

# 1 はじめに (2004 年度後期)

この授業はグラフ理論の初歩について解説する．グラフ理論は双曲線・直線・三角関数とかのグラフを扱うわけでもなくまた、円グラフ・棒グラフとか折れ線グラフとかをあつかう理論でもない．グラフ理論では、グラフとは頂点と辺からなる図形の事である．たとえば、あみだくじで縦と横の線の交わりを頂点としたようなものである．そのようなグラフについて研究するのがグラフ理論である．グラフ理論が数学にどのように使われるかを見てみよう．

また、この授業では、グラフ理論を通して、数学的な考察を身につけることを目標とする．したがって、単なる知識を覚えるということにはつながらない．

ケーニヒスベルクの7つの橋の問題を聞いたことがあると思う．

図1の地図は東プロシアの古都ケーニヒスベルク、旧ソ連のカリーニングラードとして知られる町である．

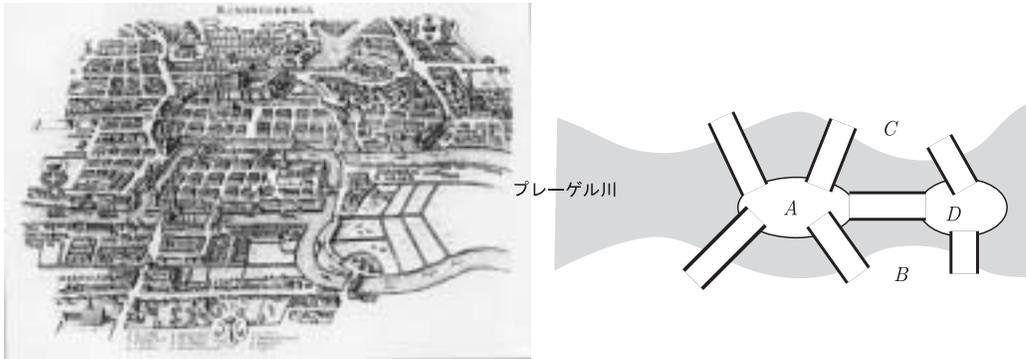


図 1: ケーニヒスベルクの橋

そこを流れるプレーゲル川は町を中央のクナイホフと呼ばれる島を含む4つの地区に分割している．そこに7つの橋が掛けられている．問題はこの七つの橋を、ちょうど1度ずつ渡るような渡り方が在るかというものである．各自、図1で試してもらいたい．

多くの市民が実際に橋を渡り問題の渡り方を試したが誰一人として、成功したものはいなかったと言う．いつしか、この橋を一度ずつ渡る事は不可能だと思われていた．しかし、スイス生まれの数学者オイラー (L. Euler, 1707-1783) が数学的に論証するまで誰一人として証明できなかった．

オイラーは 1736 年の論文の中でこの問題では島の大きさとか橋の長さ・幅は関係ない事を指摘した．ここに、距離・面積・体積・合同などを中心とする幾何学とは異なる幾何学が生まれたのであった．

そこで、問題を簡略化するために島を点に橋を辺とする図形を考える．

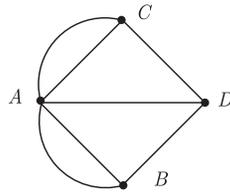


図 2: ケーニヒスベルクの橋

それが図 2 である．すると、この問題はこのグラフが一筆書きできるかどうかという問題になる．

一筆書き 線描きの図形を、同じ線を二度以上通らず紙面から筆を離さないで書くこと．また、その書き方( 広辞苑 )

数学ではこのように要らない情報をいかになくすか、また必要な情報をどのように表すかも重要な点である．

数学の問題では答えを自分で考えるのも面白いので各自でちょっと考えてみよう．と言ってもちょっと戸惑うかもしれないので、図 3 にいくつかグラフを出すので一筆書きできるかどうか考えてみて欲しい．

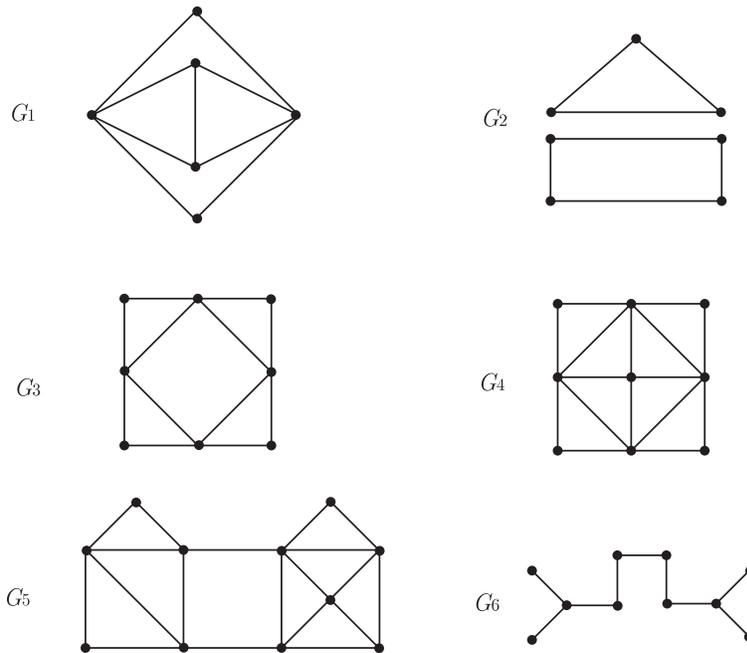


図 3: 一筆書き

一筆書きできるグラフはわりかし簡単に見つかるだろうけど、できそうに無いグラフはなぜできないのだろうか？

答えを聞くとすぐにわかるけど、自分で考えて答えをだすほうが良いので（もし、オイラーより早く生まれていればオイラーの代わりに君の名前が歴史に残っていたかもしれない）もう少しヒントを出そう。

1. 各グラフに対し各頂点に集まっている辺の数を書き込んでみよう
2. 偶数ならば青、奇数ならば赤で頂点を塗り分けよう。

次に一筆書きできたグラフを見てみよう。赤と青はどうなっていますか？

解答は授業でする事にします。

また、図 30 の一筆書きを 5 分以内にできるようにそのうち講義をしたいと思えます。

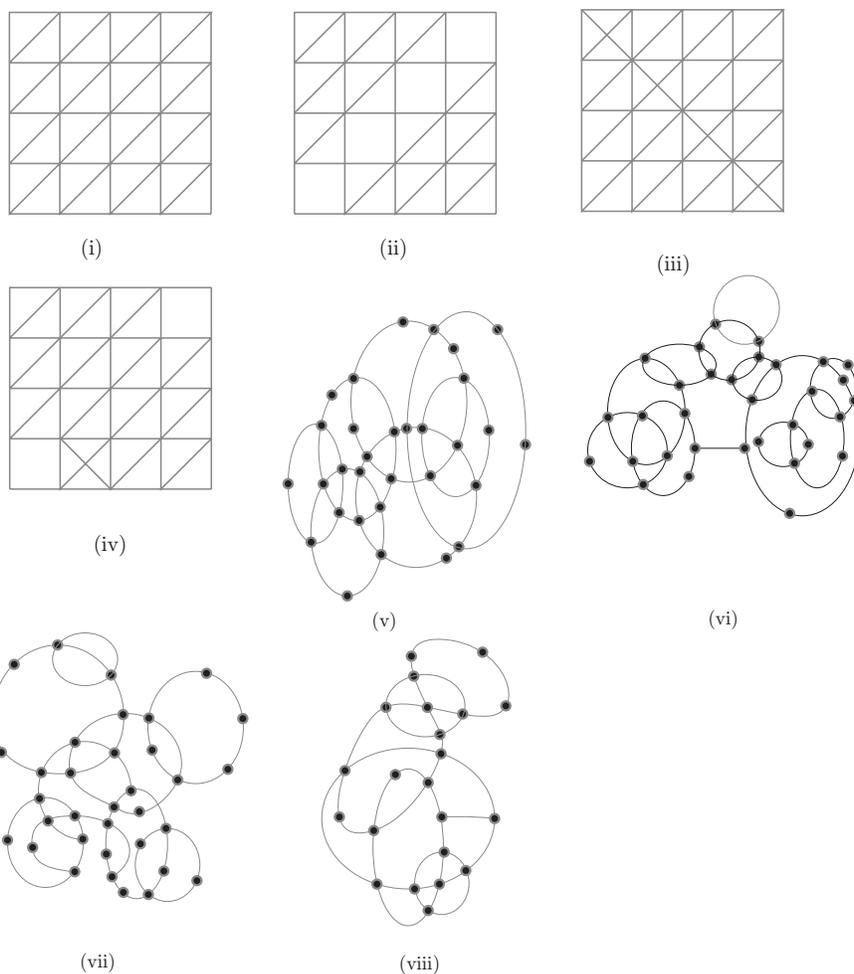


図 4: 一筆書きできるかな

宿題1. 大学の建物などで、階段にある電灯のスイッチを考えるとみよう. どの段のスイッチでもすべての電灯がついたり消えたりします. このときの回路はどうなっているか考えてください. こうゆうのもグラフ理論の1つです.

2. また電車を考えましょう. ドアの外側にちいさな電灯があります. これはドアがひらくと電気がつき, すべてのドアが閉まると電気が消えます. この回路も考えてください.

これらの答えが気になる人は、今日一日考えてみましょう. それでも気になる人はこの講義を引き続き聴いてください.

この問題の応用としては、郵便局員になって各々の家をまわるとき、どの様にまわれば一番効率が良いとか博物館の展示室の設計でどのような建物を建てればお客さんが見やすいかとかがありますね.

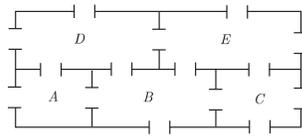


図 5: ドアのある家

問 図 5 ですべてのドアを一回だけ通ってすべての部屋をまわることができますか?

殺人事件

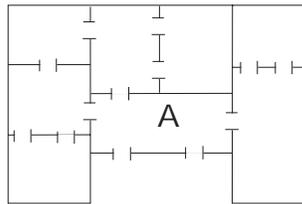


図 6: 殺人事件

豪邸 図 6 で殺人事件がありました. 殺人は A の部屋で行われました. 執事が庭師が A の部屋に入りすぐにおなじドアから出てきたと言いました. 庭師は「そんなことはねえ. 家に A の部屋から入りすべてのドアを一回だけ通ってまた外に出たんだ. 執事が見た男であるはずがない」と言いました. 誰が嘘を言っているのでしょうか.

追記 この授業では、はさみ、のり、色鉛筆、電卓、定規、コンパスなどをもって来た方がよい.