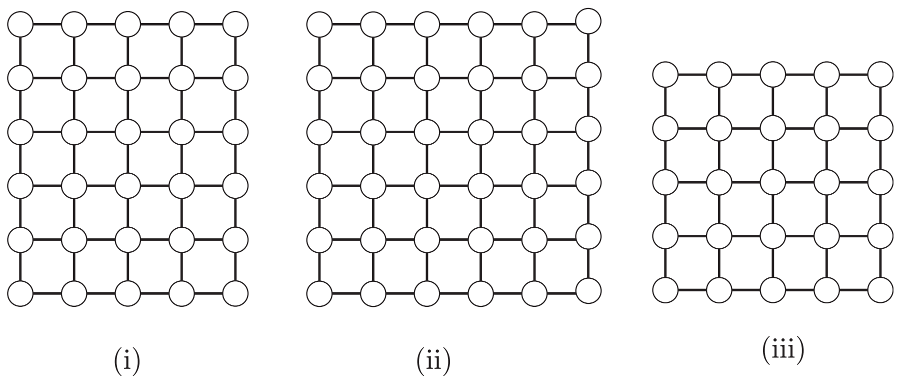


図 4.11: 頂点をまわって

問題 図 4.11 の 3 つのグラフを考える．一筆書きと似ているのですが、ある頂点から出発して、辺に沿って移動してすべての頂点を一度だけ通って元の頂点に戻ってくることができるかどうかを考えてください．ただし、通らない辺があってもかまいません．

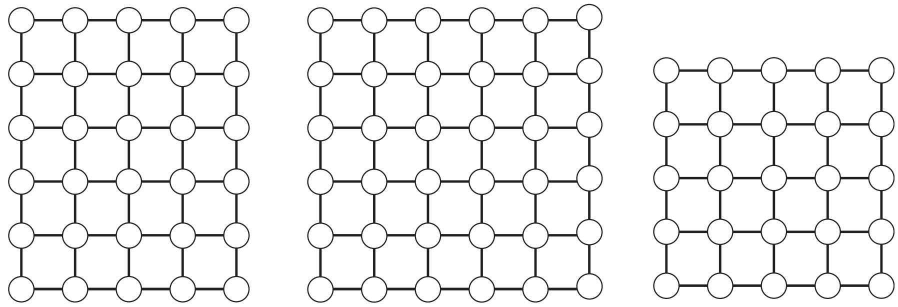
図 4.12 のグラフで実験してみよう．

図 4.11 のグラフで不可能なグラフはどれですか．また、なぜ不可能なのかの理由を考えましょう．ただし、「頂点の個数が奇数の時、不可能」と言うのは理由になりません．奇数の時、なぜ不可能かの理由を示す必要があります．

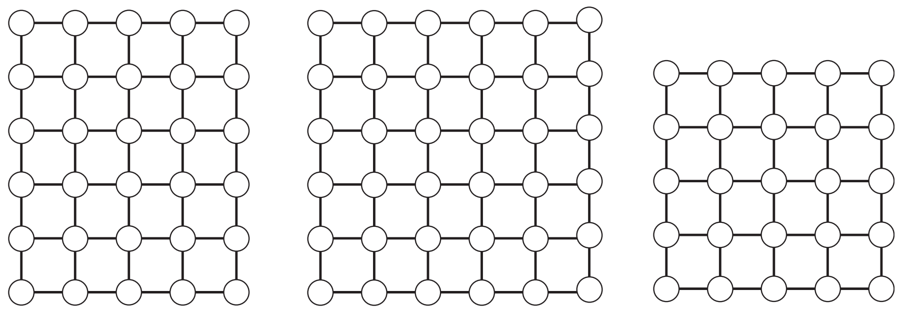
ヒント 畳の問題と同じように今度は頂点に色を塗ってみましょう．

この問題も頂点を白と黒で塗ることにより、解くことができます．

図 4.13 のように、頂点を白と黒で塗ります．注意してほしいのは辺でつながっている二つの頂点の色は異なっている事です．出発する頂点はどこでも良いので、



(i) (ii) (iii)



(i) (ii) (iii)

図 4.12: 頂点をまわって (練習用)

X から出発する事にします．X の黒で塗られているので、辺でつながっている頂点はすべて白色です．すると、辺に沿って進むと、頂点の色は黒と白が交互に出てくることになります．

問題の条件から、元の頂点に戻ってくるので、色を見れば、$X =$ 黒 $\Rightarrow$ 白 $\Rightarrow$ 黒 $\Rightarrow$ 白 $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ 白 $\Rightarrow$ 黒 $= X$ となります．端点は X であることに注意すれば、黒と白の個数は等しくなります．したがって、頂点の個数は黒の個数の 2 倍になるので、偶数になります．

したがって、「元の頂点に戻ってくる事ができる」ならば「頂点の個数は偶数」と言う事がわかりました．

すなわち、「頂点の個数が奇数」ならば「戻ってくる事ができない」事がわかります．また、頂点の個数が偶数の時には実験してみてわかるように、元の頂点に戻ってくる事ができます．

一筆書きはすべての辺を一度だけ通ることができるかという問題でした．そして、一筆書きの場合にはどのグラフが一筆書き可能かまた一筆書きの仕方もわかっていました．ここでは、すべての頂点を一度だけ通って戻ってくる事ができるグラフは、どのようなグラフかという問題です．残念ながら、どのようなグラフが可能かという完全な答えはまだ見つかっていません．さらに、始点と終点が異な

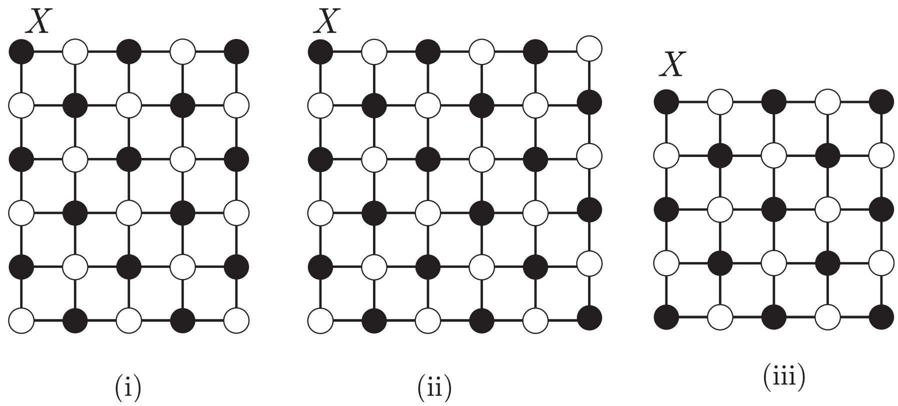


図 4.13: 頂点をまわって (解答)

る場合を考える事もあります.

4.4 博物館見学

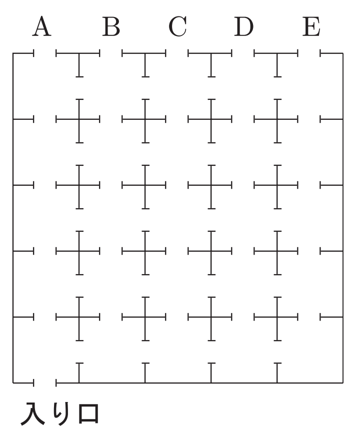


図 4.14: 博物館

図 4.14 のような博物館がありました．入り口は固定されているのですが、出口は A、B、 C、 D、 E の 5 箇所あります.

問題 入り口から入りすべての部屋を一度だけ通って出口 A から出る道順を求めよ．また、そのような道順を 3 つ以上見つけよ．ただし、一度出口から出ると戻ることはできません.

レポート 9 この博物館では、出口によって可能なものと不可能なものがあります. 可能な出口はその道順を示して、不可能な出口にはなぜ不可能かを示しなさい.

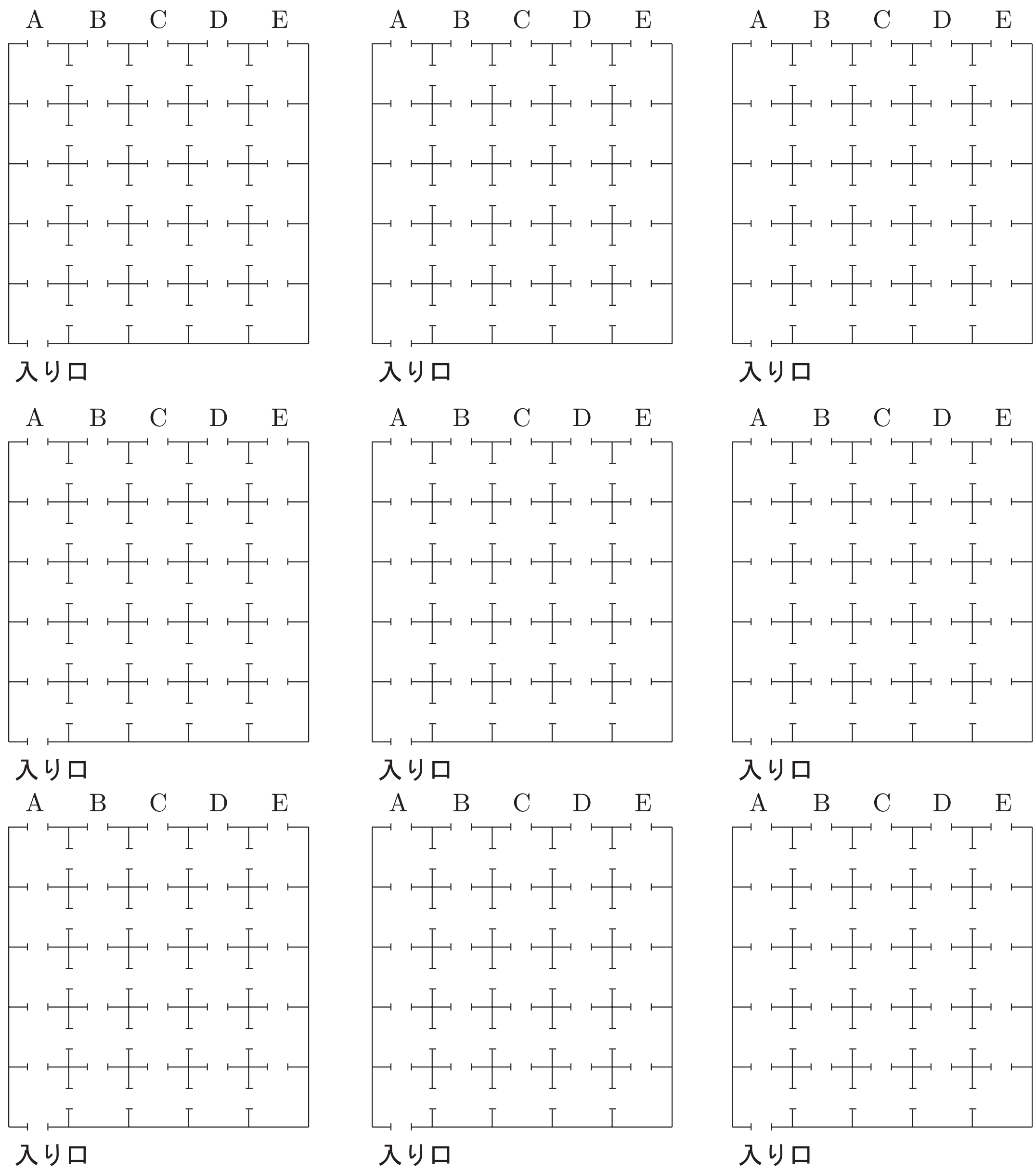

A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口

図 4.15: 博物館 (練習用)

p.32 の [拡張された問題] の別解．

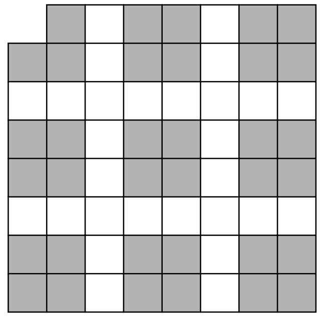


図 4.16: 1×3 のタイルで敷き詰めて

図 4.16 のように白と黒でグラフに色を塗ります．すると、どのようにタイルを並べてもタイルは白を 1 個か 3 個、黒を 0 個か 2 個覆う事になる．したがってタイルで敷き詰める事ができれば、黒は全部あわせて偶数個になります．しかし、黒は 35 個で奇数なので敷き詰められません．

この問題は 3 色で色を塗れば可能だと言う問題です．ただし、図 4.10 のような塗り方では、個数が等しくなり、示すことができませんが少し工夫すれば示すことができます．そして、漠然と 2 色では無理だと思っていました．しかし、ある学生が 2 色でも可能だという事を示しました．ちょっと、学生の頭に柔軟性と僕の頭の固さを思い知らされたような気になる面白いレポートでした．

4.5　本屋

大学生になると読まなければならない本に専門書があります．しかし、山形では専門書を直接手にとって見る事のできる本屋さんはありません．しかし、仙台には丸善とジュンク堂があり、それぞれ専門書があるので行ってみてください．

丸善 アエル店　　仙台市青葉区中央 1-3-1　ＡＥＲ　1F
ジュンク堂　　仙台市青葉区中央 4-1-1 イービーンズ 6F・7F または、ロフト 7F