

微分方程式

【変数分離形】

$$\boxed{\text{y の式}} \frac{dy}{dx} = \boxed{\text{x の式}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{y の式}} dy = \boxed{\text{x の式}} dx$$

【例題】 $\frac{dy}{dx} = 3(y-1)^{\frac{2}{3}}$ を解け.

$$\boxed{\text{y の式}} dy = \boxed{\text{x の式}} dx \quad \text{で表すと,} \quad \boxed{\phantom{\text{y の式}}} dy = \boxed{\phantom{\text{x の式}}} dx.$$

ただし, 分母は 0 でないので,

積分して,

$$\int \boxed{\phantom{\text{y の式}}} dy = \int \boxed{\phantom{\text{x の式}}} dx$$

$$\boxed{\phantom{\text{y の式}}} = \boxed{\phantom{\text{x の式}}}$$

$$\boxed{\phantom{\text{y の式}}} = \boxed{\phantom{\text{x の式}}} -$$

でないとき

と より解は

$$\boxed{\phantom{\text{y の式}}}, \quad \boxed{\phantom{\text{x の式}}} \text{となる.}$$

【一次反応】

$$\frac{dA}{dt} = -kA \quad k: \text{定数}$$

【例題 90】 初めのラジウムの量を とする.

時刻 t の時のラジウムの量を A とすると、一次反応より

$$\frac{dA}{dt} = -kA$$

を解く. A は t の関数に注意する. 変数分離形より

$$\frac{1}{A} dA = -k dt$$

x で積分して, $\int \frac{1}{A} dA = \int -k dt$

$$\ln A = -kt + C$$

$$A = e^{-kt + C} = e^{-kt} e^C$$

$$A = e^{-kt} e^C$$

$$A = e^{-kt} e^C$$

$t = 0$ のとき, $A = A_0$ より,

$$A_0 = e^{-k \cdot 0} e^C = e^C$$

よって, $C = \ln A_0$

$$C = \ln A_0$$

$$A = e^{-kt} e^{\ln A_0}$$

$$A = A_0 e^{-kt}$$

$t = 1600$ のとき, $A = \frac{1}{2}A_0$ より

$$\boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}} = \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

$$\boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}} = \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

両辺の \log をとって,

$$\boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}} \text{ から } k = \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}.$$

$$\text{よって } A = \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}.$$

(1) $t = 3200$ のとき

$$A = \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

$$= \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

$$= \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

(2) $t = 800$ のとき

$$A = \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

$$= \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

$$= \boxed{\phantom{A_0 e^{-kt}}}$$

$e^{\log a} = a$ は \log の定義です. 教科書 p. 22 でも, なかなか覚えられない

$y = e^{\log a}$ において \log をとると $\log y =$ より,

$y =$ となる. したがって, $e^{\log a} =$ である.

1 階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の一般解は,

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left\{ \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + C \right\} \quad (C \text{ は任意定数})$$

【例題 92】(2) $xy' - y = \log x$ y' の係数が 1 でないことに注意.

y' の係数を 1 に直すと, . ($\log x$ より $x > 0$)

$p(x) =$, $q(x) =$ より

, $\int p(x) dx =$. $e^{-\int p(x) dx} =$

$e^{\int p(x) dx} q(x) =$ より

$$\int e^{\int p(x) dx} q(x) dx =$$
 $=$

$$=$$
 .

よって, $y =$.