

## 10 マッチング

### 10.1 2つの頂点をペアにして

グラフ  $G$  のマッチングとは, 1本の辺で結ばれた2つの頂点をペアにすることです. ただし, ひとつの頂点を2つ以上の頂点とペアさせてはいけません.

グラフのマッチングは一般にたくさんあります.

図 10.1 はグラフとそのマッチングを表す辺を太線で表しています.

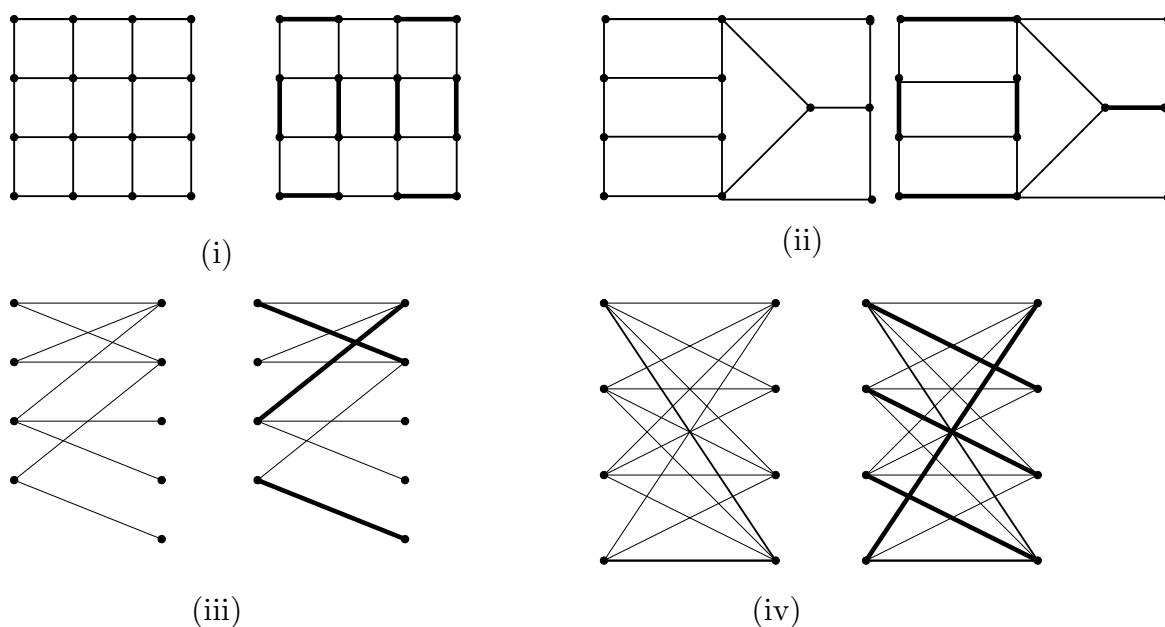


図 10.1 マッチング

練習 図 10.2 のグラフのマッチングを与えよ.

図 10.1 の (i) と (iv) を見ると, すべての頂点がマッチングに含まれています.

すべての頂点が含まれているマッチングを考えることがよくあります.

2つの頂点をマッチングさせるので, 頂点が奇数個のときはすべての頂点を含むマッチングはありません.

問題 図 10.3 ですべての頂点を含むマッチングを持つものはどれですか.

すべての頂点を含むマッチングを持たないグラフはなぜ持たないかを考えましょう.

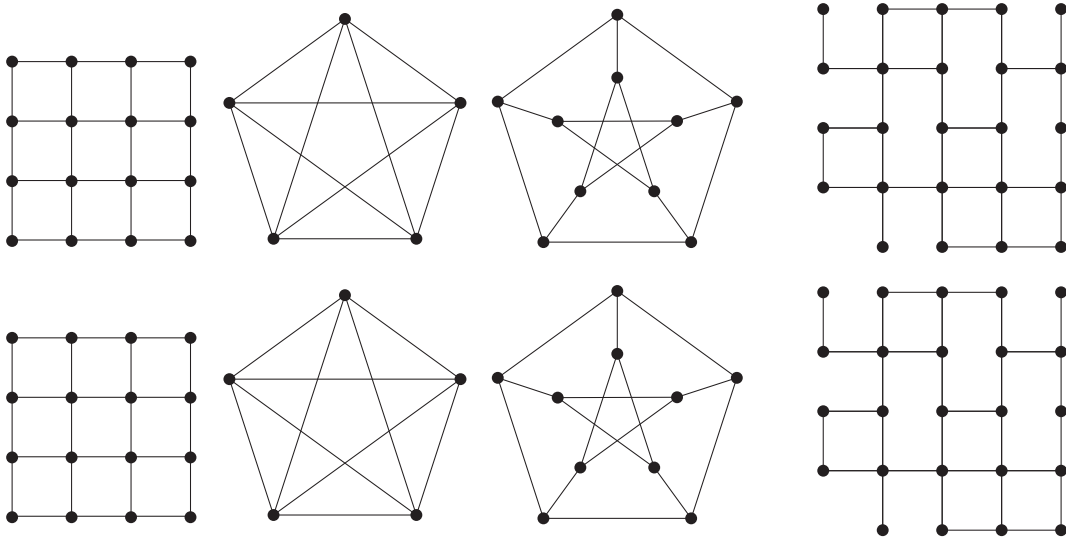


図 10.2 マッチングの練習

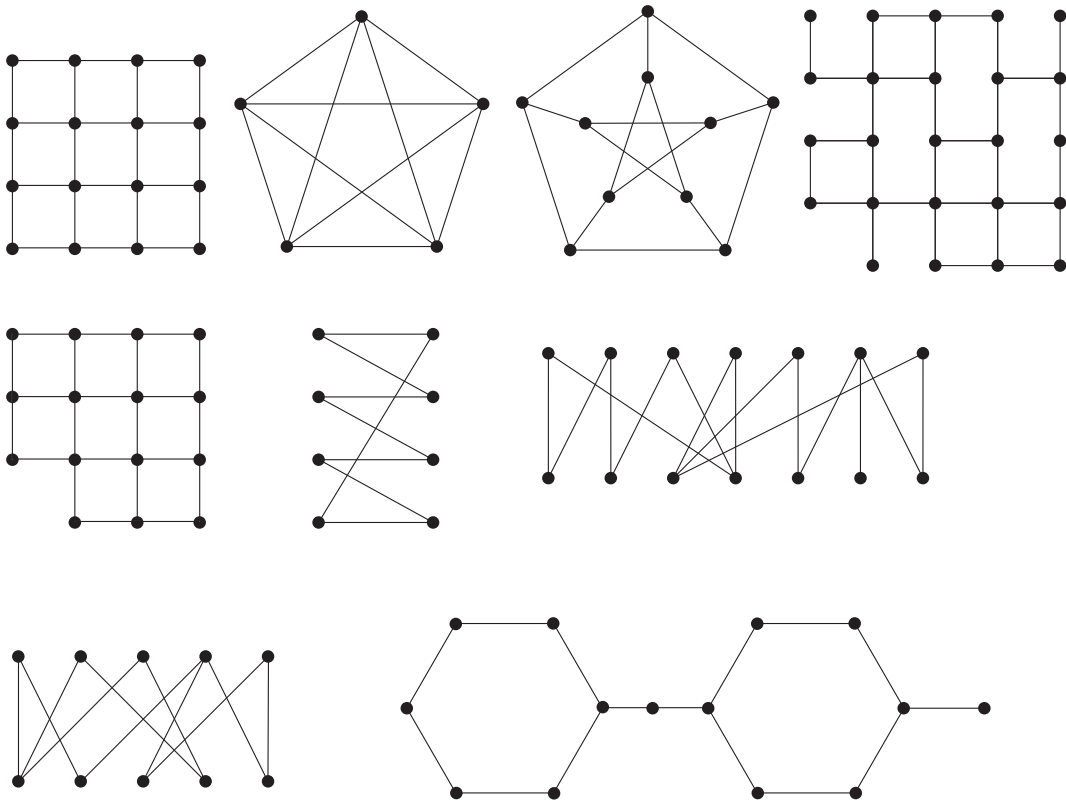


図 10.3 すべての頂点を含むマッチング

## 10.2 2部グラフのマッチング

2部グラフ<sup>\*1</sup>ではすべての頂点を含むマッチングを考えることが多い。

問 図 10.4 の 2 部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持ちますか。

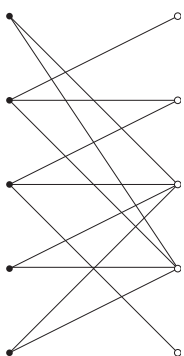


図 10.4 2部グラフのマッチング

解答 すべての頂点を含むマッチングを持ちません。

図 10.5 (i) の頂点 1 に注目します。頂点から辺が 1 本しか出ていないのでマッチングに対応する辺が 1 つに決まります。

マッチングした頂点 2 とそれと辺でつながっている頂点 3 に注目します 図 10.5 (ii)。頂点 3 は頂点 2 と頂点 4 とだけつながっていますが、頂点 2 はもうすでに使われているので、頂点 4 とマッチングします 図 10.5 (iii)。

すると頂点 5 とマッチングする頂点がなくなりました 図 10.5 (iv)。

すべての頂点を含むマッチングがないことが証明できました。

2部グラフのマッチングで、図 10.5 (iv) の 1 から 5 の頂点と太い線で描かれた辺があると、すべての頂点を含むマッチングはないということがわかります。

一般に図 10.5 (iv) のような右側の頂点とそれとつながっている左側の頂点の個数が異なるような部分グラフを持つ 2 部グラフは頂点をすべて含むマッチングを持たないことがわかっています。

練習 2 部グラフで、両側の頂点の個数が等しいが、すべての頂点を含むマッチングがないものを 3 つ作れ。

<sup>\*1</sup> 2 部グラフとは図 10.4 のように頂点が 2 つに別れるグラフです。

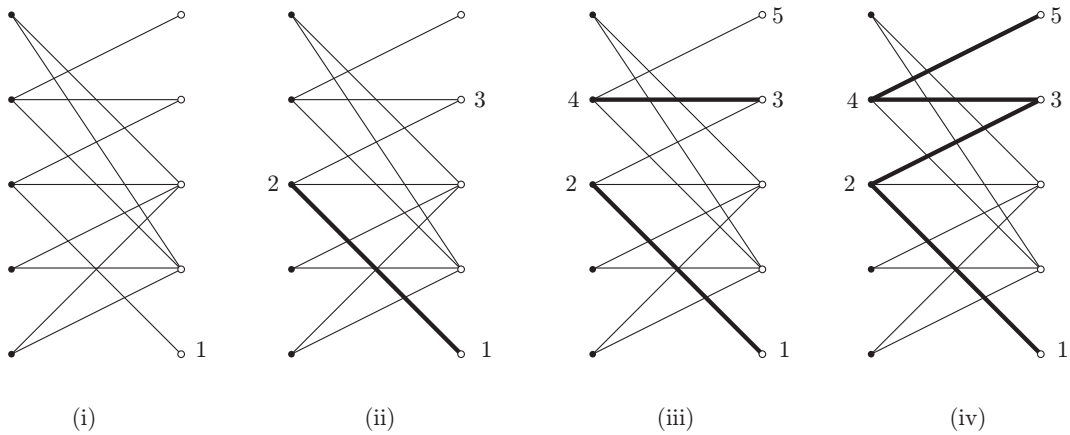


図 10.5 2部グラフのマッチング

では, 図 10.5 (iv) のような部分グラフがないとき, すべての辺を含むマッチングがあるのでしょうか.

図 10.5 (iv) のような<sup>\*2</sup>部分グラフを待たない両側の頂点の個数が等しい 2 部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持つことが知られています. Hall の定理とか結婚定理と呼ばれています.

また, マッチングを見つけるアルゴリズム (ハンガリー法など) があります.

アルゴリズムの解説はしませんが, ここでは, 簡単な例に対して目で見ながらすべての頂点を含むマッチングを見つけてみましょう. あるマッチングで失敗しても次のようにすれば, 失敗したマッチングから良いマッチングを見つけることができます.

図 10.6 (i) のグラフにマッチングを与えました. 頂点 1 と  $e$  を含んでいません. そこで, (i) のマッチングを改良して, これより良いマッチングを作っていきます.

- (1) 図 10.6 (ii) のように頂点 1 と頂点  $a$  をマッチングする.
- (2) 頂点  $a$  ではマッチングが 2 つあるので古い方を除く.
- (3) 頂点 2 ではマッチングがないので, 頂点 2 と頂点  $b$  をマッチングする. (ただし, 頂点  $b$  の取り方にあいまいさがある. 次の練習参照)
- (4) 以下同様に行う. 図 10.6 (i)–(vi) 参照.

すると, 頂点の個数が 2 つ増えたマッチングが得られます. 今回はこれですべての頂点を含むマッチングが得られましたが, そうでなければこの操作を繰り返します<sup>\*3</sup>.

<sup>\*2</sup> ちゃんとした定義はしませんがなんとなくわかってください.

<sup>\*3</sup> ハンガリー法と呼ばれるマッチングを見つけるアルゴリズムです. 正確な表現はグラフ理論の専門書でハンガリー法を調べてください.

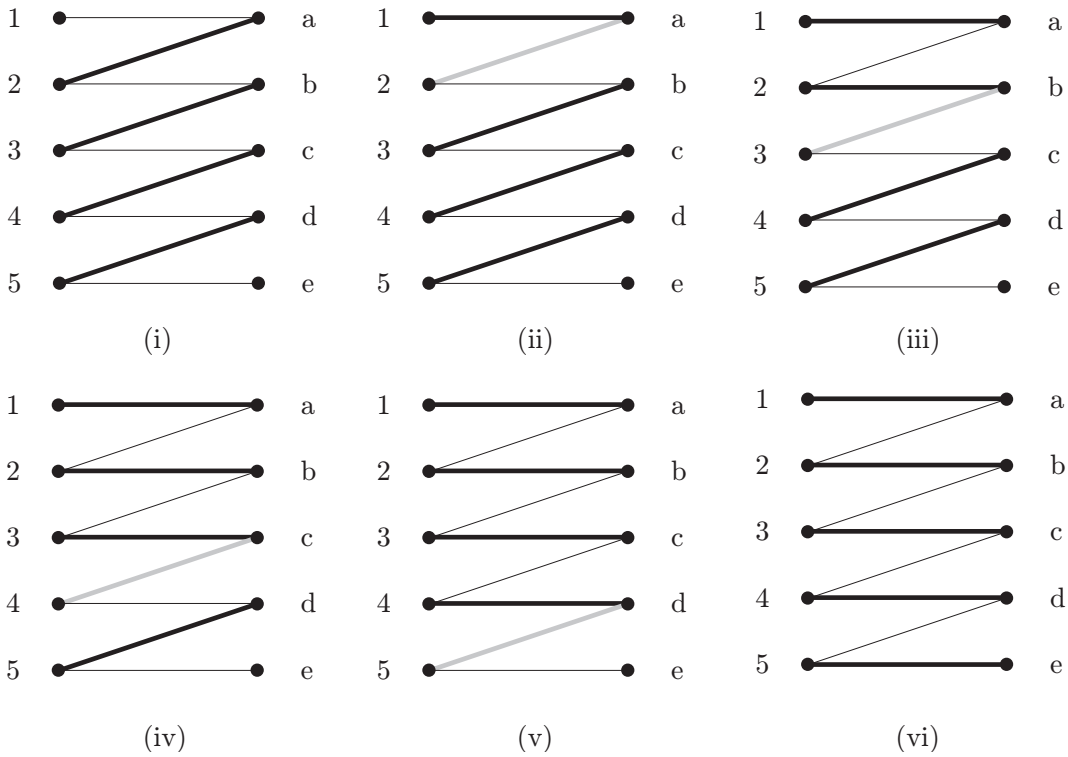


図 10.6 マッチングの見つけ方

練習 図 10.7 のマッチングを改良して、すべての頂点を含むマッチングを見つけよ。

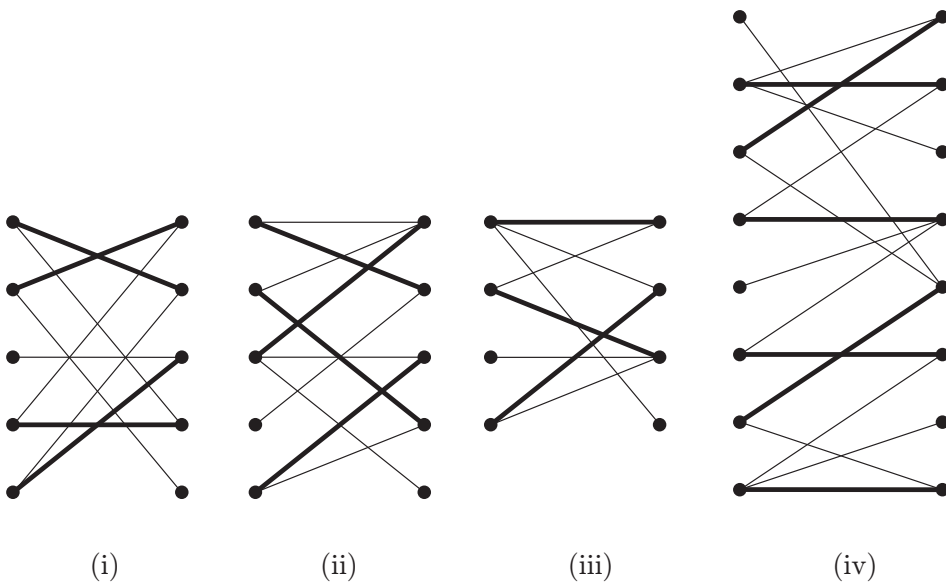


図 10.7 すべての頂点を含むマッチングを見つけて

### 10.3 マッチングを使ったクイズ

問題 1 友達が 3 組結婚することになった. その 3 組に誰と結婚するのか聞いた\*4.

- (1) A 君に聞くと, A 君は X さんと結婚するという.
- (2) X さんに聞くと, X さんは C 君だという.
- (3) C 君に聞くと, C 君は Z さんと結婚するという.

あとで確かめると, みんな嘘をついていたらしい. 誰と誰が結婚しますか.

[問題 1 の解法] この問題をグラフ理論のマッチングを使って解いてみよう. 頂点を男女に対応させて結婚すると証言された人を辺で結んで 2 部グラフを作ります 図 10.8 (i).

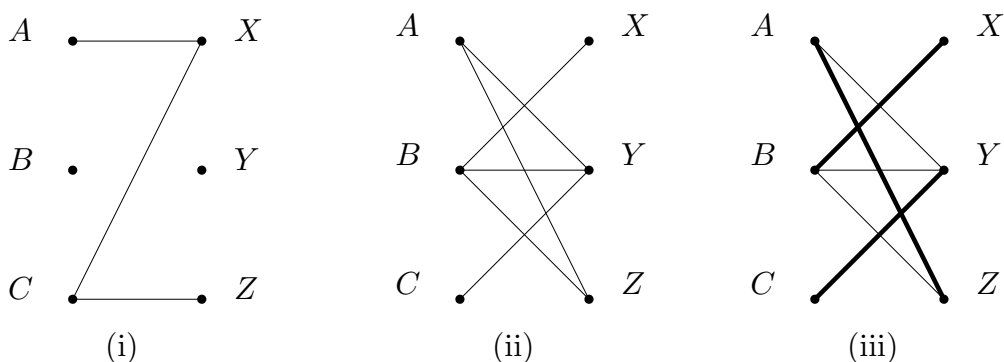


図 10.8 クイズの 2 部グラフ

証言は嘘だったので, この辺で結ばれた以外の人と結婚する可能性があるので (ii) で結婚する可能性のある人を結んだグラフを作成します.

(ii) の頂点  $C$  と頂点  $X$  に注目します. 頂点  $C$  から辺が 1 本しか出ていないので  $C$  は  $Y$  と結婚することがわかります. 同様に  $X$  は  $B$  と結婚することがわかります.

残りの情報から  $A$  と  $Z$  が結婚することがわかります.

問題 2 またあるとき 4 組のカップルが結婚するという. 本当のことを教えてねと頼むと以下の答えが返ってきた.

- (1) X さんは B 君か C 君と結婚する.

\*4 藤村幸三郎 推理パズル 河出文庫

- (2) YさんはA君かB君と結婚する.
- (3) ZさんはA君かC君と結婚する.
- (4) BくんはWさんかYさんと結婚する.

以上のデータから誰と誰が結婚しますか.

[問題2の解法]

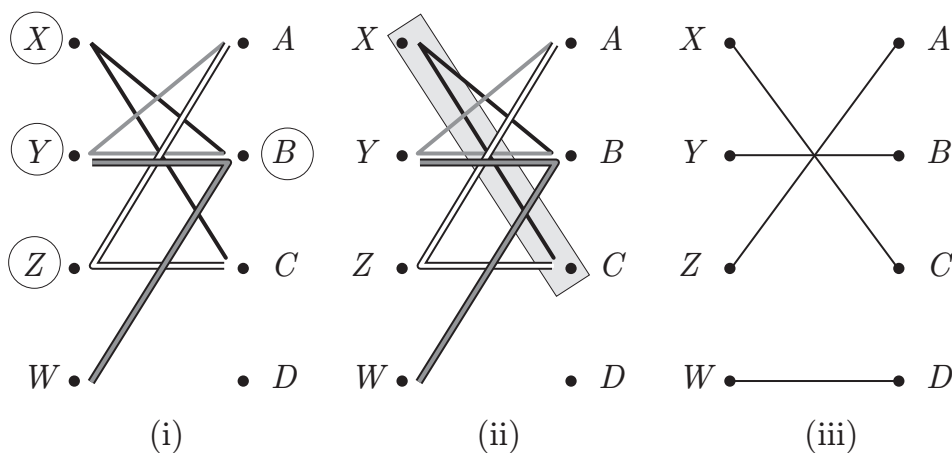


図 10.9 2部グラフ

図 10.9 (i) が証言から作った2部グラフです.

条件(1)–(4)に対応する辺が2本あり、それらから1本を選ぶことになります.

B君の条件からXさんはB君と結婚できないのでC君と結婚することがわかります.

図 10.9 (ii).

Zさんに注目すればC君とは結婚できないのでA君と結婚することがわかります.

Yさんに注目するとA君とはできないのでB君と結婚します.

D君とWさんは、どちらも誰と結婚するかの情報がないが、最後まで残ったのでこのペアで結婚します. 図 10.9 (iii).

注意してほしいのはYさんはB君と結婚するといっていて、B君もYさんと結婚するといっています. しかし、これだけの条件からはYさんとB君が結婚するということはいえません. 今回はたまたま、結婚するのですが.

レポート 30 男の子5組 (A, B, C, D, E) と女の子5組 (V, W, X, Y, Z) が結婚することになった. それを知ったある人が誰と結婚するのかを聞きに行った.

A君「D君はWさんと結婚するそうですよ. 僕はXさんとしますよ」

B 君「C 君も W さんと結婚するって言っていましたよ. 僕は V さんとします」

C 君「B 君は実は Z さんと結婚するのですよ. 僕は X さんとします」

D 君「C 君は Y さんと結婚します. 僕は V さんとします」

E 君「A 君は V さんと結婚します. 僕は Y さんと結婚します」

どうも変な回答なのですが, 僕はみんな 1 つは本当のことをいって, 1 つは嘘をいっていることに気がつきました. では, 誰と誰が結婚するのでしょうか?

レポート 31 またあるとき男の子 4 人 (A, B, C, D) と女の子 4 人 (W, X, Y, Z) が結婚することになった. それを知ったある人がまた誰と結婚するか聞きにいった. 正直にと頼んだら, 次の情報をえた. 誰と誰が結婚するのでしょうか?

A 君は「X さんか, Y さんか, Z さんと結婚します」

B 君は「僕も X さんか, Y さんか, Z さんと結婚します」

C 君は「W さんか, X さんか, Y さんと結婚します」

W さんは「A 君か, B 君か, D 君と結婚します」

Y さんは「A 君か, B 君か, D 君と結婚します」

Z さんは「A 君か, C 君か, D 君と結婚します」

2015-11-26