合成関数の微分

$y = \mathrm{Sin}^{-1}(x^3+5)$ を微分せよ.

Step 1. t とおく式は $t = \boxed{}$

$\dfrac{dt}{dx}$ を求めると $\dfrac{dt}{dx} = \boxed{} \cdots (1)$

Step 2. y を t で表すと $y = \boxed{}$

$\dfrac{dy}{dt}$ を求めると $\dfrac{dy}{dt} = \boxed{} \cdots (2)$

Step 3. $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \boxed{(1)} \times \boxed{(2)}$

$= \boxed{}$

t を x に戻して

$= \boxed{}$

計算用紙

$y = \log(5x^2 - 3)$ を微分せよ.

Step 1.　t とおく式は　$t = \boxed{}$

$\dfrac{dt}{dx}$ を求めると　$\dfrac{dt}{dx} = \boxed{} \cdots (1)$

Step 2.　y を t で表すと　$y = \boxed{}$

$\dfrac{dy}{dt}$ を求めると　$\dfrac{dy}{dt} = \boxed{} \cdots (2)$

Step 3.　$\dfrac{dy}{dx}$ を求めると　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \boxed{(1)} \times \boxed{(2)}$

$= \boxed{}$

t を x に戻して

$= \boxed{}$

計算用紙

合成関数の微分 (解答)

$y = \mathrm{Sin}^{-1}(x^3+5)$ を微分せよ.

Step 1.　　t とおく式は　$t = \boxed{x^3+5}$

$\dfrac{dt}{dx}$ を求めると　$\dfrac{dt}{dx} = \boxed{3x^2} \cdots (1)$

Step 2.　　y を t で表すと　$y = \boxed{\mathrm{Sin}^{-1}t}$

$\dfrac{dy}{dt}$ を求めると　$\dfrac{dy}{dt} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} \cdots (2)$

Step 3.　　$\dfrac{dy}{dx}$ を求めると　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \boxed{(1)} \times \boxed{(2)}$

$$= \boxed{3x^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$$

t を x に戻して

$$= \boxed{\frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+5)^2}}}$$

計算用紙

$y = \log(5x^2 - 3)$ を微分せよ.

Step 1. t とおく式は $t = \boxed{5x^2 - 3}$

$\dfrac{dt}{dx}$ を求めると $\dfrac{dt}{dx} = \boxed{5 \cdot 2x} \cdots (1)$

Step 2. y を t で表すと $y = \boxed{\log t}$

$\dfrac{dy}{dt}$ を求めると $\dfrac{dy}{dt} = \boxed{\dfrac{1}{t}} \cdots (2)$

Step 3. $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \boxed{(1)} \times \boxed{(2)}$

$$= \boxed{10x \times \frac{1}{t}}$$

t を x に戻して

$$= \boxed{\frac{10x}{5x^2 - 3}}$$

計算用紙

導関数を求めよ

(1) $y = \cos^5 x$　(2) $y = (\log x)^7$　(3) $y = \log(\log x)$

☞ t と置く式がすぐに見つからない場合です.

(1) 式を書き直すと $y = (\cos x)^5$ となります. したがって括弧の中の式 $\cos x$ を t とおく.

(2) (1) で括弧の中の式を t とおけば良い事がわかったので $t = \log x$ とおく.

(3) $\log$ が 2 つあるので混乱しないようにしよう. 括弧の中の $\log$ だけを t とおくと, $y = \log t$ となる.

解答

(1) $y' = 5(-\sin x)\cos^4 x$　(2) $y' = \frac{7}{x}(\log x)^6$

(3) $t = \log x$ より $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$. $y = \log t$ より $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$. よって $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$.

☞ 括弧がある場合または式を変形して括弧を使って表した場合, 括弧の中の式を t とおけば多くの場合うまくいく.

$f'(x)$ と $f(ax+b)$ の微分

問 次の導関数を求めよ.

(1) $y=(3x+1)^5$ (2) $y=\sin(2x+7)$ (3) $y=\log(5x-2)$ (4) $y=\mathrm{Sin}^{-1}(7x-3)$

解答

(1) $3\cdot 5(3x+1)^4$ (2) $2\cos(2x+7)$ (3) $\dfrac{5}{5x-2}$ (4) $\dfrac{7}{\sqrt{1-(7x-3)^2}}$

☞ どれも x の係数が前に付いているね.

$t=ax+b$ とおいて合成関数の微分法を行うと, $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$ となります.

簡単な式なので覚えておくと良い.

☞ でも, $1-x$ などの時, x の前のマイナスを忘れる学生がいるので注意しよう. 例えば $y=(3-x)^5$ の時は, $y'=-5(3-x)^4$ となる.

$y = x^3$, $y = 3^x$ の導関数.

☞ x がどこにあるか注意しよう.

$y = ○^{△}$ において, x が含まれている○と △ に斜線を入れよう.

$y = ●^{△}$ の時は, 公式 $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$ を使う.

$y = ○^{▲}$ の時は, 公式 $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \log a$ を使う.

$y = x^3$ の時は, $y = ●^{△}$ となる. よって, $y' = 3x^2$ となる.

$y = 3^x$ の時は, $y = ○^{▲}$ となる. よって, $y' = 3^x \log 3$ となる.

$y = ●^{▲}$ の時は, 対数微分を行う.

問 次の導関数を求めよ.

(1) $y = x^5$ (2) $y = 5^x$ (3) $y = 7^{2x+3}$ (4) $y = (2x+3)^7$

(5) $y = x^{\pi}$ (6) $y = \sqrt{5}^{\,x}$

解答(1) $y' = 5x^4$ (2) $y' = 5^x \log 5$ (3) $y' = 2 \cdot 7^{2x+3} \log 7$ (4) $y' = 2 \cdot 7(2x+3)^6$

(5) $y' = \pi x^{\pi-1}$ (6) $y' = \sqrt{5}^{\,x} \log \sqrt{5}$

対数微分

$y = x^x$ を微分せよ. $\Rightarrow$ $y = ●^{▲}$ の場合である.

Step 1. 両辺の対数をとる.

$$\boxed{} \; y = \boxed{} \; x^x$$

$$= x \times \log x \qquad (\log a^p = p \log a \text{ を使った})$$

Step 2. 両辺を微分する.

$$\frac{d(\log y)}{dx} = (x \times \log x)' \cdots (2) \qquad \left(\text{左辺は } y \text{ の関数のため} \frac{d}{dx} \text{を使って表した}\right)$$

左辺 $\dfrac{d(\log y)}{dx}$ は y の関数 $\log y$ を x で微分しているので, このままでは微分することは不可能である.

合成関数の微分法を使うと, 左辺は

$$\frac{d(\log y)}{dx} = \frac{d(\log y)}{dy} \times \boxed{}$$

$$= \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} \qquad \text{となる.}$$

☞ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$ において $dy = d(\log y)$, $dt = dy$ と置き換えた.

$\log y$ を y で微分すると $\dfrac{1}{y}$ である.

Step 3. 右辺は, $(x \times \log x)' = \boxed{}$ より

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1)$$

$y = x^x$を代入して

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{}$$

対数微分 (解答)

$y = x^x$ を微分せよ. $\Rightarrow$ $y = \bullet^{\blacktriangle}$ の場合である.

Step 1. 両辺の対数をとる.

$$\boxed{\log}\ y = \boxed{\log}\ x^x$$

$$= x \times \log x \qquad (\log a^p = p \log a \text{ を使った})$$

Step 2. 両辺を微分する.

$$\frac{d(\log y)}{dx} = (x \times \log x)' \qquad \left(\text{左辺は } y \text{ の関数のため} \frac{d}{dx} \text{を使って表した}\right)$$

左辺 $\dfrac{d(\log y)}{dx}$ は y の関数 $\log y$ を x で微分しているので, このままでは微分することは不可能である.

合成関数の微分法を使うと, 左辺は

$$\frac{d(\log y)}{dx} = \frac{d(\log y)}{dy} \times \boxed{\frac{dy}{dx}}$$

$$= \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} \qquad \text{となる.}$$

☞ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$ において $dy = d(\log y)$, $dt = dy$ と置き換えた.
$\log y$ を y で微分すると $\dfrac{1}{y}$ である.

Step 3. 右辺は, $(x \times \log x)' = \boxed{\log x + 1}$ より

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1)$$

$y = x^x$を代入して

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{x^x(\log x + 1)}$$

導関数を求めよ

(1) $y = x^{3x}$ (2) $y = x^{\sin x}$ (3) $y = x^{\log x}$

解答 (1) $\log y = 3x \log x$ より $y' = (3\log x + 3)x^{3x}$.

(2) $\log y = \sin x \cdot \log x$ より $y' = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) x^{\sin x}$.

(3) $\log y = \log x \times \log x$ より $y' = \dfrac{2\log x}{x} \times x^{\log x}$.

☞ $\dfrac{d(\log y)}{dx} = \dfrac{y'}{y}$ に気がついただろうか.

☞ $1-(x+5)^2$ などを展開する必要ない.
例えば, $x=7$ の時 $1-(x+5)^2$ は $1-(7+5)^2=-143$ と簡単に計算できるからである.
展開した式 $-x^2-10x-24$ の方が手間がかかる.