

11 マッチング

11.1 二つの頂点をペアにして

グラフ G において、マッチングとは、1本の辺で結ばれた二つの頂点をペアにすることです。ただし、ひとつの頂点を二つ以上の頂点とペアさせてはいけません。図 11.1 の各々のグラフに対して左側のグラフが元のグラフで右側のグラフで太線で与えられたのがマッチングである。ここでは、マッチングとは両端の頂点を含む辺の集合とみなして、太い線で表すことにしよう。また、ひとつのグラフに対してマッチングはたくさんあることに注意しよう。

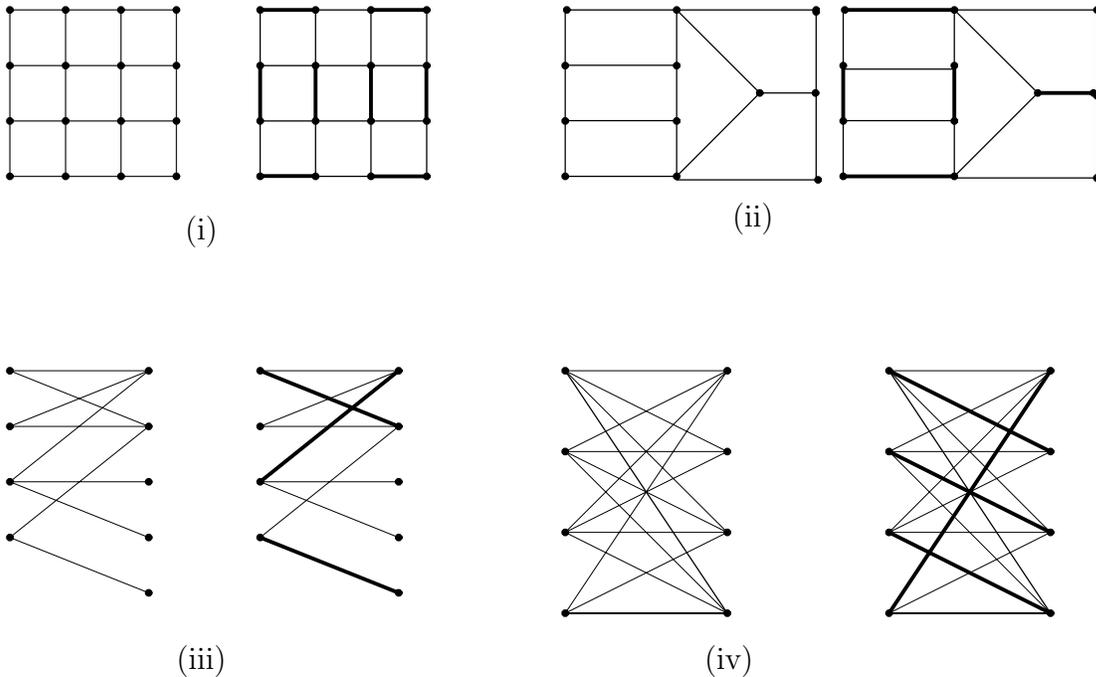


図 11.1: マッチング

練習 図 11.2 のグラフに対してマッチングを見つけよ。

図 11.1 の (i) と (iv) を見ると、すべての頂点がマッチングに含まれています。マッチングではすべての頂点が含まれているマッチングを考えることが多い。そこで、すべての頂点が含まれるマッチングについて考えよう。頂点の個数が奇数個だとすべての頂点を含むマッチングはないことがわかります。

問題 図 11.3 ですべての頂点を含むマッチングを持つものを探し出せ。さらにそのマッチングの辺を赤色で塗りなさい。また、そのようなマッチングを持たないグラフはなぜ持たないかを考えなさい。

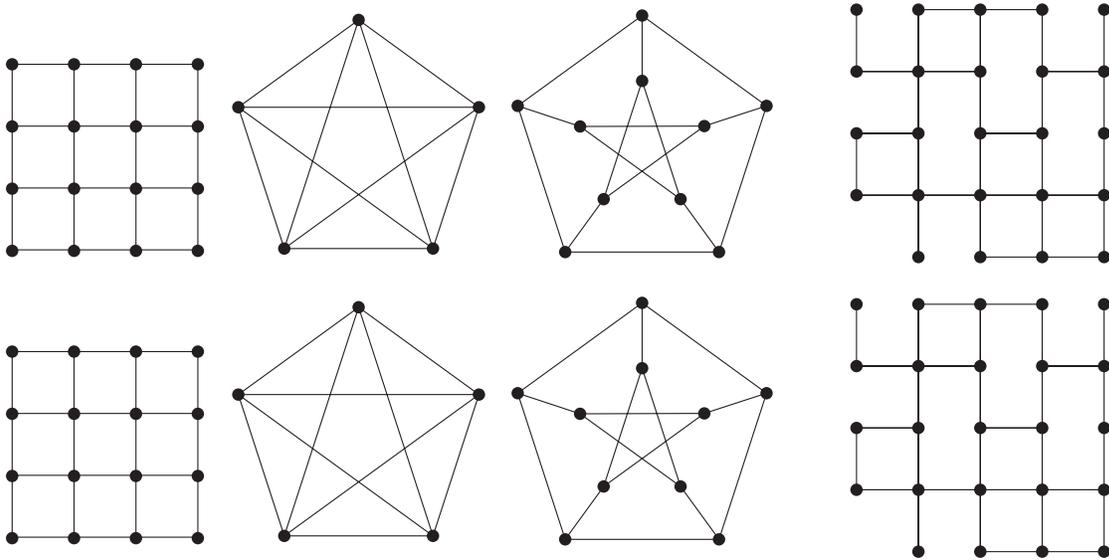


図 11.2: マッチングの練習

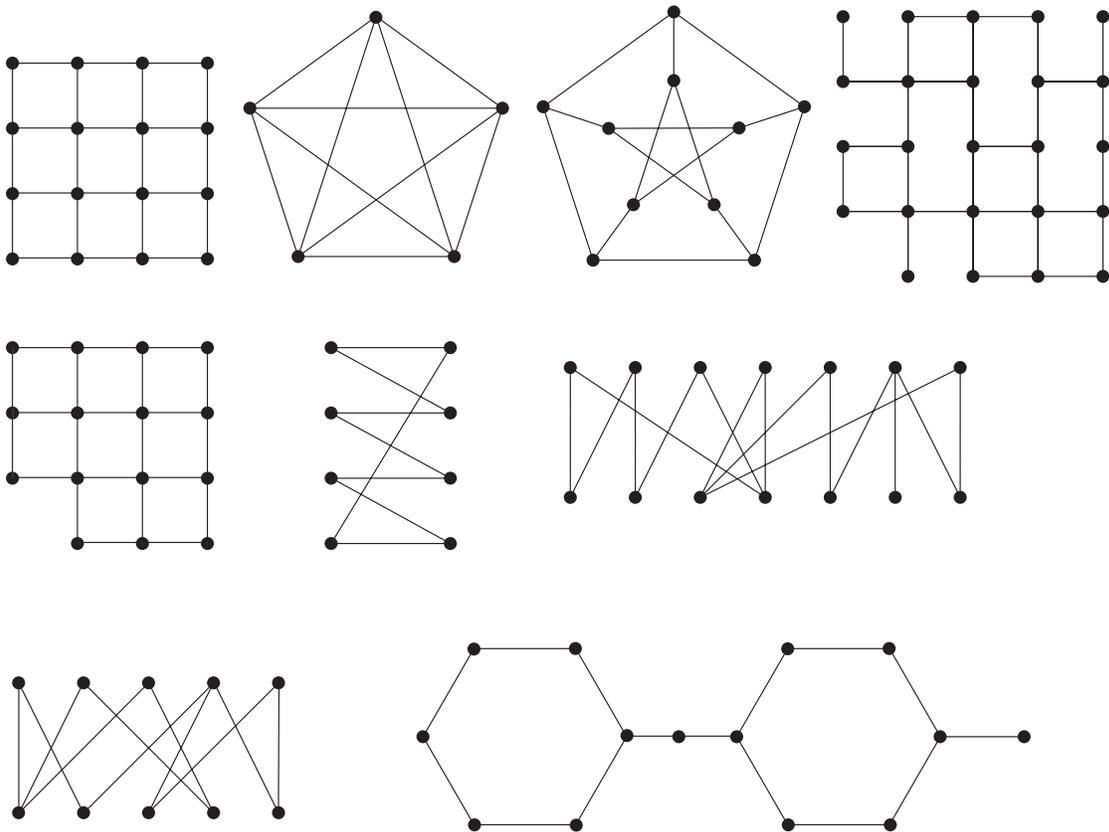


図 11.3: すべての頂点を含むマッチング

11.2 二部グラフのマッチング

頂点をすべて含むマッチングを考える時には、二部グラフ²⁹を考えることが多いので、図 11.4 の二部グラフがそのようなマッチングを持つかどうか考えましょう。

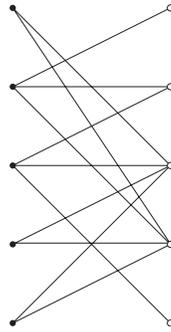


図 11.4: 二部グラフのマッチング

少し試行錯誤すれば、なさそうだということがわかりますね。図 11.5(i) の 1 の頂点に注目します。辺が 1 本しかでていないので、マッチングに対応する辺が一意に決まります。その辺のもうひとつの頂点 2 と頂点 3 に注目します 図 11.5(ii)。頂点 3 は頂点 2 と頂点 4 とだけつながっていますが、頂点 2 はもうすでに使われているので、頂点 4 とマッチングします 図 11.5(iii)。すると頂点 5 とマッチングする頂点がなくなりました。図 11.5(iv)。

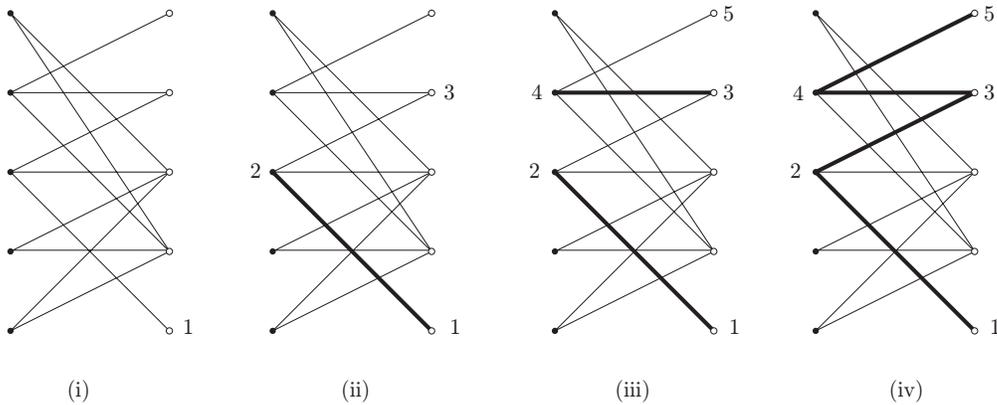


図 11.5: 二部グラフのマッチング

すると、二部グラフのマッチングを考える時に図 11.5(iv) の 1 から 5 の頂点と太い線で描かれた辺があると、すべての頂点を含むマッチングはないということがわかりますね。一般に図 11.5(iv) のような右側の頂点と左側の頂点の個数が異

²⁹二部グラフとは図 11.4 のように頂点が二つに別れるグラフです。

なるような部分グラフを持つ二部グラフは頂点をすべて含むマッチングを持たないことがわかります。

練習 二部グラフで、両側の頂点の個数が等しいが、すべての頂点を含むマッチングがないものを3つ作れ。

では、図 11.5(iv) のような部分グラフがない時、すべての辺を含むマッチングがあるのだろうか？ 図 11.5(iv) のような³⁰部分グラフを持たない両側の頂点の個数が等しい二部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持つことが知られています。Hall の定理とか結婚定理と呼ばれています。また、マッチングを見つけるアルゴリズム (ハンガリー法など) があります。

アルゴリズムの解説はしませんが、ここでは、簡単な例に対して目で見ながらすべての頂点を含むマッチングを見つけてみましょう。あるマッチングで失敗しても次のようにすれば、失敗したマッチングから良いマッチングを見つけることができます。

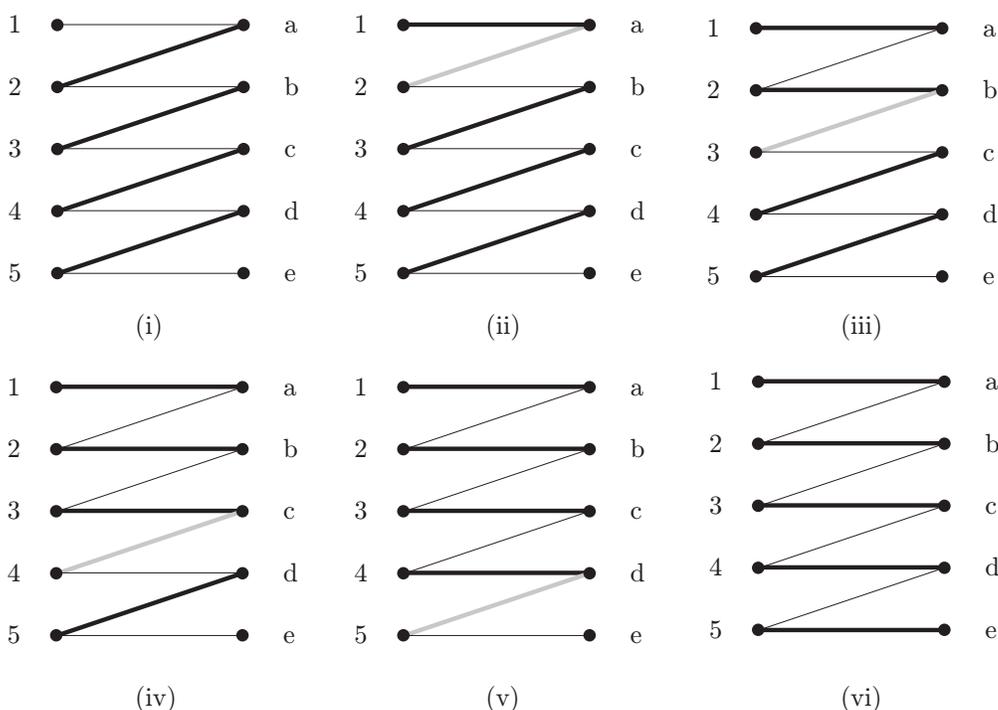


図 11.6: マッチングのを見つけ方

図 11.6(i) のグラフにマッチングを与えました。頂点 1 と e を含んでいません。そこで、(i) のマッチングを改良して、これより良いマッチングを作っていきます。

- (1) 図 11.6(ii) のように 1 と a を結ぶ辺をマッチングに加えます。
- (2) a ではマッチングの辺がかぶるでの古い方を除く。

³⁰ちゃんとした定義はしませんがなんとなくでわかってください。

(3) 2ではマッチングの辺がないので、2とbを結ぶ辺を加える。(ただし、bの取り方にあいまいさがある。次の練習参照)

(4) 以下同様に行う。図 11.6(i)-(vi) 参照。

すると、頂点の個数が2つ増えたマッチングが得られます。今回はこれですべての頂点を含むマッチングが得られましたが、そうでなければこの操作を繰り返します³¹。

練習 図 11.7 のマッチングを改良して、すべての頂点を含むマッチングを見つけよ。

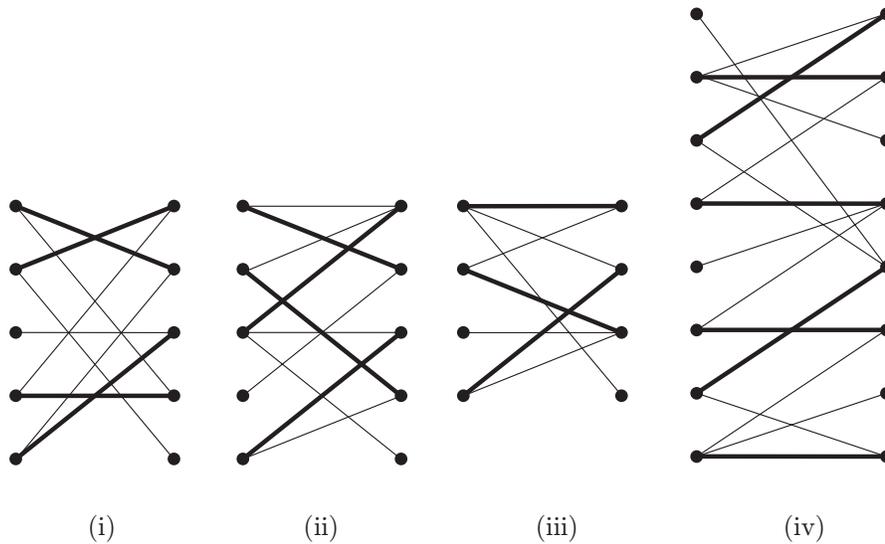


図 11.7: すべての頂点を含むマッチングのつけて

11.3 クイズ

二部グラフはクイズを解くためにも利用することができます。

問題 1 友達が 3 組結婚することになった。その 3 組に誰と結婚するのか聞いた。

(1) A 君に聞くと、A 君は X さんと結婚するという。

(2) X さんに聞くと、X さんは C 君だという。

(3) C 君に聞くと、C 君は Z さんと結婚するという。

どうも、変なので後で確かめると、みんな嘘をついていたらしい。以上から誰と誰が結婚するか、調べてほしい。

これらの問題をグラフ理論のマッチングを使ってといてみよう。

³¹ハンガリー法と呼ばれるマッチングを見つけるアルゴリズムです。正確な表現はグラフ理論の専門書でハンガリー法を調べてください。

[問題 1 の解法] 男性が 3 人、女性も 3 人居るので、二部グラフを考えればいいことがわかります。

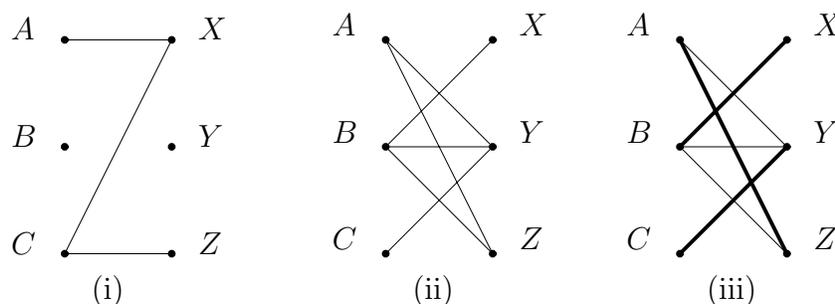


図 11.8: クイズの二部グラフ

図 11.8 (i) が証言から作った二部グラフです。各人の証言から結婚する人を辺で結んでいます。ところが、証言は嘘だったので、実は、この辺以外の人と結婚する可能性があるので (ii) でそのグラフを作成しました。(ii) の C と X の注目します。辺が 1 本しか出ていないのでそれぞれ Y と B と結婚することがわかりました。残りの情報から A と Z が結婚することがわかります。

問題 2 またあるとき四組のカップルが結婚するという。嘘をつかれると、面倒なので嘘をつかないでね、と頼むと以下のような答えが返ってきた。

- (1) X さんは B 君か C 君と結婚する
 - (2) Y さんは A 君か B 君と結婚する
 - (3) Z さんは A 君か C 君と結婚する
 - (4) B くんは W さんか Y さんと結婚する
- 以上にデータから誰と誰が結婚するか当ててほしい。

[問題 2 の解法]

図 11.9 (i) が証言から作った二部グラフです。そして、条件 (1)–(4) に対応する辺が 2 本あり、それらから 1 本を選ぶ事になります。B さんの条件から X さんは B さんと結婚できないので C さんと結婚する事がわかります。図 11.9 (ii)。Z に注目すれば C とは結婚できないので A と結婚する事がわかります。Y に注目すると A とはできないので B と結婚します。D と W は、どちらも誰と結婚するかの情報がないが、最後まで残ったのでこのペアで結婚します。図 11.9 (iii)。注意してほしいのは Y さんは B 君と結婚すると言っていて、B 君も Y さんと結婚すると言っています。しかし、これだけの条件からは Y さんと B 君が結婚すると言う事は言えません。今回はたまたま、結婚するのですが。

レポート 34 男の子 5 組 (A,B,C,D,E) と女の子 5 組 (V,W,X,Y,Z) が結婚することになった。それを知ったある人が誰と結婚するのかを聞きに行った。

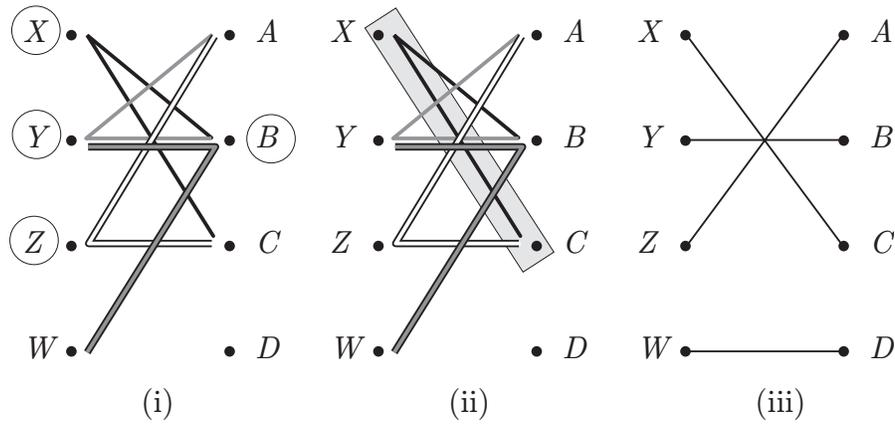


図 11.9: 二部グラフ

- A 君「D 君は W さんと結婚するそうですよ．僕は X さんとしますよ」
 B 君「C 君も W さんと結婚するって言っていましたよ．僕は V さんとします」
 C 君「B 君は実は Z さんと結婚するのですよ．僕は X さんとします」
 D 君「C 君は Y さんと結婚します．僕は V さんとします」
 E 君「A 君は V さんと結婚します．僕は Y さんと結婚します」

どうも変な回答なのですが、僕はみんな 1 つは本当の事を言って、1 つは嘘を言っていることに気がきました．では、誰と誰が結婚するのでしょうか？

レポート 35 またあるとき男の子 4 人 (A,B,C,D) と女の子 4 人 (W,X,Y,Z) が結婚することになった．それを知ったある人がまた誰と結婚するか聞きに言った．しかし、嘘をつかれるのには懲りているので嘘は言わないでと頼んだら、次の事を言われた．では、誰と誰が結婚するのでしょうか？

- A 君は「X さんか、Y さんか、Z さんと結婚します .」
 B 君は「僕も X さんか、Y さんか、Z さんと結婚します .」
 C 君は「W さんか、X さんか、Y さんと結婚します .」
 W さんは「A 君か、B 君か、D 君と結婚します .」
 Y さんは「A 君か、B 君か、D 君と結婚します .」
 Z さんは「A 君か、C 君か、D 君と結婚します」

と言われました．では、誰と誰が結婚するのでしょうか？

11.4 ダンス部のマッチング

大学のダンス部の新入部員のパートナーを決めるために、ためしに 1 時間ダンスをすることになった．身長やダンスの種類により組むことができるペアに次のように制限がでた．Juanes と Shakira、Juanes と Thalía、Enrique Iglesias と Shakira、

Enrique Iglesias と Thalia、Alejandro Sanz と Thalia がダンスする相手の候補になった。では、何時間あれば、ダンスできるか？



図 11.10: ダンス部の部員

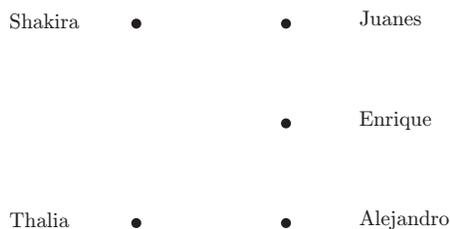


図 11.11: ダンス部のマッチング

[解法] まず、男子・女子で部員を二つに分けた二部グラフを考えて、ダンスできる相手と辺で結ぶ。図 11.11。そして 1 回でダンスできるマッチングを青色で塗り、2 回目でダンスできるマッチングを赤色で塗ってというようにして、何回掛かるかを調べる。また、ある頂点から出る辺の数だけは色が必要である事に注意しよう。

これを、応用すると色々な場面でどれだけの組み合わせを考えないといけないかがわかります。

問題 図 11.12 では色は何色必要でしょうか。

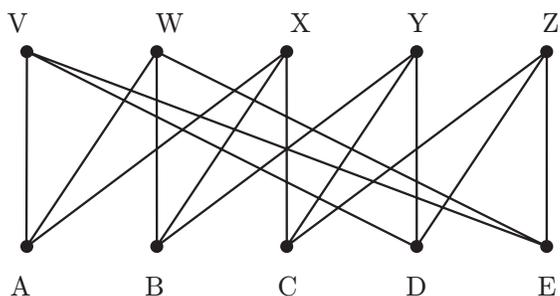


図 11.12: マッチングの色分け