7　赤い三角形・青い三角形

7.1　赤い三角形・青い三角形

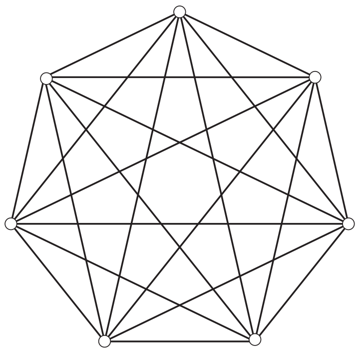


図 7.1　K_7

完全グラフ K_n の辺を青か赤で色を塗ります．このとき，K_n の部分グラフで三角形 K_3 ですべての辺が赤色の三角形を赤い三角形，すべての辺が青色の三角形を青い三角形と呼びましょう．

【問題 1】完全グラフ K_n の各辺を赤と青で自由に塗ります．赤い三角形も青い三角形のどちらもできないように塗ることはできますか．

図 7.2 の完全グラフ K_6 を，赤い三角形も青い三角形もできないように考えながら色を塗ってみましょう．

どちらか三角形がか両方の三角形がどうしてもでてきたのではないでしょうか．

完全グラフ K_6 の辺の数は 15 本あるので色の塗り方は $2^{15} = 32,768$ 通りあります．塗り方全部を考えると赤い三角形も青い三角形もできない塗り方があるかもしれません．

【問題 2】 図 7.3 の K_5 の各辺に色をつけて赤い三角形も青い三角形もできないようにしなさい．

実は完全グラフ K_6 ではどのように辺に色をぬっても，赤い三角形か青い三角形の少なくともどちらかができます．ただし, 青い三角形と赤い三角形の両方ができるというわけではありません．

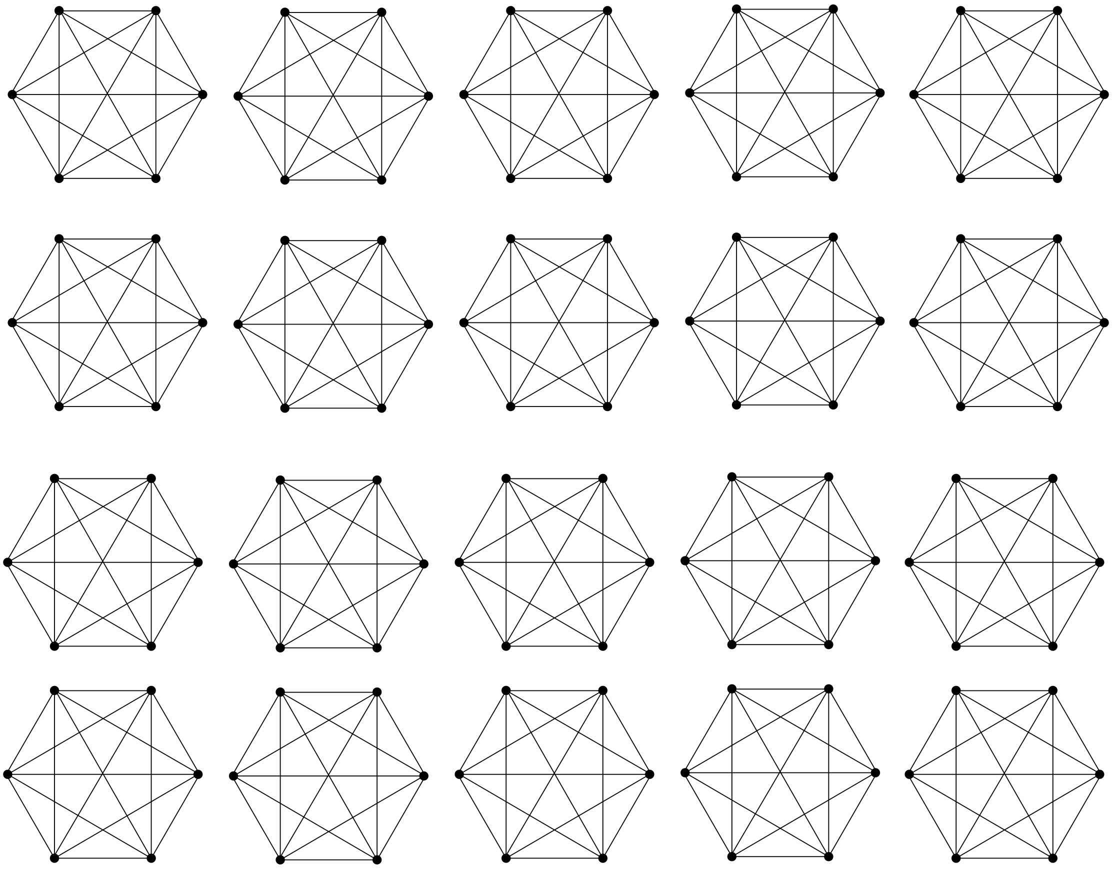


図 7.2　辺を赤と青で塗りましょう

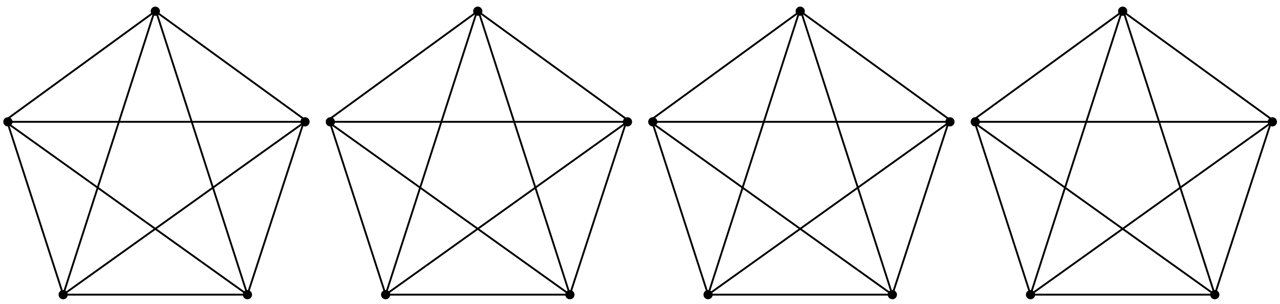


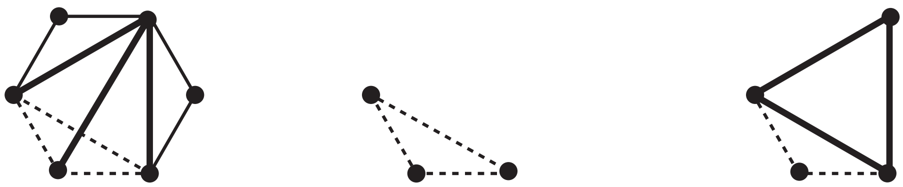
図 7.3　K_5 のグラフでは

これを使ったものとして昔からパーティー問題といわれているものがあります.

【 パーティー問題 】 パーティー会場で 6 人を集めました．すると，互いに知っている 3 人組みか初めて会った 3 人組みの少なくともどちらかはいます.

6 人を頂点とする完全グラフ K_6 を考えます．2 人が知り合いだったら青色の辺でこの 2 つの頂点を結びます．始めた会った 2 人だったら赤色の辺でこの 2 つの頂点を結びます．するとパーティー問題は次の定理 7.1.1 に変わります.

定理 7.1.1 完全グラフ K_6 の各辺を青か赤で塗ります.
このとき三角形となる部分グラフ K_3 ですべての辺が青か赤のものが存在します.



(i) (ii) (iii)

図 7.4　赤い三角形

証明 図 7.5 の K_6 の辺を自由に青と赤で塗りなさい．そして，完全グラフ K_6 のすべての頂点にその頂点とつながっている青と赤の辺の本数を書き入れなさい.

考察 すべての頂点で青か赤の辺の数のどちらかは 3 以上だということに気が付きましたか.

1 つの頂点から辺は 5 本でています．赤か青の辺のどちらかは 3 本以上あります．それを青色としよう[*1].

Step 1. 図 7.4 (i) のように, 3 本の青い辺を選び太くぬってください.

[*1] 赤色だったら青と赤を入れ変えて考えます.

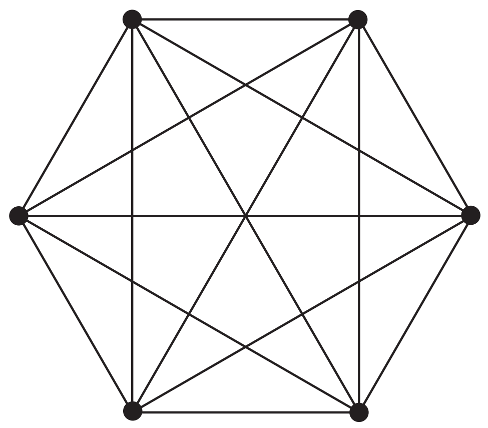


図 7.5　K_6

Step 2. これらの辺のもう一つの頂点に青色で大きく丸で囲みましょう．3 つ頂点があるので, それらを頂点とする新しい三角形ができました．図 7.4 (ii) の点線でできた三角形がそうです．

Case 1. もし, その三角形の辺に青色があればもとの青い辺とあわせて青い三角形ができます．図 7.4 (iii) の三角形です．

Case 2. 三角形に青色の辺が 1 本もなかったら (すべて赤色だった) ら, その三角形が赤い三角形となっています．

以上より**証明されました**．

これはラムゼー (Ramsey*2) の定理と呼ばれているものの一部です．

レポート 14 完全グラフ K_7 に対しても同様の定理がなりたちます．証明を与なさい．
一般に $n \geq 6$ の完全グラフ K_n に対して定理は成立します．

このようにこの証明ではあまり数式がでてきません．このように言葉で話を進めるのも数学では重要です．

レポート 15 完全グラフ K_{17} の辺を赤・青・黄色の 3 色で塗りました．このとき部分グラフ K_3 ですべての辺が同じ色となるものがあることを示しなさい．

*2 Ramsey について調べていると NTT の研究所のホームページに行きついた．グラフ理論はネットワーク・電気回路等の数学的モデルとして利用されている他, ネットワークデザイン, ビジュアルインタフェースなど幅広い分野へ応用されているので当然といえば当然なんだけど．

レポート 16 完全グラフ K_{10}[*3]の辺を赤と青で塗りました. すべての辺が青色となる部分グラフ K_4 かあるいは, すべての辺が赤色となる部分グラフ K_3 が存在することを示しなさい

7.2　K_3 に色をぬって

三角形 K_3 の各頂点を赤と青で塗ることを考えよう.

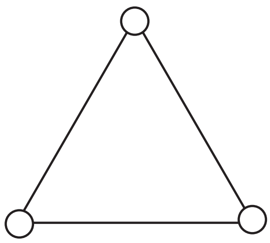


図 7.6　K_3

何通りの塗り方があるでしょうか.

2^3 通りあります. $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ の各々の $\times 2$ は図 7.7 での枝別れの本数に対応していることがわかります.

また, 掛けた回数は頂点の個数と対応していることが分かります.

レポート 17 三角形 K_3 を $120°$ の回転でうつりあう彩色の三角形は同じと考えます.
　このとき, 頂点を赤と青で彩色したときの色ぬりは何通りになるでしょうか. また, 同じぬり方になる三角形の個数は各々いくらになりますか.

7.3　K_4 に色をぬって

　次に完全グラフ K_4 の頂点に赤色と青色をぬることを考えます. 図 7.8 の (i) と (ii) は同じグラフでしょうか, それとも異なるグラフでしょうか.

　(ii) は頂点が $\{1, 2, 3, 4\}$ で辺が $\{12, 23, 34, 13, 14, 23\}$ となるグラフです. 1 と 4 が青い頂点です.

[*3] K_9 に対しても成立するが, 証明を簡単にするために K_{10} にした.

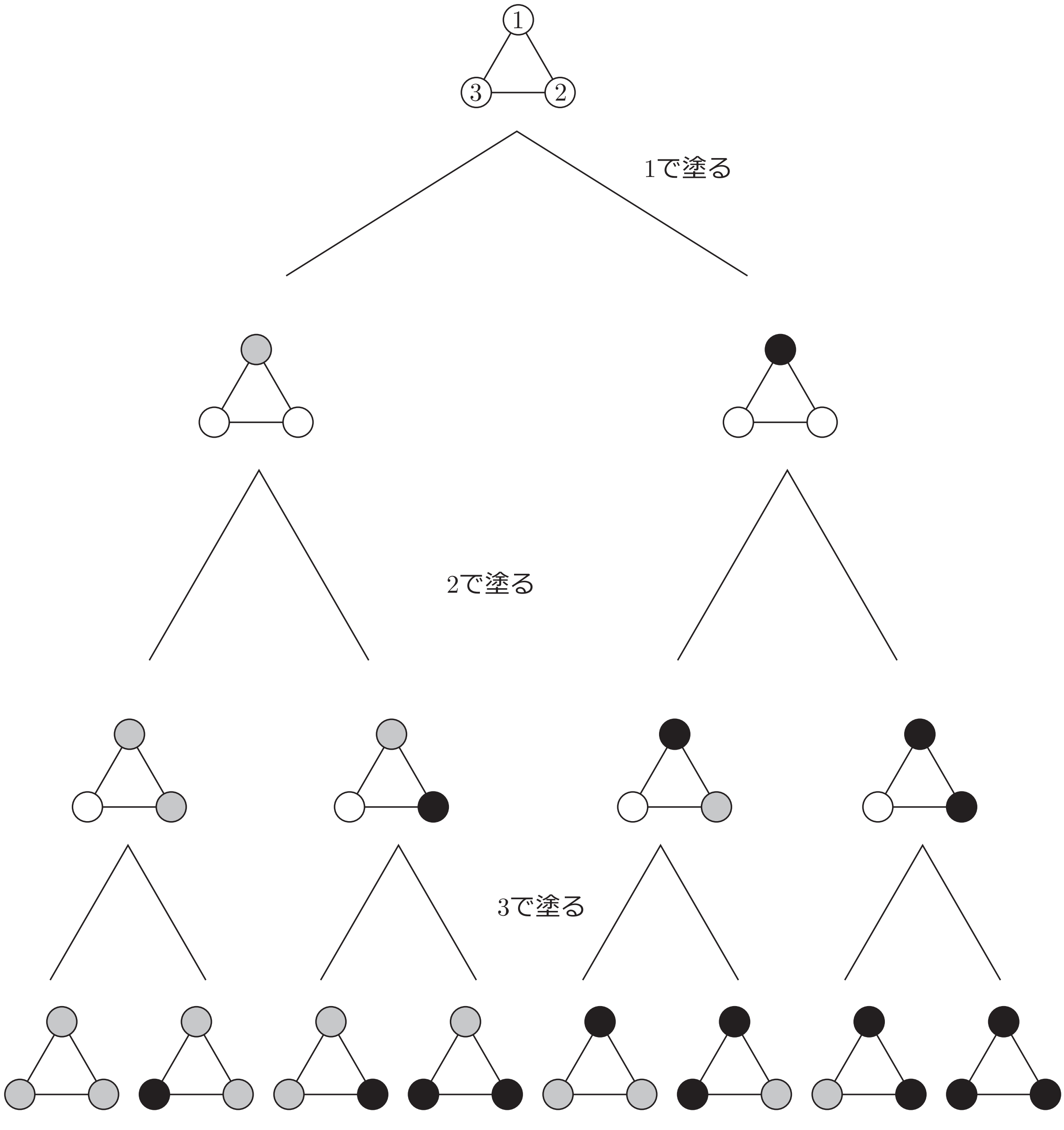


図 7.7　K_3

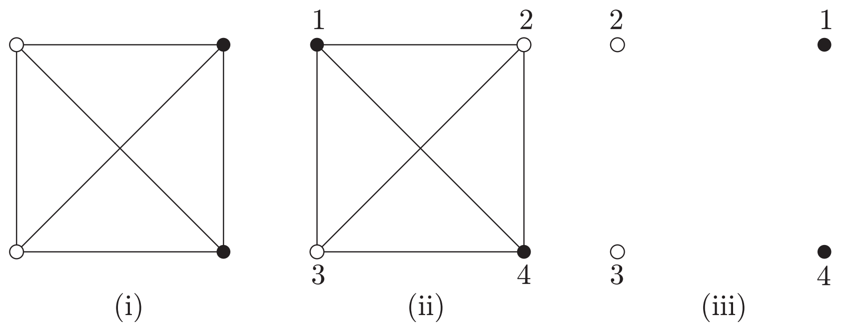


図 7.8　K_4

これを (iii) で表された頂点に対して辺を書き込みましょう．すると (i) と同じグラフがえられます.

レポート 18 完全グラフ K_5 について同様に頂点を赤と青の 2 色でぬってください．グラフの同形 (同じグラフ) で移りあうものを同じだと考えたときに個数はどのようになるでしょうか.

レポート 19 三角形 K_3 の頂点を 3 色 (青・赤・黄色) で塗った．塗り方は何通りありますか．(K_3 を回転でうつりあうものは同じだとみなしています.)

また, ひっくり返してもよいと考えたときはどうなりますか.

レポート 20 ネックレスに色違いのビーズが 9 個つながっている．ネックレスを回転させてもよいがひっくり返さないとすると何種類あるか.

またひっくり返しても良いものとすると何種類あるか.

さらに K_9 の頂点に色違いのビーズがあるとすると, 何種類あるか.

レポート 21 赤のビーズ 5 個と青のビーズ 2 個のネックレスがあった．この赤と青のネックレスは何種類ありますか．ひっくり返すのを許したときと許さないときで種類に変化がありますか.

2015-11-19

8　マッチング

8.1　2 つの頂点をペアにして

グラフ G の**マッチング**とは, 1 本の辺で結ばれた 2 つの頂点をペアにすることです. ただし, ひとつの頂点を 2 つ以上の頂点とペアさせてはいけません.

図 8.1 のグラフのマッチングを図 8.1 の右側のように、2 つの頂点を太線の辺でペアにして表そう.

グラフのマッチングは一般にたくさんあります.

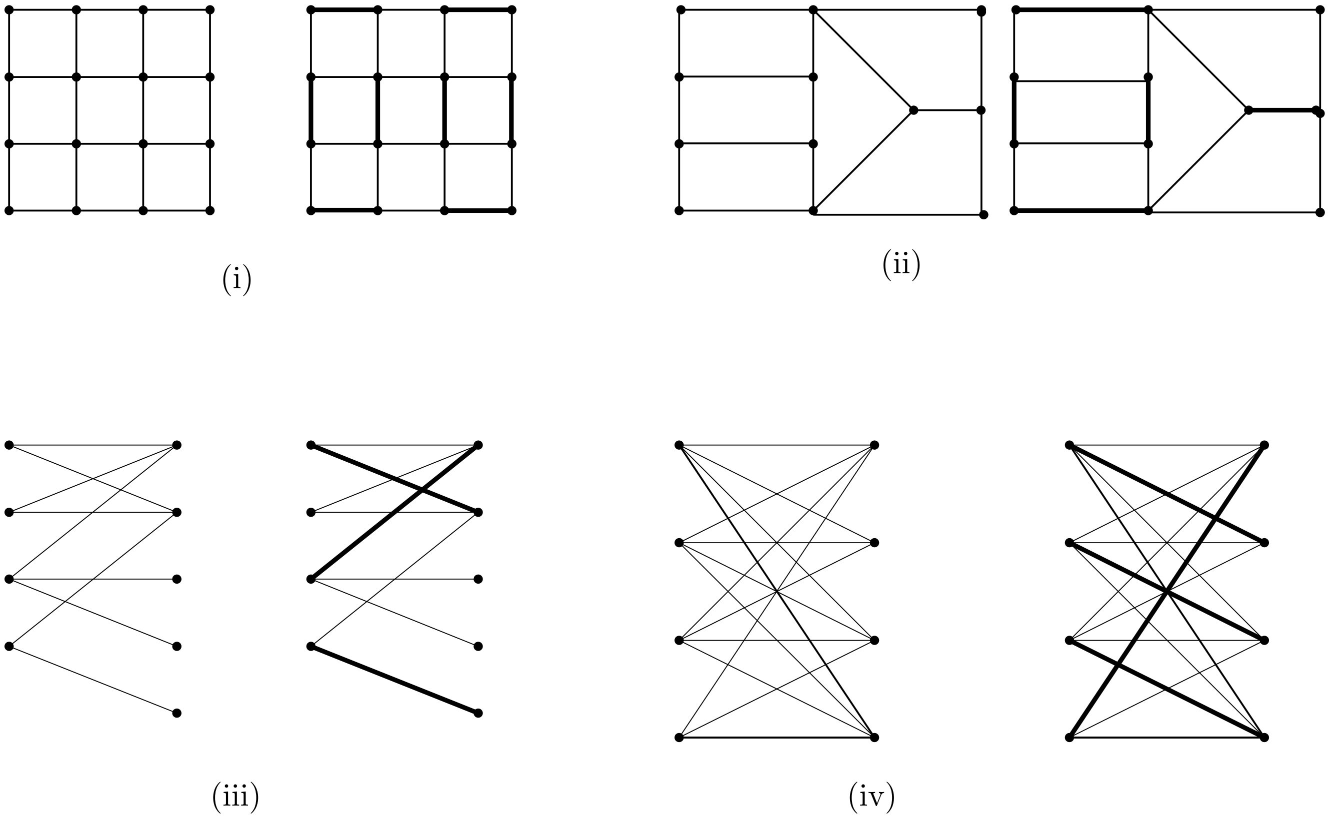


図 8.1　マッチング

練習 図 8.2 のグラフのマッチングを与えよ.

図 8.1 の (i) と (iv) を見ると, すべての頂点がマッチングに含まれています.

マッチングでは, すべての頂点が含まれているマッチングを考えることが多い.

奇数個の頂点のとき, すべての頂点を含むマッチングはありません.

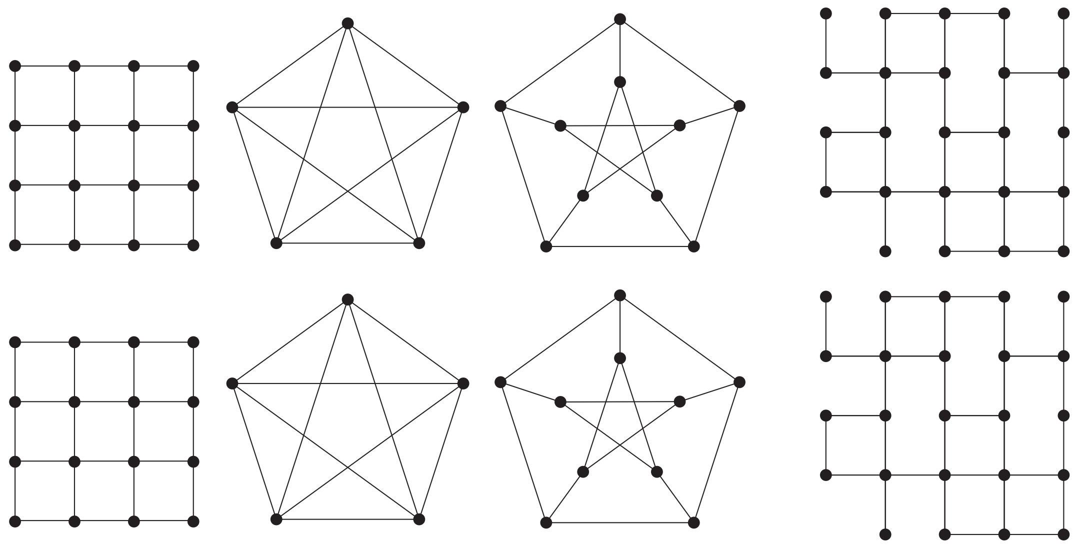


図 8.2　マッチングの練習

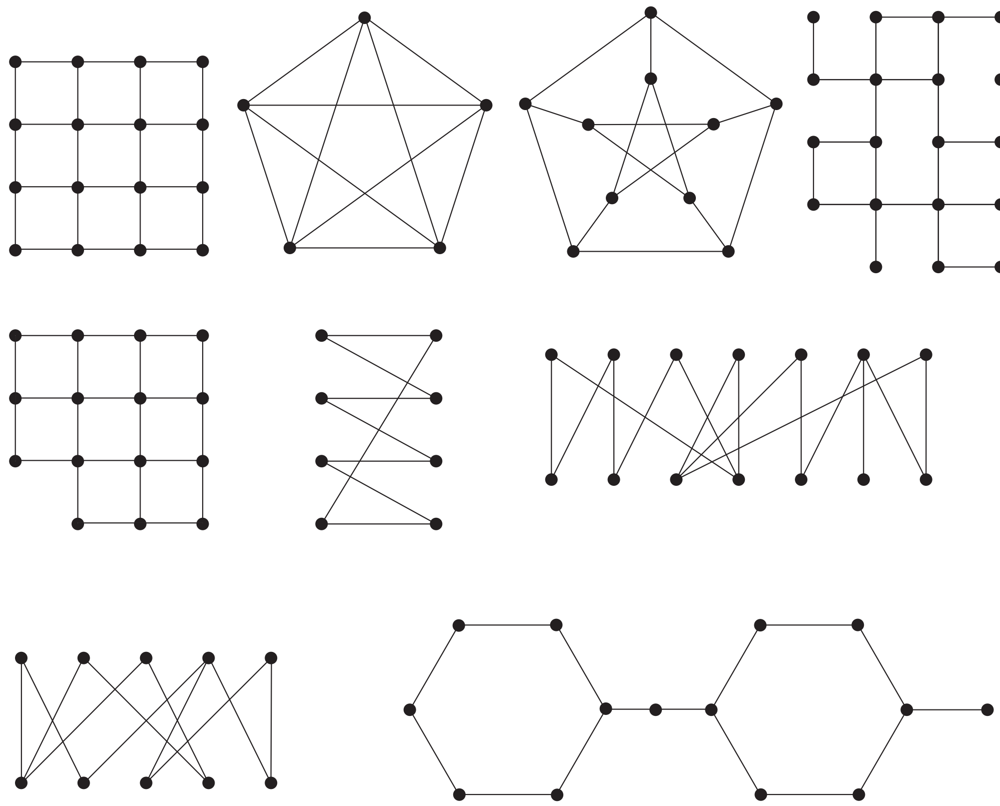


図 8.3　すべての頂点を含むマッチング

問題 図 8.3 ですべての頂点を含むマッチングを持つものはどれですか.
すべての頂点を含むマッチングを持たないグラフはなぜ持たないかを考えなさい.

8.2　2 部グラフのマッチング

2 部グラフ[*1]ではすべての頂点を含むマッチングを考えることが多い.

問 図 8.4 の 2 部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持ちますか.

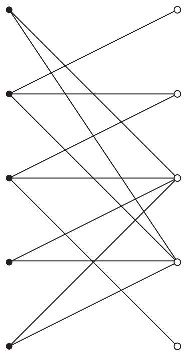


図 8.4　2 部グラフのマッチング

解答 すべての頂点を含むマッチングを持ちません.
初めに, 図 8.5 (i) の頂点 1 に注目します. 辺が 1 本より, マッチングに対応する辺が一意に決まります.
次に, その辺の他方の頂点 2 と頂点 3 に注目しよう 図 8.5 (ii). 頂点 3 は頂点 2 と頂点 4 とだけつながっていますが, 頂点 2 はもうすでに使われているので, 頂点 4 とマッチングします 図 8.5 (iii).
すると頂点 5 とマッチングする頂点がなくなりました 図 8.5 (iv).

2 部グラフのマッチングで, 図 8.5 (iv) の 1 から 5 の頂点と太い線で描かれた辺があると, すべての頂点を含むマッチングはないということがわかります.
一般に図 8.5 (iv) のような右側の頂点とそれとつながっている左側の頂点の個数が異なるような部分グラフを持つ 2 部グラフは頂点をすべて含むマッチングを持たないことがわかっています.

[*1] 2 部グラフとは図 8.4 のように頂点が 2 つに別れるグラフです.

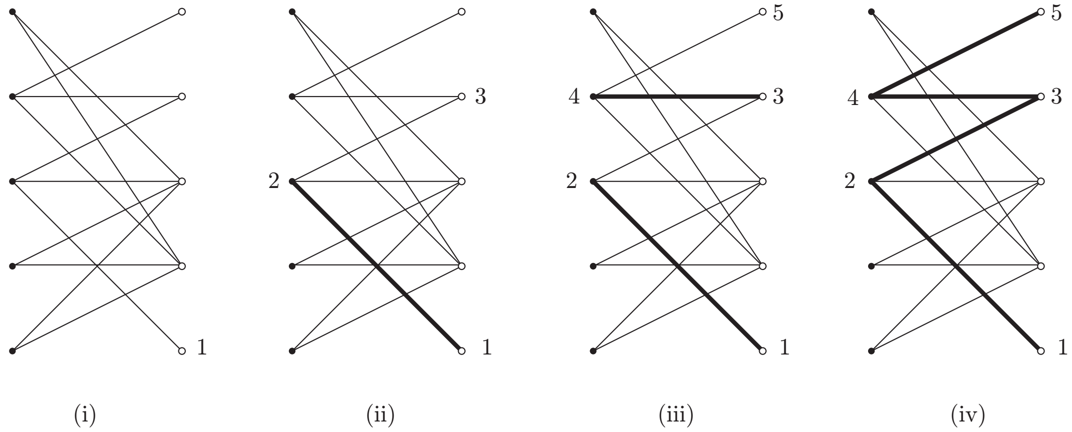


図 8.5　2 部グラフのマッチング

練習 2 部グラフで, 両側の頂点の個数が等しいが, すべての頂点を含むマッチングがないものを 3 つ作れ.

では, 図 8.5 (iv) のような部分グラフがないとき, すべての辺を含むマッチングがあるのだろうか.

図 8.5 (iv) のような[*2]部分グラフを待たない両側の頂点の個数が等しい 2 部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持つことが知られています. Hall の定理とか結婚定理と呼ばれています.

また, マッチングを見つけるアルゴリズム (ハンガリー法など) があります.

アルゴリズムの解説はしませんが, ここでは, 簡単な例に対して目で見ながらすべての頂点を含むマッチングを見つけてみましょう. あるマッチングで失敗しても次のようにすれば, 失敗したマッチングから良いマッチングを見つけることができます.

図 8.6 (i) のグラフにマッチングを与えました. 頂点 1 と e を含んでいません. そこで, (i) のマッチングを改良して, これより良いマッチングを作っていきます.

(1) 図 8.6 (ii) のように頂点 1 と頂点 a をマッチングする.
(2) 頂点 a ではマッチングが 2 つあるので古い方を除く.
(3) 頂点 2 ではマッチングがないので, 頂点 2 と頂点 b をマッチングする. (ただし, 頂点 b の取り方にあいまいさがある. 次の練習参照)
(4) 以下同様に行う. 図 8.6 (i)–(vi) 参照.

すると, 頂点の個数が 2 つ増えたマッチングが得られます. 今回はこれですべての頂点

[*2] ちゃんとした定義はしませんがなんとなくでわかってください.

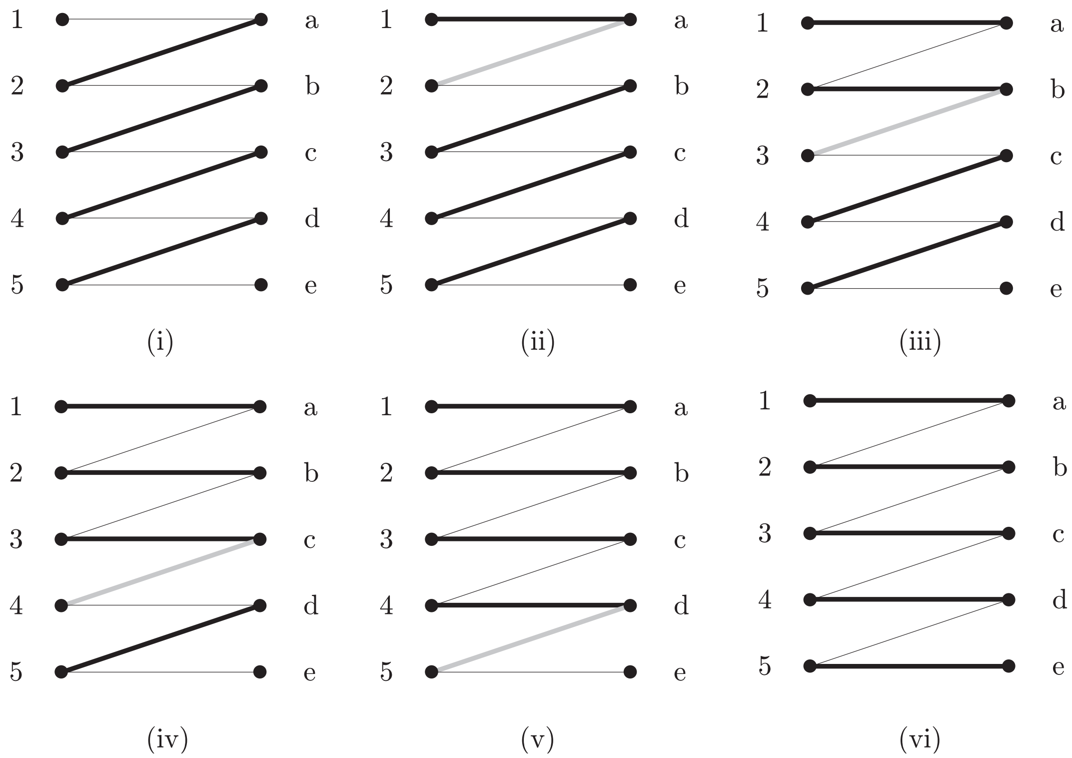


図 8.6　マッチングの見つけ方

を含むマッチングが得られましたが, そうでなければこの操作を繰り返します[*3].

練習 図 8.7 のマッチングを改良して, すべての頂点を含むマッチングを見つけよ.

8.3　クイズ

問題 1 友達が 3 組結婚することになった. その 3 組に誰と結婚するのか聞いた.

(1) A 君に聞くと, A 君は X さんと結婚するという.
(2) X さんに聞くと, X さんは C 君だという.
(3) C 君に聞くと, C 君は Z さんと結婚するという.

あとで確かめると, みんな嘘をついていたらしい. 誰と誰が結婚しますか.

この問題をグラフ理論のマッチングを使って解いてみよう.

[*3] ハンガリー法と呼ばれるマッチングを見つけるアルゴリズムです. 正確な表現はグラフ理論の専門書でハンガリー法を調べてください.

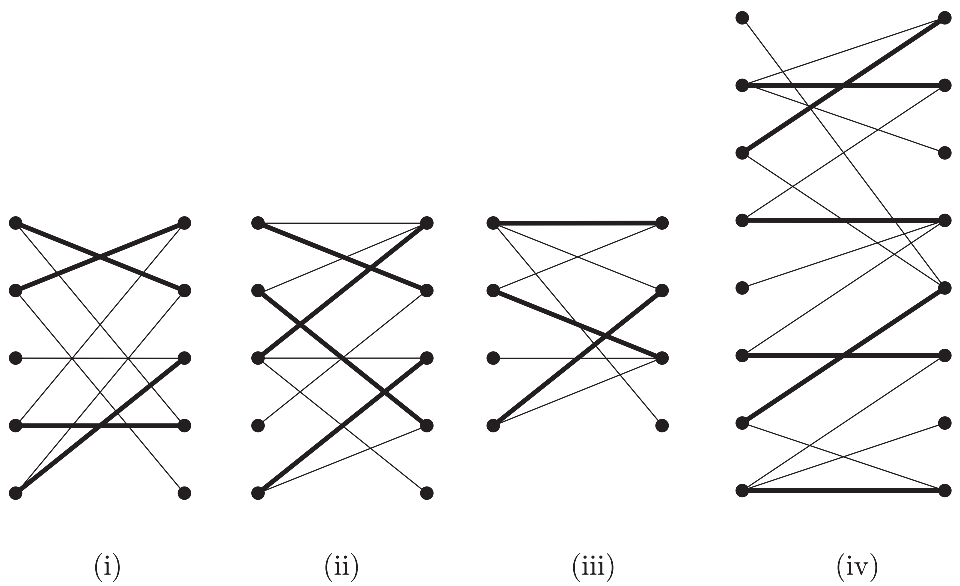


図 8.7　すべての頂点を含むマッチングを見つけて

[問題 1 の解法] 頂点を男女に対応させて結婚すると証言された人を辺で結んで 2 部グラフを作ります 図 8.8 (i).

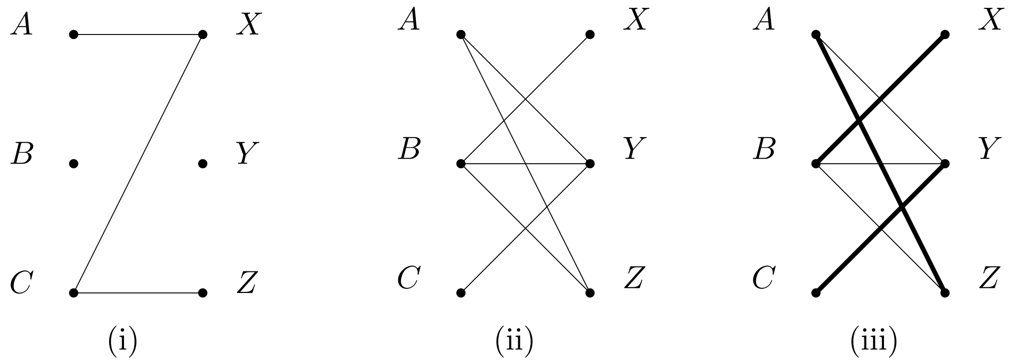


図 8.8　クイズの 2 部グラフ

証言は嘘だったので，この辺以外の人と結婚する可能性があるので (ii) でそのグラフを作成しました.

(ii) の頂点 C と頂点 X に注目します．頂点 C から辺が 1 本しか出ていないので C は Y と結婚することがわかります．同様に X は B と結婚することがわかります.

残りの情報から A と Z が結婚することがわかります.

問題 2 またあるとき 4 組のカップルが結婚するという．本当のことを教えてねと頼むと以

下の答えが返ってきた.

(1) X さんは B 君か C 君と結婚する.
(2) Y さんは A 君か B 君と結婚する.
(3) Z さんは A 君か C 君と結婚する.
(4) B くんは W さんか Y さんと結婚する.

以上のデータから誰と誰が結婚しますか.

[問題 2 の解法]

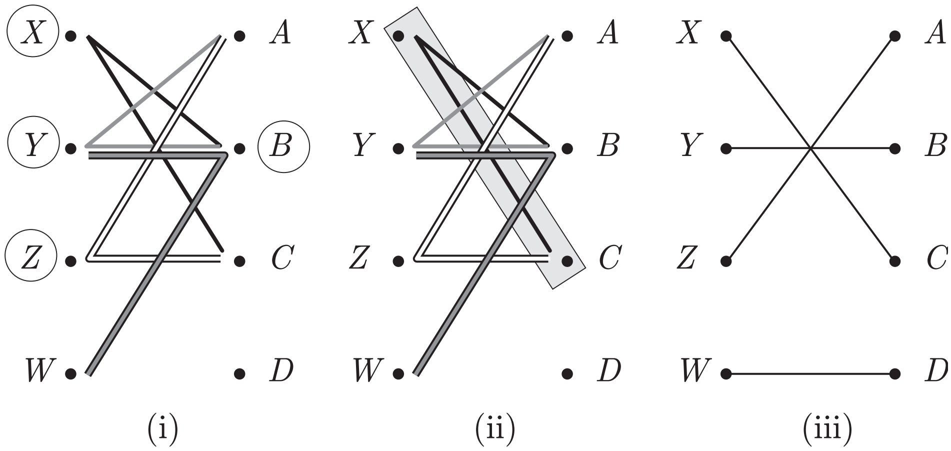


図 8.9　2 部グラフ

図 8.9 (i) が証言から作った 2 部グラフです.

条件 (1)–(4) に対応する辺が 2 本あり, それらから 1 本を選ぶことになります.

B 君の条件から X さんは B 君と結婚できないので C 君と結婚することがわかります. 図 8.9 (ii).

Z さんに注目すれば C 君とは結婚できないので A 君と結婚することがわかります.

Y さんに注目すると A 君とはできないので B 君と結婚します.

D 君と W さんは, どちらも誰と結婚するかの情報がないが, 最後まで残ったのでこのペアで結婚します. 図 8.9 (iii).

注意してほしいのは Y さんは B 君と結婚するといっていて, B 君も Y さんと結婚するといっています. しかし, これだけの条件からは Y さんと B 君が結婚するということはいえません. 今回はたまたま, 結婚するのですが.

レポート 22 男の子 5 組 (A, B, C, D, E) と女の子 5 組 (V, W, X, Y, Z) が結婚することになった. それを知ったある人が誰と結婚するのかを聞きに行った.

A 君「D 君は W さんと結婚するそうですよ. 僕は X さんとしますよ」
B 君「C 君も W さんと結婚するっていっていましたよ. 僕は V さんとします」
C 君「B 君は実は Z さんと結婚するのですよ. 僕は X さんとします」
D 君「C 君は Y さんと結婚します. 僕は V さんとします」
E 君「A 君は V さんと結婚します. 僕は Y さんと結婚します」

どうも変な回答なのですが, 僕はみんな 1 つは本当のことをいって, 1 つは嘘をいっていることに気がつきました. では, 誰と誰が結婚するのでしょうか？

レポート 23 またあるとき男の子 4 人 (A, B, C, D) と女の子 4 人 (W, X, Y, Z) が結婚することになった. それを知ったある人がまた誰と結婚するか聞きにいった. 正直にと頼んだら, 次の情報をえた. 誰と誰が結婚するのでしょうか？

A 君は「X さんか, Y さんか, Z さんと結婚します」
B 君は「僕も X さんか, Y さんか, Z さんと結婚します」
C 君は「W さんか, X さんか, Y さんと結婚します」
W さんは「A 君か, B 君か, D 君と結婚します」
Y さんは「A 君か, B 君か, D 君と結婚します」
Z さんは「A 君か, C 君か, D 君と結婚します」

2014-11-27