

2 グラフの定義と応用

2.1 グラフの定義

グラフとは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形です。1章での一筆書きの図形などがグラフの例となります。

図 2.1 はグラフの例です。図 2.1 の最初の八角形のグラフを見てほしい。このグラフで頂点は八角形の8つの頂点だけであり、対角線が交わっているところは、頂点ではありません。この授業では頂点は点で表します。Planarity¹ という頂点を動かしてグラフを平らにするゲームを知れば、頂点と辺と辺との交差との違いがわかりやすいと思う。

練習 ノートにいくつかグラフを描いてみよう。また、図 2.1 の様に特徴を持ったグラフをいくつか作れ。

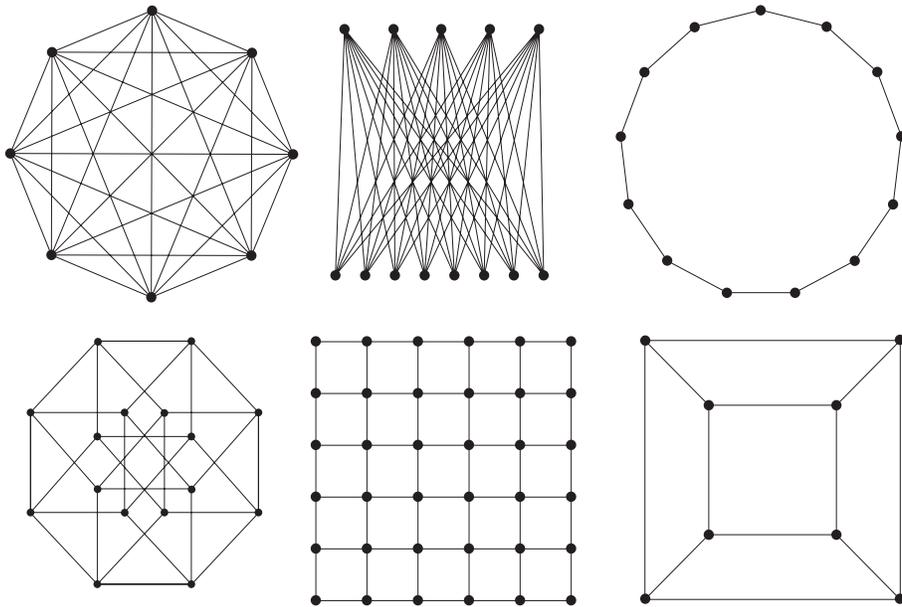


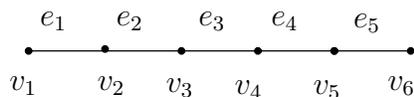
図 2.1: グラフ・グラフ・グラフ

2.2 グラフと電線

グラフは色々なものに応用できます。たとえば、電柱と電線を考えてみよう。電柱を頂点、電線を辺とすればグラフができます。

¹<http://www.planarity.net/>

下のように 6 本の電柱が直線上に並んで立っているときを考えよう．電線は何本ありますか？



では、つぎのように n 本の電柱が立っているとき電線は何本あるでしょうか？



わからない時は、 n が $1, 2, \dots, n$ というふうに考えていけばわかりますね．

電柱	1	2	3	4	5	...	n
電線							

では、ちょっと複雑になって図 2.2 の場合にはどうなりますか？(i) から (v) のグラフの電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．

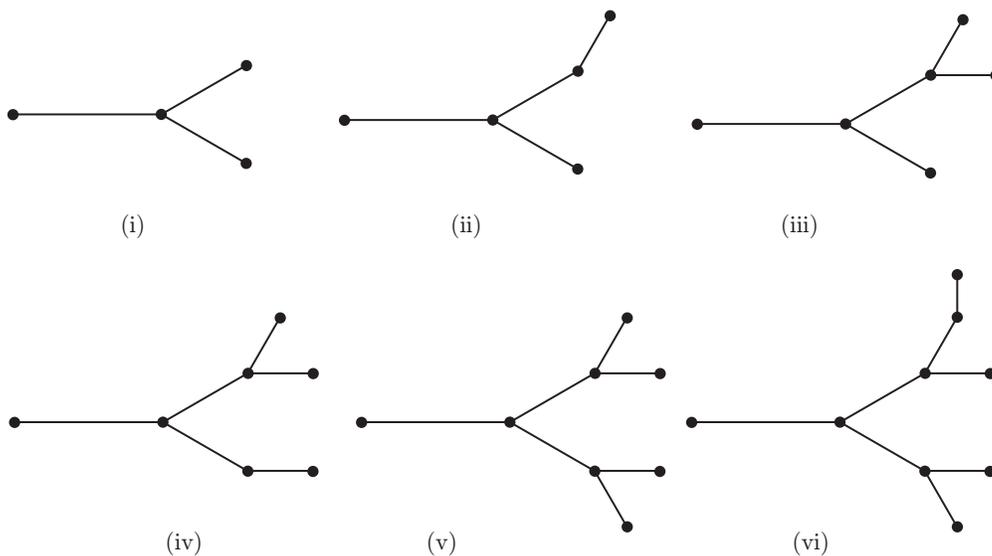


図 2.2: ちょっと複雑な電線

図 2.2 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
電柱						
電線						

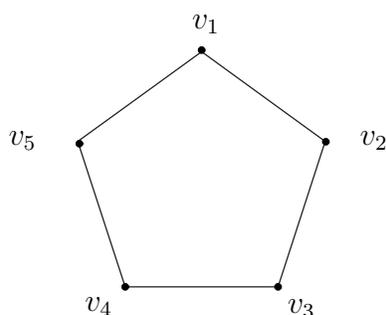
自分で図 2.2 の電線と電柱の例を拡張して電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください。何か関係が見つかりませんか？

電柱	9	10	11	12	13	...	n
電線							

問題 電線の数と電柱の数の関係を求めて、なぜそうなるかを説明しなさい。また、その説明を友達などに見せてその説明を理解してくれるか確かめてみなさい。理解できなければ、もっと良い説明になるようにしなさい。

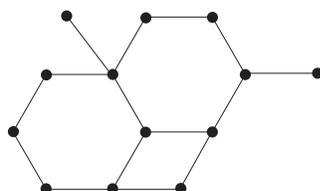
2.3 輪のある電線

次の図のように輪のような電柱と電線があった場合はどうなるでしょうか？

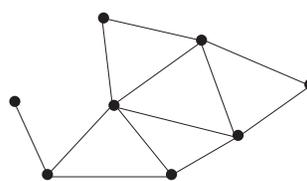


上のように 5 本の電柱があった場合には電線は何本ありますか？また、電柱が n 本あった場合に電線は何本あるでしょうか？ 次の空欄を埋めてください。

電柱	2	3	4	5	...	n
電線						



(A)



(B)

図 2.3: たくさんの電線

さらに、図 2.3 のように電柱と電線がありました。電柱と電線の間接関係はどうなるでしょうか？(A) と (B) のそれぞれの場合に電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい。

	A	B
電柱		
電線		

気がついたかもしれませんが、電柱と電線の間接関係は他に何か条件がないと求めることはできません。

レポート 1 どのような条件が考えましょう。ただし、考え方の一例を次の節でします。

レポート 2 山形県または好きな都道府県の国道からなるグラフを描け。国道を辺とみなして、いくつかの国道が交わっている点を頂点と考えよ。名古屋地下鉄の路線図²をグラフと考えて作成してみよ。ただし、すべての駅名を入れなくてよい。また、元気な学生は東京・パリ・ニューヨークなど、地下鉄が複雑に走っている都市の地下鉄の乗り換え図を作成してみよう。

2.4 さらに複雑な電線 (オイラーの公式を目指して)

前の節の最後で、複雑な電線を考えました。このような場合、どのように問題を考えていけば良いのかの一例を示す事にします。

初めにいきなり複雑なグラフを描いてもあまり手がかりは得られそうにありません。そこで、次の四角形からなるグラフで考えていきましょう。

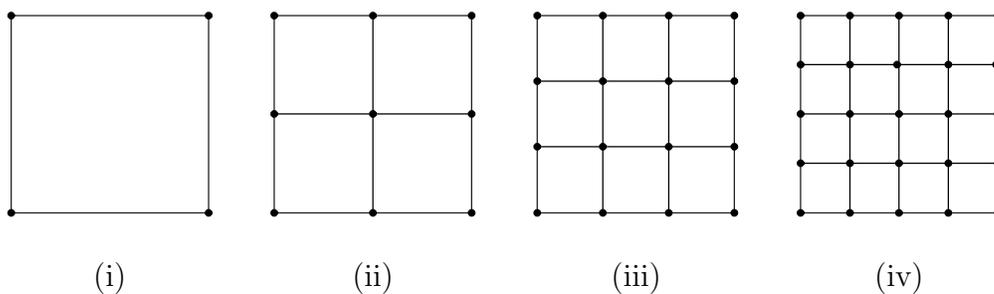


図 2.4: 正方形の電線

図 2.4 のグラフは格子状の形をしている正方形からなり正方形の辺が 1 つ、2 つ、3 つと分割されています。各々のグラフで一番小さな正方形を最小の正方形と

²路線図は時刻表やインターネットで検索すれば出てきます。

言う事にしよう．このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみよう．

グラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	...	
頂点数						
辺数						
面の数						

頂点数、辺数、面の数の間に関係がないだろうか？これらを足したり引いたり掛けたりして考えてほしい．

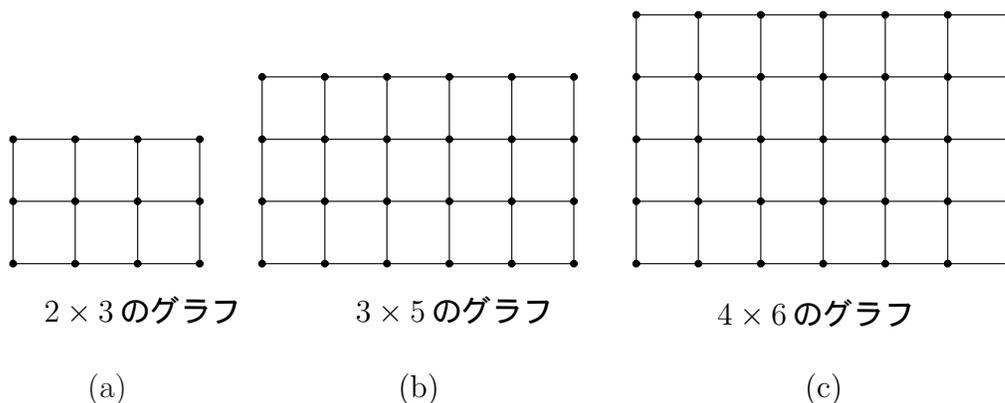


図 2.5: 四角形の電線

図 2.5 のグラフは最小の正方形の配置がちょっと複雑になったグラフです．このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形の数の間関係はどのようになっていますか．また、縦に m 個、横に n 個最小の正方形が配置されているグラフを $m \times n$ のグラフと言う事にする． $m \times n$ のグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみましょう．

図 2.5 のグラフ	(a)	(b)	(c)	...	$m \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					

このグラフは図 2.6 図 2.7 ようにして三角形からなる複雑なグラフにすることができます．これらのグラフにも前と同じように $n \times n$ の (三角形の) グラフと名前をつけて頂点数、辺数、最小の三角形で囲まれた面の数を求めてみましょう．

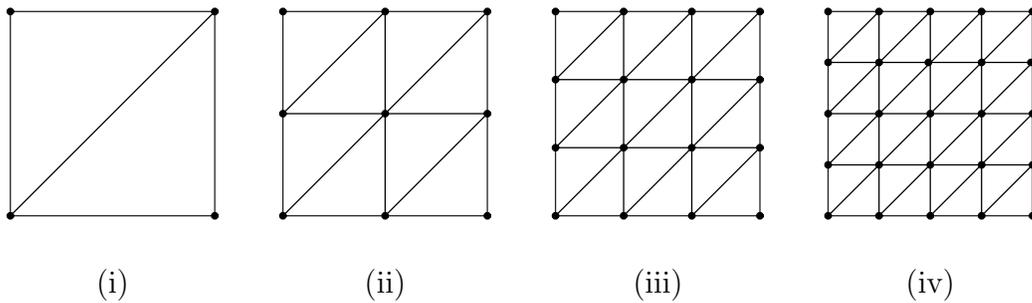


図 2.6: 正方形の中の三角形の電線

図 2.6 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	...	$n \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					

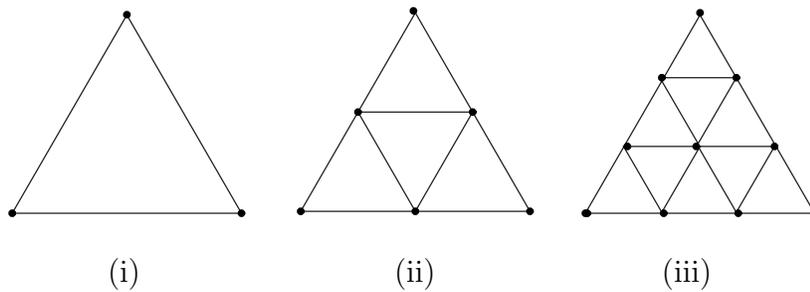


図 2.7: 三角形の中の三角形の電線

図 2.7 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	...
頂点数				
辺数				
面の数				

正方形の時も三角形の時も頂点数 v 、辺数 e 、面の数 f の関係は (求めた関係が正しかったら) 同じ関係になっています。 v 、 e 、 f の関係式を求めて、興味のある学生はなぜそうなるのか考えてください。この関係式がオイラー標数です。

2.5 向きの付いたグラフ

5つのチーム a, b, c, d, e でリーグ戦 (総当り戦) をした。その結果つぎの表のようになった。

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>		○	○	×	○
<i>b</i>	×		○	○	○
<i>c</i>	×	×		○	○
<i>d</i>	○	×	×		○
<i>e</i>	×	×	×	×	

これをグラフを使って表してみよう．図 2.8 のように矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね．

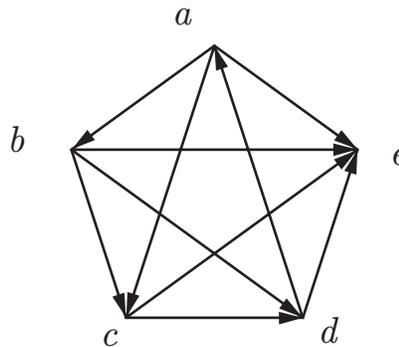


図 2.8: 向きの付いたグラフ

この様に辺に向きをつけて考えることもあります．

問題 *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F* の 6 チームがリーグ戦（総当たり戦）をしました．成績は *A* が四勝一敗、*B* が全勝、*C* が二勝三敗、*D* が三勝二敗でした．*E* は一度だけ勝っていますが、どのチームとの試合で勝ったのでしょうか？

この問題は、上のリーグ戦のグラフを使えば、簡単に解けます．6 チームなので正六角形の各頂点に *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F* を対応させます．

図 2.9 のグラフに条件に合うように辺に向きを書き入れていきましょう．ところが、*A* の頂点から書き入れようとしても、どのチームと勝ったかどは、わかりません．どのチームから考えればよいのでしょうか？

B は全勝しているので、残りのすべての頂点に対して *B* を始点とする矢印付きの辺で結びます．

A は四勝一敗なので *B* 以外とはすべて勝っているのですべての頂点に対して同様に矢印付きの辺で結びます．

D は三勝二敗なので *A* と *B* 以外の頂点に対して同様に矢印付きの辺で結ぶ事ができます．

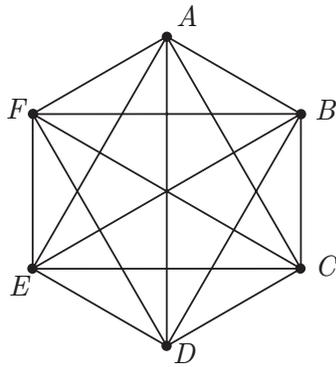


図 2.9: リーグ戦のグラフ

C は二勝三敗なので E と F の頂点に矢印つきの辺で結びます .
 すると、条件から E は 1 回だけ勝っているので残りの F の頂点と矢印つきの辺で
 結ぶ事になります . したがって、 E は F に勝ったことがわかります .

レポート 3 このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を
 考えよ .

2.6 入試問題のグラフ理論

次の入試問題は 1998 年の東京大学の後期の数学の入試問題から取ってきたもの
 です .

レポート 4 この入試問題を解け . (2) の問題は、なぜある n では不可能かを証明
 する必要があります . すなわちどのような仕方でも不可能であることを示さなけ
 ればなりません .

問題 グラフ $G = (V, W)$ とは有限個の頂点の集合 $V = \{P_1, \dots, P_n\}$ とそれらの間
 を結ぶ辺の集合 $W = \{E_1, \dots, E_m\}$ からなる集合とする . 各辺 E_j は丁度 2 つの頂
 点 P_{i_1}, P_{i_2} ($i_1 \neq i_2$) を持つ . 頂点以外での辺同士の交わりは考えない . さらに、
 各頂点には、白か黒の色がついていると仮定する .

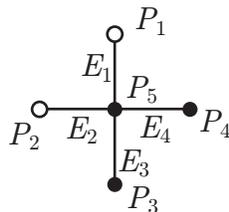


図1



図2

例えば、図1のグラフは頂点が $n = 5$ 個、辺が $m = 4$ 個あり、辺 $E_i (i = 1, \dots, 4)$ の頂点は P_i と P_5 である。 P_1, P_2 は白頂点であり、 P_3, P_4, P_5 は黒頂点である。

出発点とするグラフ G_1 (図2) は、 $n = 1, m = 0$ であり、ただ1つの頂点は白頂点であるとする。

与えられたグラフ $G = (V, W)$ から新しいグラフ $G' = (V', W')$ を作る2種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ1だけ増加する。

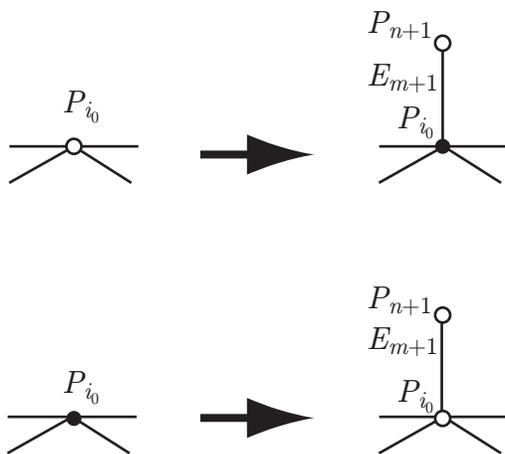


図3

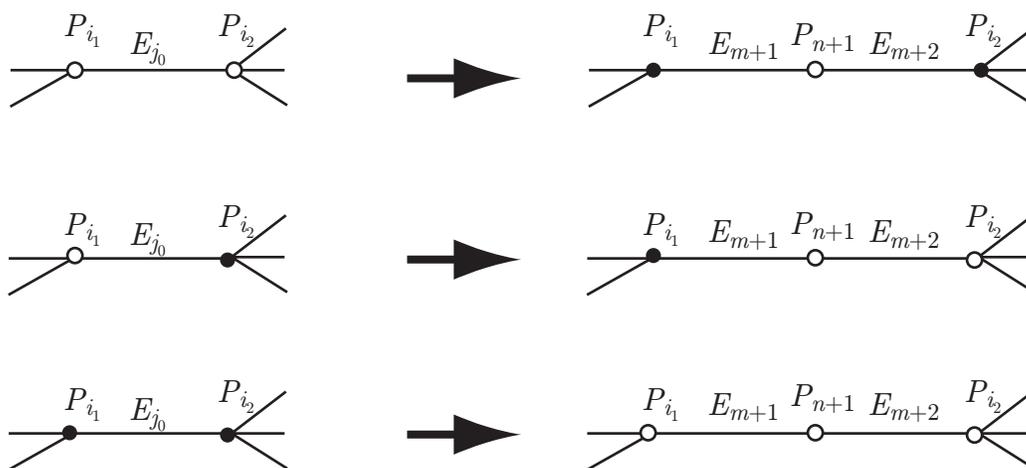


図4

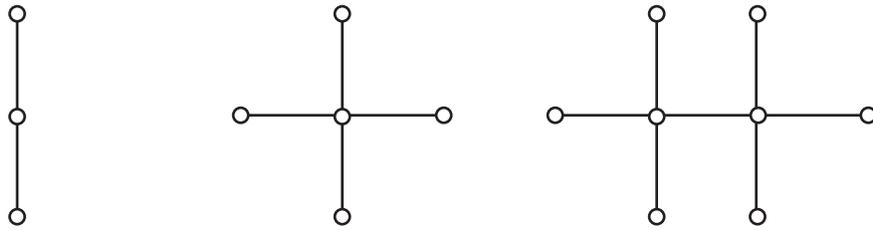


図5



図6

(操作1) この操作は G の頂点 P_{i_0} を1つ選ぶと定まる. V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする. W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする. E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし、 G' のそれ以外の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする. G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば、 G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる. それ以外の頂点の色は変化させない. また、 P_{n+1} は白頂点にする. (図3).

(操作2) この操作は G の辺 E_{j_0} を1つ選ぶと定まる. V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする. W' は W から E_{j_0} を取り去り、新しい辺 E_{m+1} 、 E_{m+2} を加えたものとする. E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき、 E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり、 E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする. G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする. G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば、 G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる. P_{i_2} についても同様に変化させる. それ以外の頂点の色は変化させない. また、 P_{n+1} は白頂点にする (図4).

出発点のグラフ G_1 にこれらの2種類の操作を有限回繰り返して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする. 以下の問題に答えよ.

(1) 図5の3つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ. ここで、すべての頂点の色は白である.

(2) n を自然数とするとき、 n 個の頂点を持つ図6のような棒状のグラフが可能グラフとなるために n の満たすべき必要十分条件を求めよ. ここで、すべての頂点の色は白である.