3 一筆書き

1 章で少し考えた一筆書きを考えます．一筆書きとは、グラフですべての辺をまわり同じ辺は 2 回以上通らない書き方があるかという問題でした．ここでは、一筆書きできるグラフとできないグラフの見分け方と、そして、できるグラフに対して一筆書きの仕方を考えます.

3.1 一筆書きに挑戦

練習 図 3.1 のグラフに対して一筆書きをしてみてください．ただし、中には一筆書きできない図形もあるから注意して下さい[3]．(制限時間 5 分)

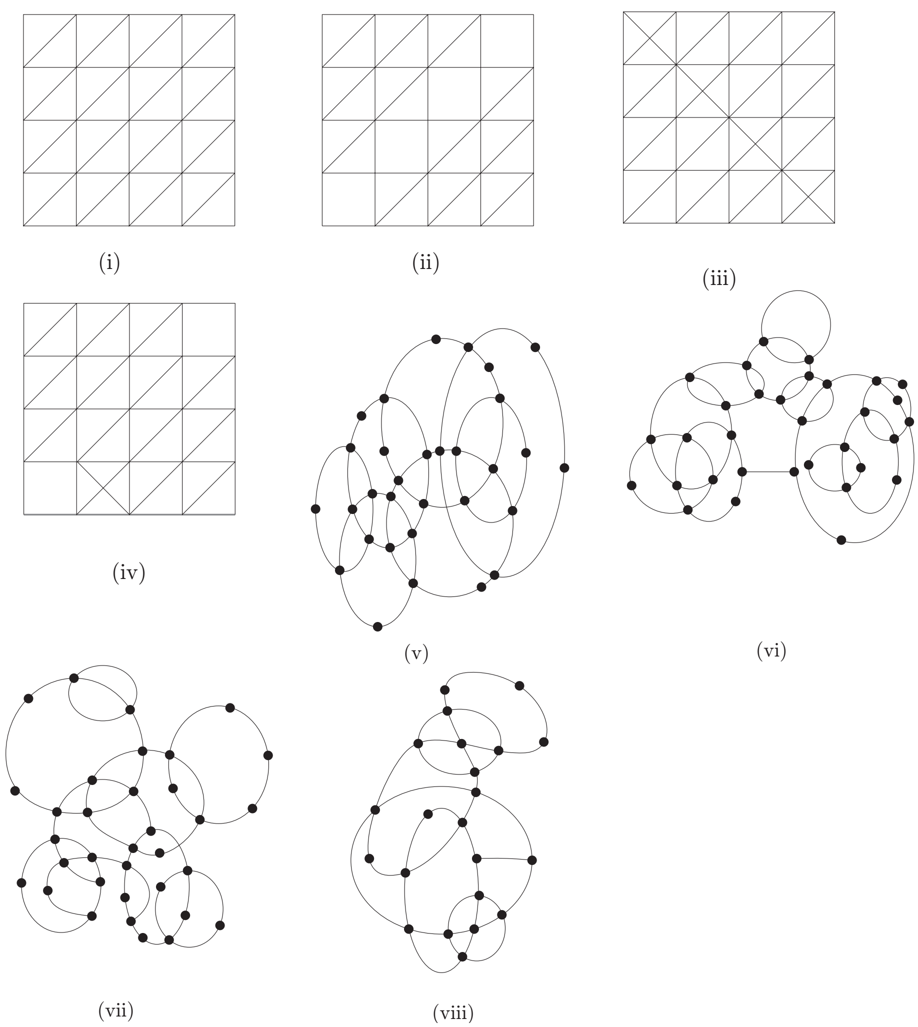

図 3.1: 一筆書きをしてみよう

[3]頂点を省いたグラフがあります．気になる人は角と交点が頂点だと思ってください.

3.2　一筆書き

図 3.1 の複雑なグラフで考えると大変なので、少し簡単なグラフで考える事にしよう．もう一度、図 3.2 のグラフに対して一筆書きできるかどうか調べてください．

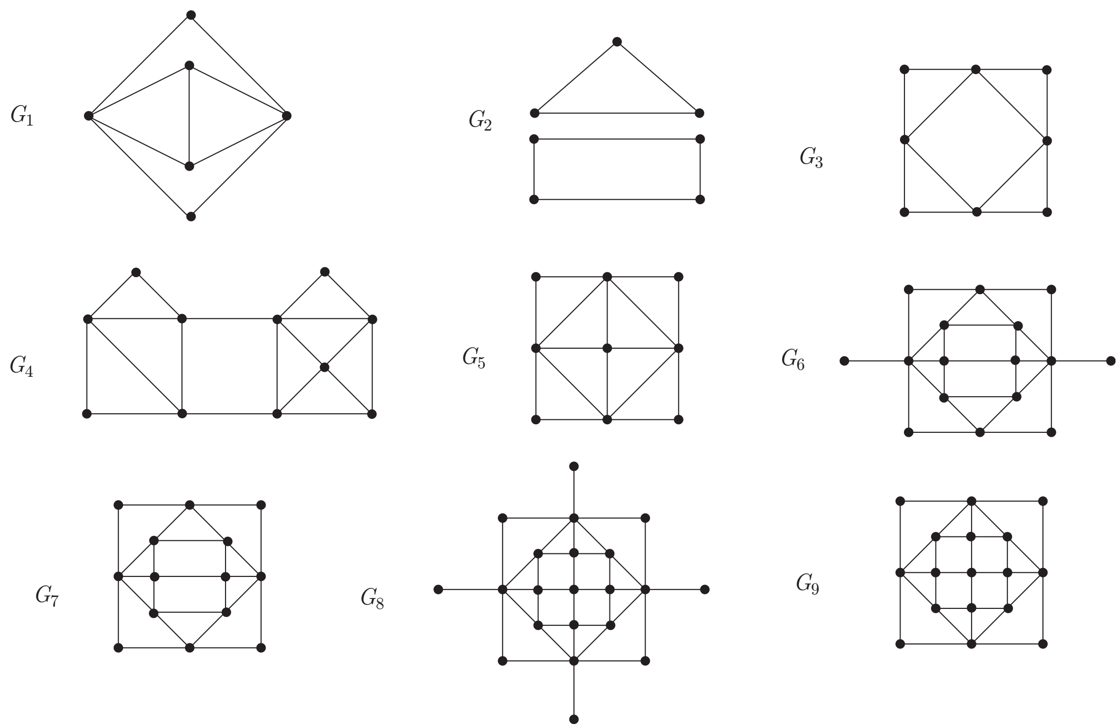

図 3.2: 再び一筆書き

G_1、G_3、G_4、G_6、G_7 は一筆書きできるグラフで残りはできないグラフです．まず、連結でないと一筆書きできないので、G_2 はできない事にすぐにわかります．

G_3 は簡単に一筆書きができるグラフです．それに対して G_1、G_4、G_7 は一筆書き可能ですが、難しいグラフです．

G_6 のグラフは一筆書きの始点がすぐにわかるようなグラフです．両端に伸びている辺の端点から描き始めないといけないことはわかるでしょう．G_6 のグラフのように始点と終点が決まっているグラフがあります．G_7 は G_6 を少し変形したグラフなので、同じように始点と終点が決まっている事がわかります．

それに対して、G_3 はどの頂点を始点にしても良いグラフです．その理由を考えるために、図 3.2 の各頂点に集まる辺の本数を書き入れ偶数の時には頂点を青で奇数の時には頂点を赤で塗りましょう．一筆書きした時の始点と終点を除く頂点の色はどうなっていますか？

一筆書きの途中の頂点では、一筆書きをした時に入ってくる辺と出て行く辺の対があるので頂点に集まる辺の本数は偶数になることがわかります.

始点と終点ではどうなるのでしょう．始点と終点が同じならばその頂点に集まる辺の本数は偶数となります．始点と終点が異なる場合は対応する頂点に集まる辺の本数は奇数になるのがわかりますね.

よって、G_1 と G_5 では頂点に集まる辺の本数が奇数 (赤い頂点) から出発しまた赤い頂点で終わらないといけなかったのです.

G_3 はすべての頂点に集まる辺の本数が偶数なのでヘマをしない限りどの頂点から出発しても一筆書きできるのです.

では、頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か奇数が 2 つでその他はすべて偶数となるグラフは一筆書き可能でしょうか？すぐにわかるのはグラフは連結でなければならないということです.

次の定理が言えることがわかっています.

定理 3.2.1 連結なグラフ G が一筆書き可能という事と、頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か 2 つの頂点で奇数で残りはすべて偶数という事は、同値です.

一筆書きの数学的な説明は後にして、具体例で実践してみよう．一筆書きできないグラフの見分け方はわかったので、できるグラフを考えます．レベルをだんだんに上げていく練習問題を用意してあるので、挑戦してみてください．また、失敗しても良いようにグラフを 2 つ用意してあります.

一筆書き 難易度 1 図 3.3 が難易度 1 の問題です．ちょっと考えればできると思います．

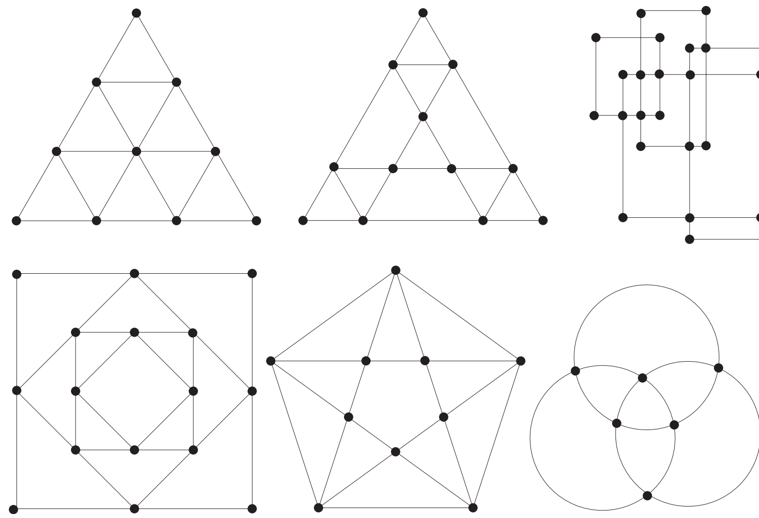

図 3.3: 難易度 1

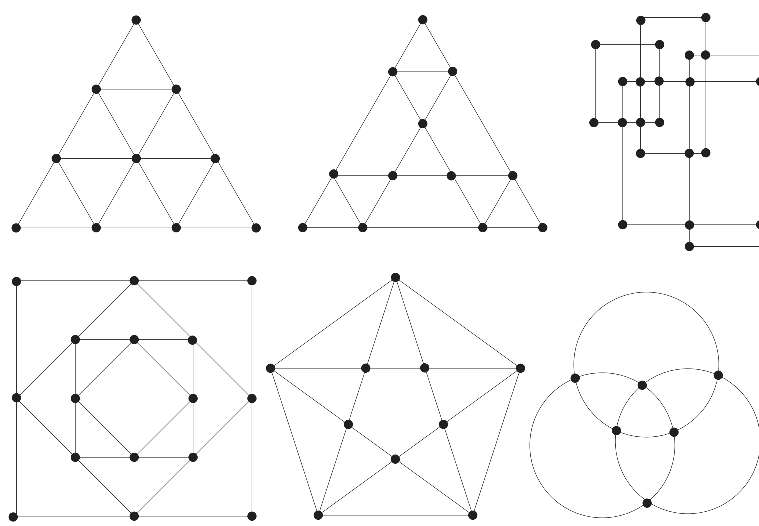

図 3.4: 難易度 1 again

一筆書き 難易度 2 図 3.5 が難易度 2 の問題です．考えればできますね．

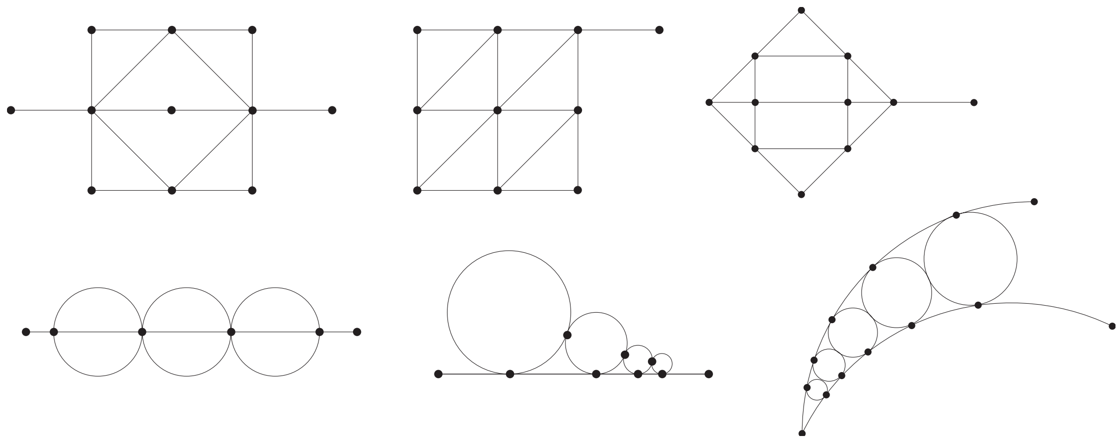

図 3.5: 難易度 2

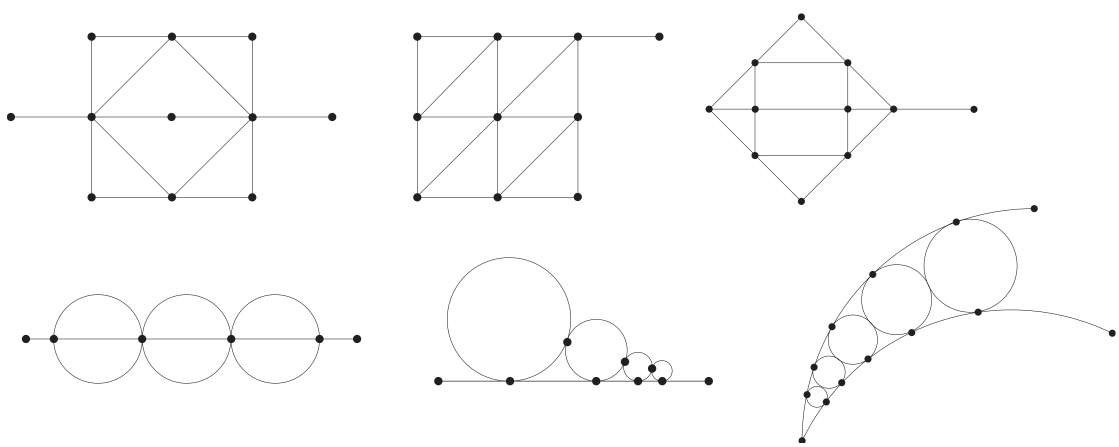

図 3.6: 難易度 2 again

一筆書き 難易度 3 図 3.7 が難易度 3 の問題です．ちょっと頭を使ってください．

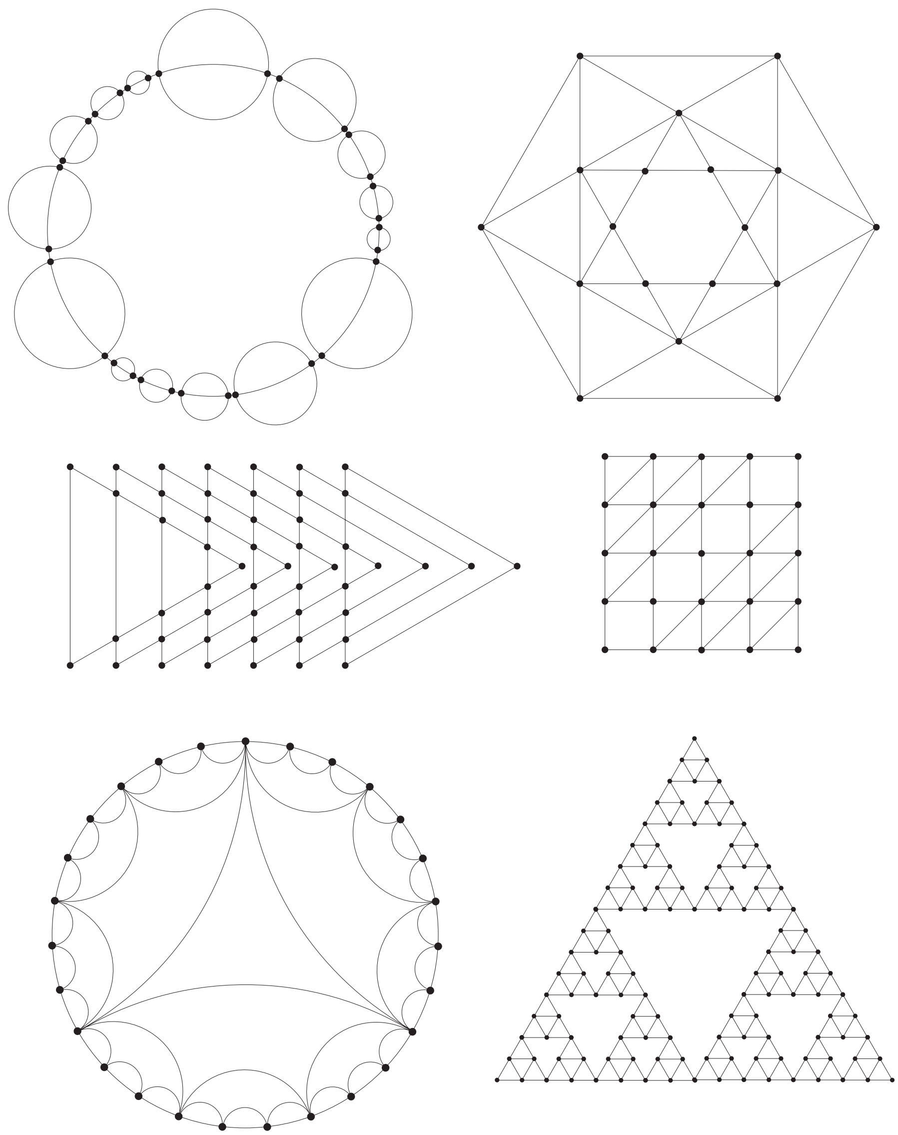

図 3.7: 難易度 3

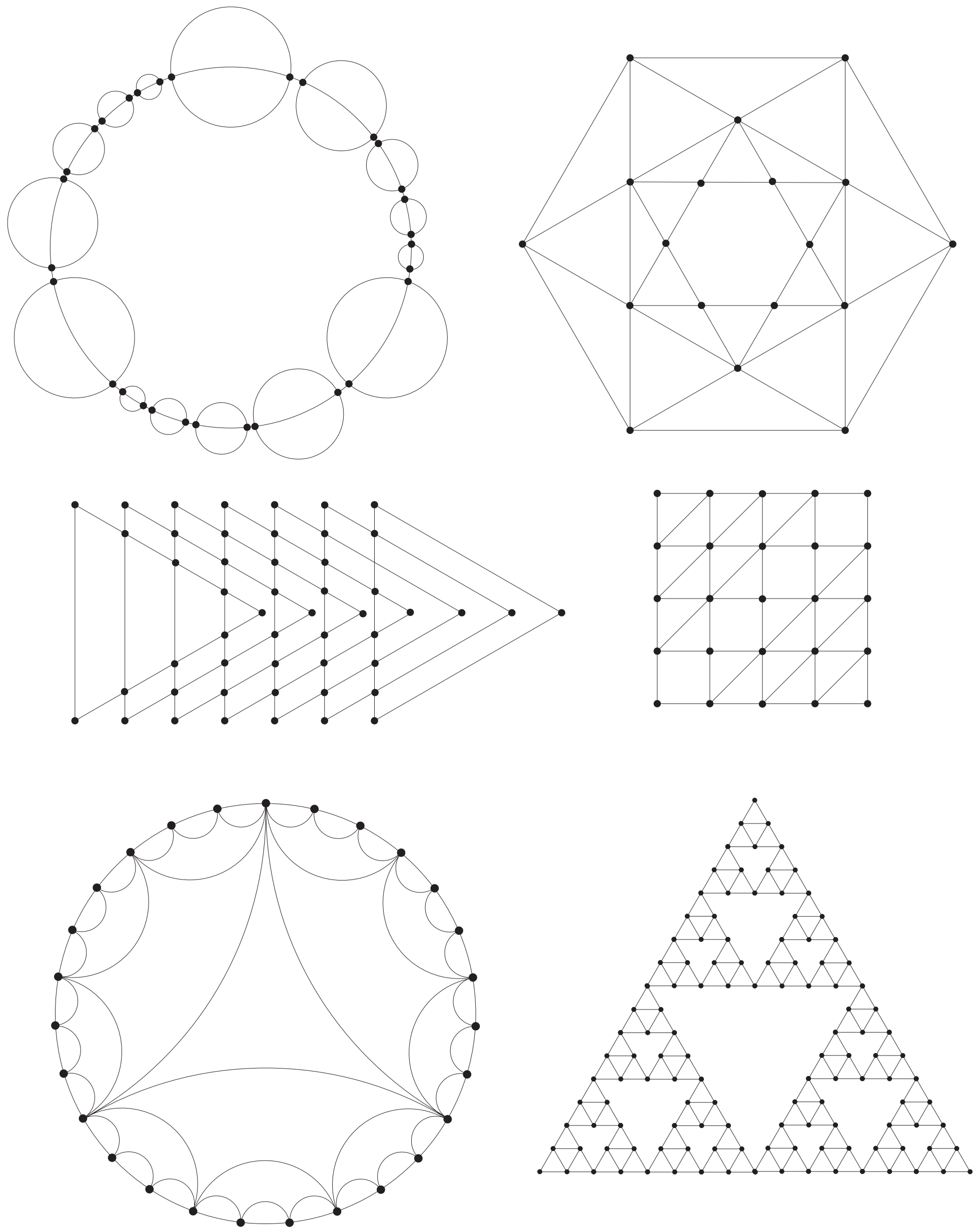

図 3.8: 難易度 3 again

一筆書き 難易度 4 図 3.9 が難易度 4 の問題です．よく考えてないとできません．

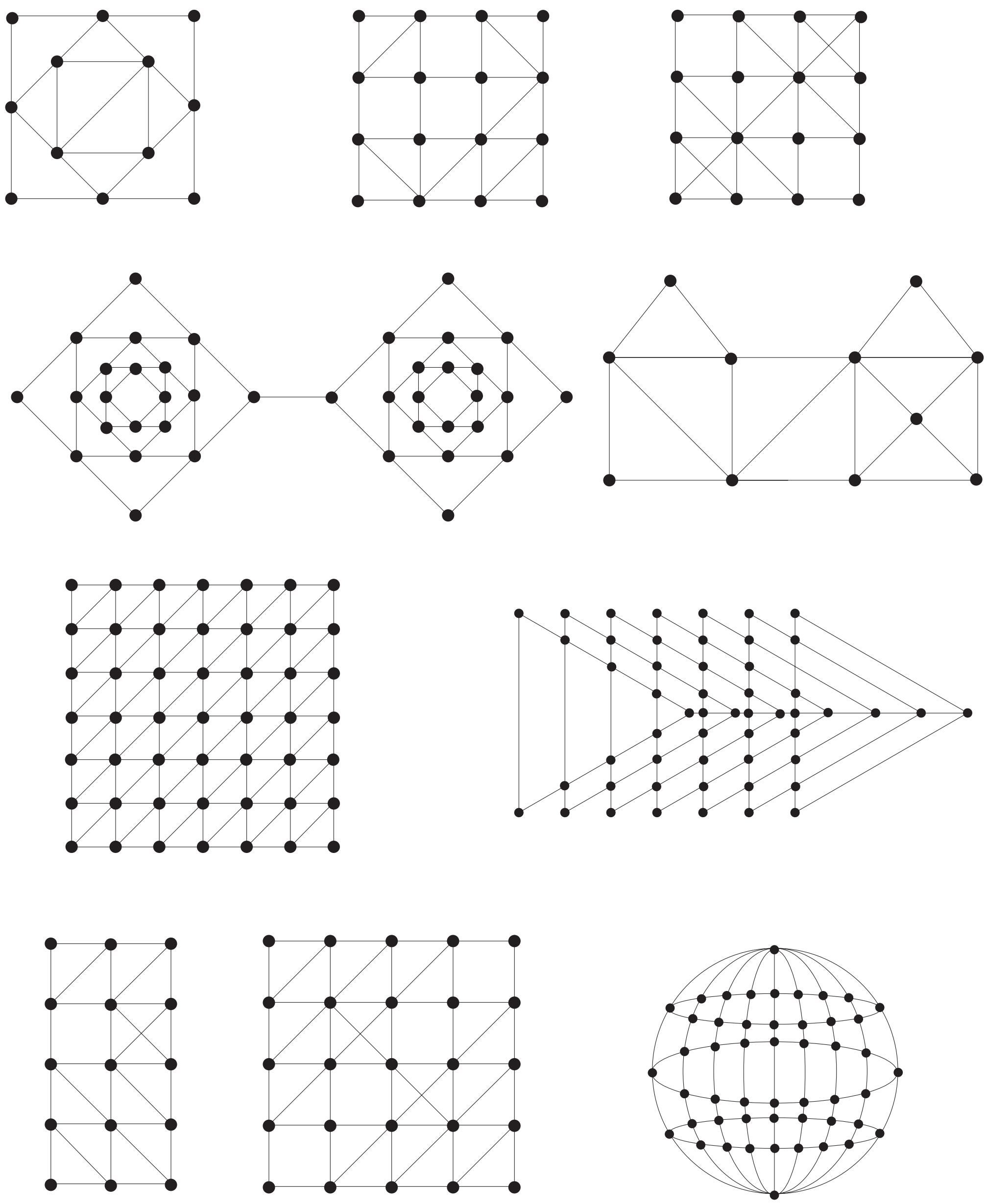

図 3.9: 難易度 4

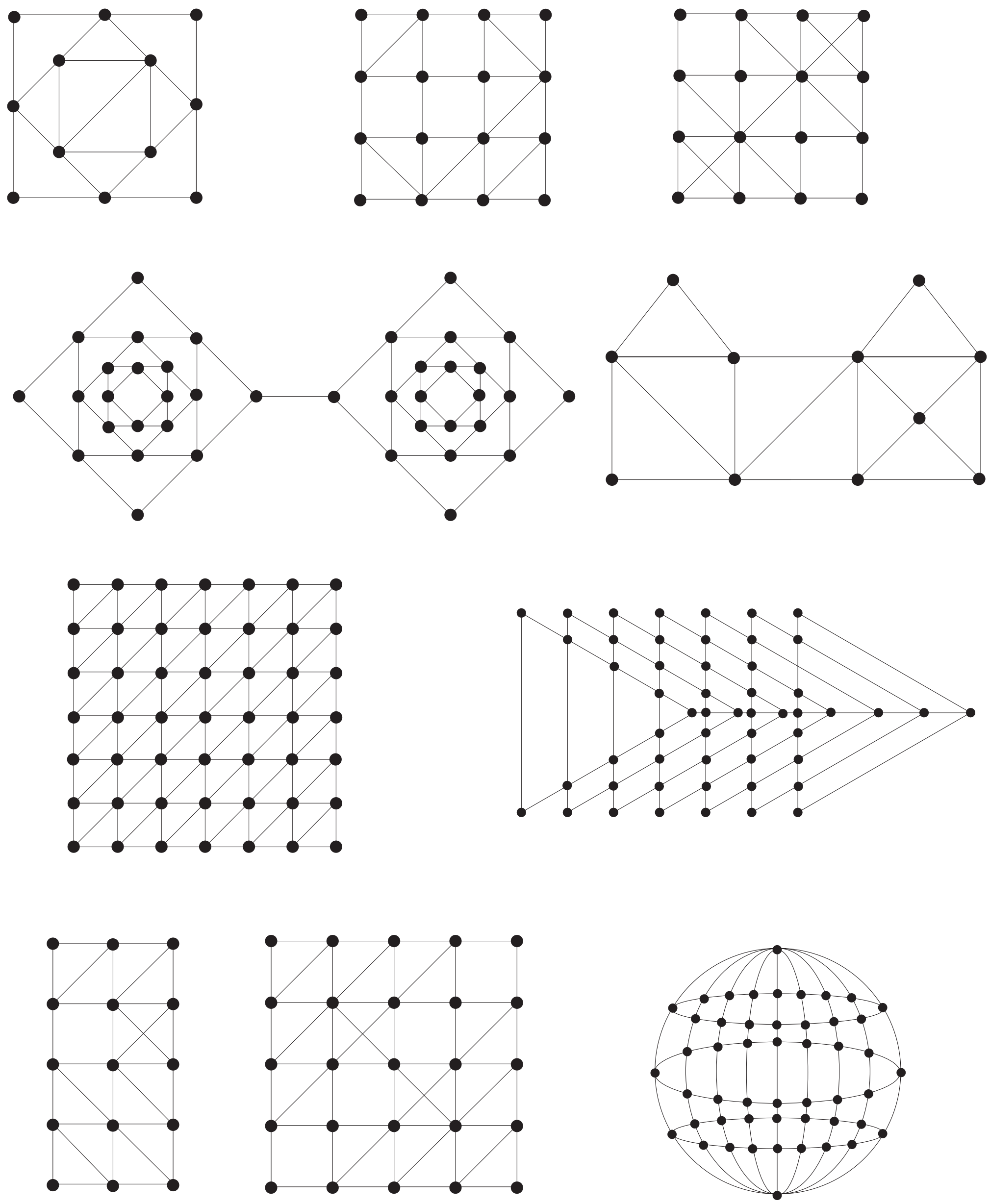

図 3.10: 難易度 4 again

3.3 一筆書きの仕方

初めに頂点に集まる辺の本数がすべて偶数の時を考えます．この時、好きな頂点を選んで一筆書きをしていきます．この時もうこれ以上一筆書きできないという状態はどのような状態でしょうか．

この様な場合は具体例を自分で作って実験をするのが理解する上で非常に大事です．

簡単な例を作っておきましたので考えてみましょう．

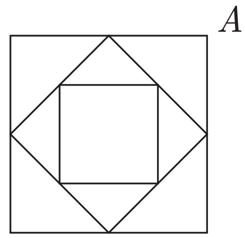

図 3.11: 頂点に集まる辺の本数がすべて偶数

図 3.11 で実験してみます．図 3.12 のように、A から出発して外側の正方形を 1 周して見ましょう．元に戻った A でもうこれ以上進めないことがわかりますね．

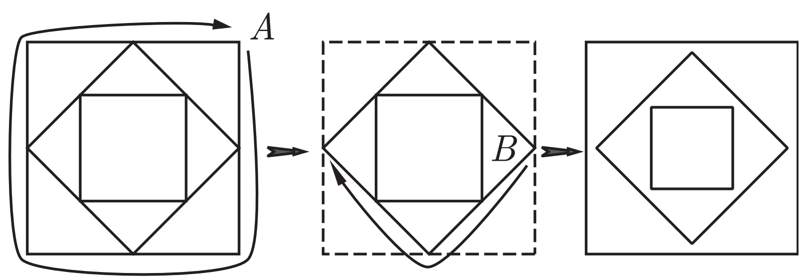

図 3.12: グラフの分割

一つの輪ができた事に気がついたでしょうか．でも、これではまだ通っていない所があるので一筆書きできた事にはなりませんね．

そこで、まだ通過していない所に注目します．頂点に集まる辺の本数はすべて偶数だという事に気がつきましたか．(偶数 − 偶数 = 偶数という事実を使っています．) なので、B から出発してまた同じ事を行なうことができます．

すると、このグラフはいくつかの輪に分解されることがわかります．では、これらのいくつかの輪からどうすれば一筆書きができるのでしょうか？

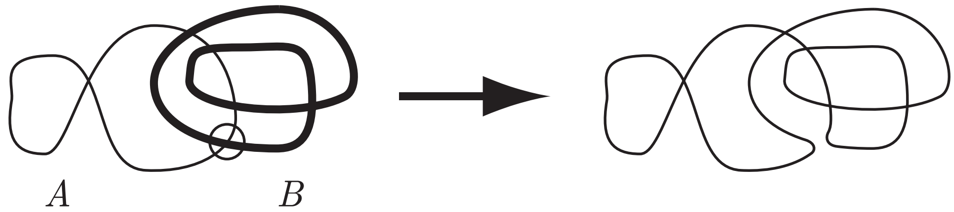

図 3.13: 二つの輪を一つにして

簡単のために輪が 2 つある場合を考えましょう．図 3.13 の様に回り道をすれば 2 つの輪が 1 つの輪に変わります．

この仕組みが理解できれば輪がいくつあっても大丈夫ですね．よって、頂点に集まる辺の本数がすべて偶数のグラフはどんなグラフでも一筆書き可能となります．図 3.1 の (ii) (v) 図 3.2 の G_3 がそうなので各自もう一度この理論にしたがって一筆書きしてみてください．図 3.1 (v) は輪がすぐに目に見える形で表現されていることに気がつきましたか？

今回はかなり簡単に一筆書きできたと思います．

次に頂点に集まる辺の本数が 2 つ奇数でそれ以外は偶数の時はどうなるでしょうか．新しい議論を始めないといけないでしょうか．

図 3.1 (iv) のグラフで具体的に考えてみます．仮想的に辺を 1 本図 3.14 の様に頂点に集まる辺の本数が奇数の 2 つの頂点を結ぶ様に付け加えます．(この辺は仮想的に付け加えてあるので他の辺の上を通ってもよい事に注意してください．また、他の辺とは交わりができない事に注意してください．) すると、頂点に集まる辺の本数はすべて偶数になりました．(奇数 + 奇数 = 偶数ということを使っています．)

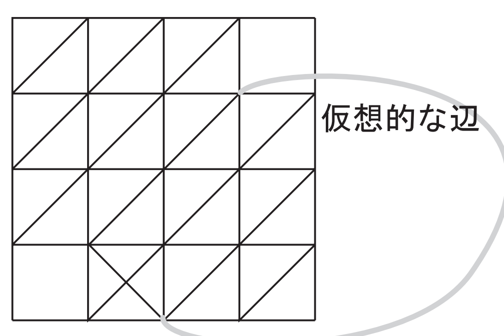

図 3.14: 仮想的な辺

するとこの新しいグラフは頂点に集まる辺の本数がすべて偶数となり一筆書きできるグラフになります.
そして、付け加えた辺を消してやれば元のグラフの一筆書きが得られます.

以上のことを理解すれば、どんなグラフでも一筆書きできるかどうかわかるし一筆書きできるグラフは一筆書きができるようになります.

レポート 5 一筆書きできる複雑なグラフを 3 つ以上作れ

レポート 6 一筆書きできない複雑なグラフを 3 つ以上つくり、なぜ一筆書きできないかを述べよ.

うめくさ図 3.15 で一筆書きするためにはどうすればいいでしょうか.

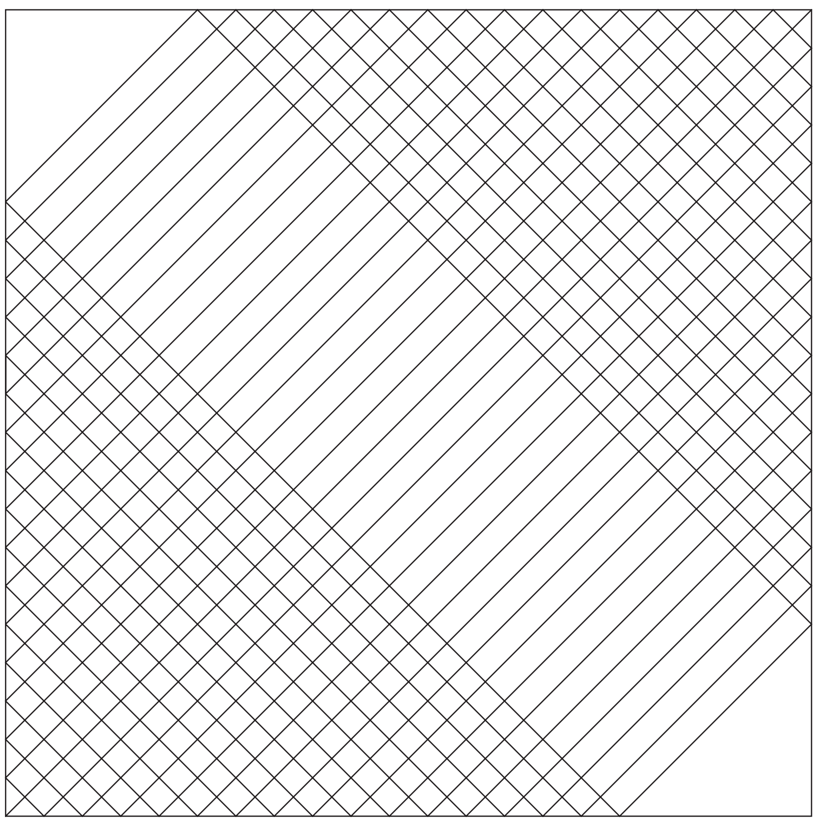

図 3.15: ちょっと複雑な一筆書き