5　論理を学ぼう

5.1　ていねいな文章

日常会話で

晴れならば運動会をする

は，雨ならば運動会は中止であることも意味します．

しかし，数学では，雨の場合 (晴れでない場合) は運動会をするかしないかは決めていないと考えます．

数学では,「P ならば Q」は「P でないならば Q でない」を意味しません．そして,「P ならば Q」は「P でないならば Q でない」は意味が一般には異なります．

「晴れならば運動会をする」をていねいにいえば,「晴れならば運動会をするが，晴れでない場合はするかしないかは決めていません」となります．
「雪が積もればスキーに行く」とは「雪が積もればスキーに行きますが，雪が積もらない場合はスキーに行くかどうかは決めていません」となります．雪が積もっていないゲレンデでスキーができるかどうかは考えないことにします．

数学の例を考えよう．

(1) $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ である．
(2) $x = 1$ ならば $x + 3 = 4$ である．

(1) をていねいにいえば「$x = 1$ ならば $x^2 = 1$ ですが，$x \neq 1$ のときは $x^2 = 1$ となるかどうかはわかりません」となります．
$x \neq 1$ のとき，$x = -1$ のときは $x^2 = 1$ となるし，$x = 3$ のときには $x^2 = 9 \neq 1$ となります．
ところが，(2) では $x = 1$ と $x + 3 = 4$ は同じことを表しています．これは,「$x = 1$ でない」ならば「$x + 3 = 4$ でない」もなりたっているからです．

(2) の場合「$x = 1$」ならば「$x + 3 = 4$」であり「$x + 3 = 4$」ならば「$x = 1$」であるともいえます[*1]．この場合,「$x = 1$」と「$x + 3 = 4$」は同じことを表していると考えます．

[*1] 対偶を考えています．対偶はあとで解説します．

「P ならば Q」と「Q ならば P」の両方が成り立つときに P と Q は同じとみなします．専門用語では P と Q は**同値**といいます．

さらに，次のような場合も文章の順番も気にしないといけません．

(I) 「① ある薬があって ② すべての病気に 効く」と
(II)「② すべての病気に ① ある薬があって 効く」

は順番が違うだけで意味がまったく異なります．

(I) は，どんな病気にも効くある魔法の薬があるといっています．
(II) は，風邪には風邪薬，腹痛には胃腸薬があるといっています．

練習 1 次の文書をていねいな文章に書き換えましょう．

(1) テストで 90 点以上取れたら TDL に連れて行く．
(2) 宝くじが当たれば家を買う
(3) 三角形で 3 つの辺の長さが等しければ正三角形である．
(4) 正方形ならば菱形である．
(5) 警報が出ると学校は休校になる．
(6) 鳥は空を飛ぶ．

5.2 否定

ある文章 P に対して「P でない」という文章を文章 P の**否定**といいます．たとえば，「明日は晴れである」の否定は「明日は晴れでない」となります．

「晴れならば運動会をする」の否定を考えよう．もう一度「晴れならば運動会をする」という文章をていねいに表します．「晴れならば運動会をするが，晴れでない場合はするかしないかは決めていません」ということでした．
したがって，「晴れならば運動会をする」の否定は「晴れていたのに運動会が中止」です．
晴れていない場合には運動会をしてもしなくても良かったので，「晴れていないのに運動会をする」ではないことに注意してください．

練習 2 上の練習 1 の文章の否定の文章を作れ．(慣れていないといきなり否定の文を作るのは困難かもしれません．その場合には，ていねいな文にして考えましょう．)

あるコメディアンの例
あるコメディアンが占い師にいわれました．
「おサルという芸名をモンチィチィに改名しないと売れないわよ」
では，どのようなときにこの占いが外れたといえるでしょうか．

(1) 改名しなかったけれど売れた．
(2) 改名したのに売れなかった．
(3) 改名しなくて売れなかった．
(4) 改名して売れた．
(5) それ以外のとき．

わかりやすいように，大事なところだけ鍵カッコ付で書いておきましょう．

「改名しない」ならば「売れない」

となります．ていねいにいえば「改名しないと売れないけれど，改名した場合は売れるかどうかはわかりません」となります．改名しない場合だけ述べているので，改名した場合は売れるかもしれないし売れないかもしれないのです．

「改名しないけど売れた」ときにこの**占いは外れた**となります．

日常の言葉使いと数学との違いに注意が必要です．日常会話では「おサルという芸名をモンチィチィに改名しないと売れないわよ」とは，**改名したら売れる**と暗に示しているので，注意が必要です．だから，「改名したのに売れない」場合を占いが外れたと思うのです．

5.3 対偶

「晴れならば運動会をする」をていねいにいえば，「晴れならば運動会をするが，晴れでない場合はするかしないかは決めていません」でした．
運動会をしているときの天気はわかるでしょうか？晴れならば運動会をするが，晴れでないときも運動会をしているかもしれないことがわかります．
運動会をしていないときの天気はわかるでしょうか？このときは晴れでないとわかります．「運動会をしていないならば晴れでない」ことがわかります．
同様に考えることにより「運動会をしていないならば晴れでない」から「晴れならば運動会をする」が導き出されます．したがって，この 2 つの文章は**同じ意味**を持っていると

考えることができます．

「P ならば Q」に対して「Q でないならば P でない」を**対偶**といいます．そして，元の文章と対偶の文章は同じ意味 (同値) を表しています．

練習 3 p.38 の練習 1 の対偶はどんな文章になるか？また，もとの文章と同じ意味になっていることを確かめよ．

対偶をとっても同じ意味を表すので，知らず知らずのうちに対偶で考えていることがあります．

たとえば，「犯人ならば犯行現場にいた」のだから「犯行現場にいなければ犯人でない」ことになります．

練習 4 「勉強するならばよい成績を取れる」と「勉強しなければよい成績は取れない」の違いを述べなさい．

5.4 畳を敷きましょうから

4 章の議論を論理の方から見なおすことにします．4.1 節の 7 畳の問題をもう一度考えてみましょう．

問題 1 図 5.1 に畳を敷き詰めることができますか．

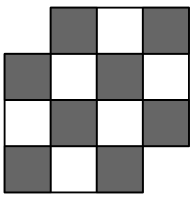


図 5.1　7 畳の部屋に色を塗る

「畳を敷き詰めることができたとすると白と黒の枚数は同じ」ことを示しました．図 5.1 で白と黒の枚数を数えると白が 6 枚，黒が 8 枚あるので枚数が同じではありません．そこで，対偶をとって「白と黒の枚数が同じでないならば畳を敷き詰めることができない」[*2] こ

[*2] ていねいな文章で言い換えれば「畳を敷き詰めることができたとすると白と黒の枚数は同じですが，畳を敷き詰めることができない場合は白と黒の枚数は同じかどうかわかりません」となります．
　すると，白と黒の枚数が同じ場合は畳を敷き詰めることができるかもしれないしできないかもしれません．しかし，「白と黒の枚数が異なると畳を敷き詰めることができない」ことがわかります．すなわち，対偶を考えています．

とがわかります．よって，この部屋には畳を敷き詰めることができないことがわかりました．

次に 4.3 節の問題を考えてみます．

問題 2 図 5.2 のグラフに対して，ある頂点から出発して，辺に沿って移動してすべての頂点を一度だけ通って元の頂点に戻ってくることができますか．ただし，通らない辺があってもかまいません．

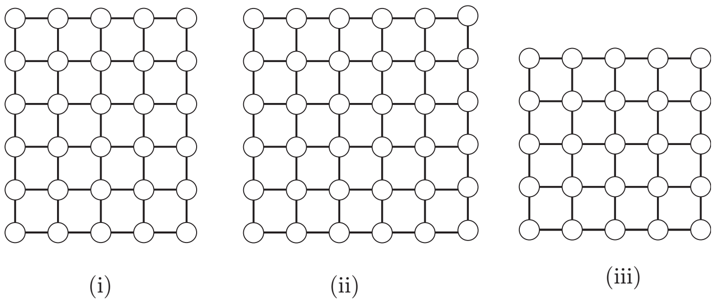


図 5.2　すべての頂点をまわって

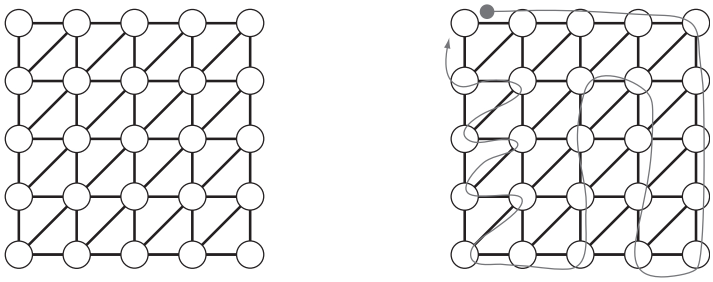
ここで重要なことは，すべての頂点をまわることが可能ならばなぜ可能なのかの証明を示し，不可能ならばなぜ不可能かの証明を示さないといけません．
その証明の中に推測が入ってはいけません．

図 5.2 の (i) と (ii) のグラフが可能なことはわかると思います．道順を示せば証明になります．
問題は (iii) のグラフです．いくら試しても不可能です．したがって，(iii) のグラフはまわることができないと仮定して，それを論証していく必要があります．

「(i) と (ii) のグラフの頂点の個数が偶数なので可能，(iii) のグラフの頂点の個数は奇数だから不可能」と解答する学生がいます．しかし，これは証明にはなりせん．これは，

(1) 頂点の個数が奇数
(2) すべての頂点をまわることができない，

として，(1) から (2) が導き出されると主張しています．
しかし，図 5.3 のグラフは頂点の個数が 25 個の奇数ですが，すべての頂点をまわることは可能です．したがって，(1) の条件だけでは (2) を導くことはできません．



(i)　　　　　　　　　　　　(ii)

図 5.3　奇数個の頂点

正しい証明をもう一度与えてみます．証明の目標を明示しておきましょう．

図 5.2 の (iii) のグラフは，「**すべての頂点をまわって戻ってくることは不可能**」

そして，4.3 節の証明を箇条書きにして書き出します．

(1) 頂点を白と黒で塗る．
(2) 辺で隣り合う頂点の色は異なる．
(3) したがって辺に沿って移動すると白と黒が交互に出てくる．
(4) 出発点に戻ってくることが可能ならば白と黒の個数は同数．
(5) 白と黒の個数は同数ではない．
(6) よって不可能．

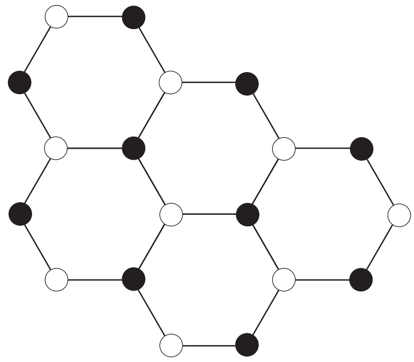
以上のようになります．

(1) は証明のための準備で，
(2) だから (3)，(3) ならば (4)，
(4)(実際には (4) の対偶) だから，(5) なので (6)

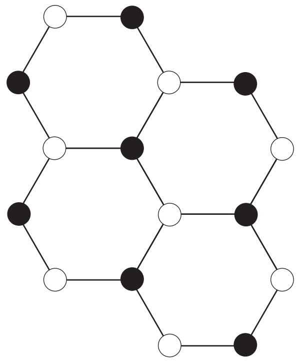
という構造を持っています．さらに，(3) (5) が成り立つグラフに対して結論 (6) が得られることがわかります．

たとえば，図 5.4(i) に対して不可能だと証明することが可能です．

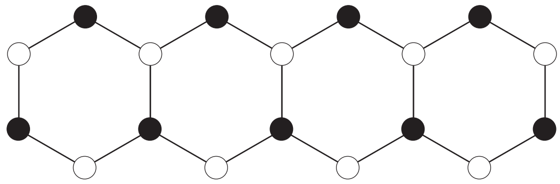
証明に必要な条件を突き詰めていくことで，証明の範囲を広げていくことも可能です．しかし，白と黒の個数が同数の場合，すべての頂点をまわって戻ってくることが可能かどうかはわからないことに注意してください．



(i)



(ii)



(iii)

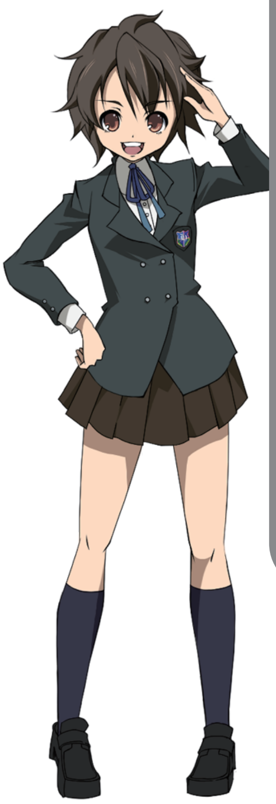
図 5.4　不可能なグラフ

たとえば，図 5.4(ii) のグラフと図 5.4(iii) のグラフは白と黒の個数は同数になりますが，(ii) のグラフは不可能で (iii) のグラフは可能です．

証明をするときには，証明の目標，証明に使ってよいこと，証明の構造を明確にする必要があります．

さらに，証明の中の論証に推測などあるかも気にする必要があります．

レポート 9 問題 1 の証明を上のように箇条書きにして，どのような構造を持っているかを述べよ．



武良 詩乃

大木真を慕っている、ある意味フツーの女の子。
友達が多く、みんなで助け合う。

ブラシノステロイド [Brassinosteroid]
伸長成長　細胞分裂　種子発芽　病害抵抗

1960年代、大量の花粉からほんのちょっと発見。1979年に単離。テルペノイド由来のステロイドの一種でメバロン酸から合成。前駆体はカンペステロール。ステロイドラクトン構造を持ち、類縁体は50種を超える。関連するステロイド化合物を総称してブラシノステロイドと呼ぶが、普通は一番活性が高いブラシノライドを指す。植物界にあまりに広く分布していたため、普遍的すぎて長いあいだ植物ホルモンとしては認められていなかった。オーキシンやジベレリンと似た作用を持つが、こいつだけものすっごく低濃度(千兆分の1M)でも作用することが出来る。受容体はBRI1。ストレス応答時は他のホルモンと協力して抵抗性を発現。シグナルカスケード活性化機能も持つ。オーキシンと同じく成長促進するが、BRは内部細胞にも働きかけることができ、応答の範囲も幅広い。ただし他のホルモンに比べて植物内で移動しにくいらしい。細胞や茎の成長には必須であり、特に葉柄、胚軸には重要に働く。また、こいつもエチレン生産に関与している。

http://bakeinu.bake-neko.net/hormone/index.html

2015-10-22

6　彩色グラフ

6.1　グラフに色を塗って

頂点から出ている辺の本数が 1 の頂点 —● を持たない平面上の (辺と辺が交差しない*[1]) グラフを考えます.

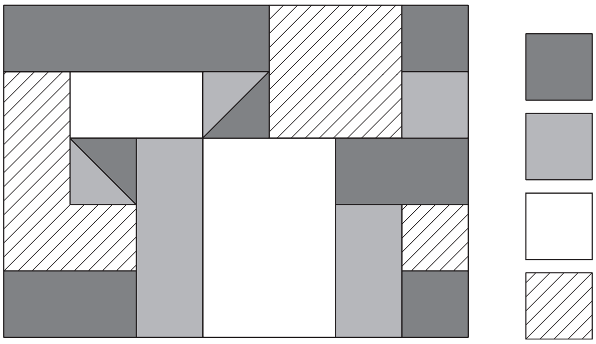


図 6.1　グラフの塗り分け

■ **面に色を塗りましょう** 図 6.1 のように, 辺で隣り合う面は区別できるように異なる色で塗りましょう. 面が頂点だけで接していれば区別できるので同じ色で塗ってよいことにします.

このようにグラフの面に色を塗ることを**彩色**という.

何色必要ですか 平面上にあるグラフが与えられたとき, 彩色するためには何色必要でしょうか. 面の数だけ色を用意しておけばすべての面を異なる色で彩色できます. しかし, 面の数が多くなるとたくさんの色が必要になります.

そこでグラフが与えられた時に, 彩色するために必要な**色の最小数**を考えます.

[**考えましょう**]
以下を満たすグラフをノートに描きましょう.
(1) ちょうど 2 色必要なグラフを考えましょう.
(2) ちょうど 3 色必要なグラフを考えましょう.
(3) ちょうど 4 色必要なグラフを考えましょう.

*1 厳密には「辺と辺が交わるならば頂点のみ」となります

(4) 5 色ではどうでしょうか.

考察 図 6.2 のグラフを彩色しよう.

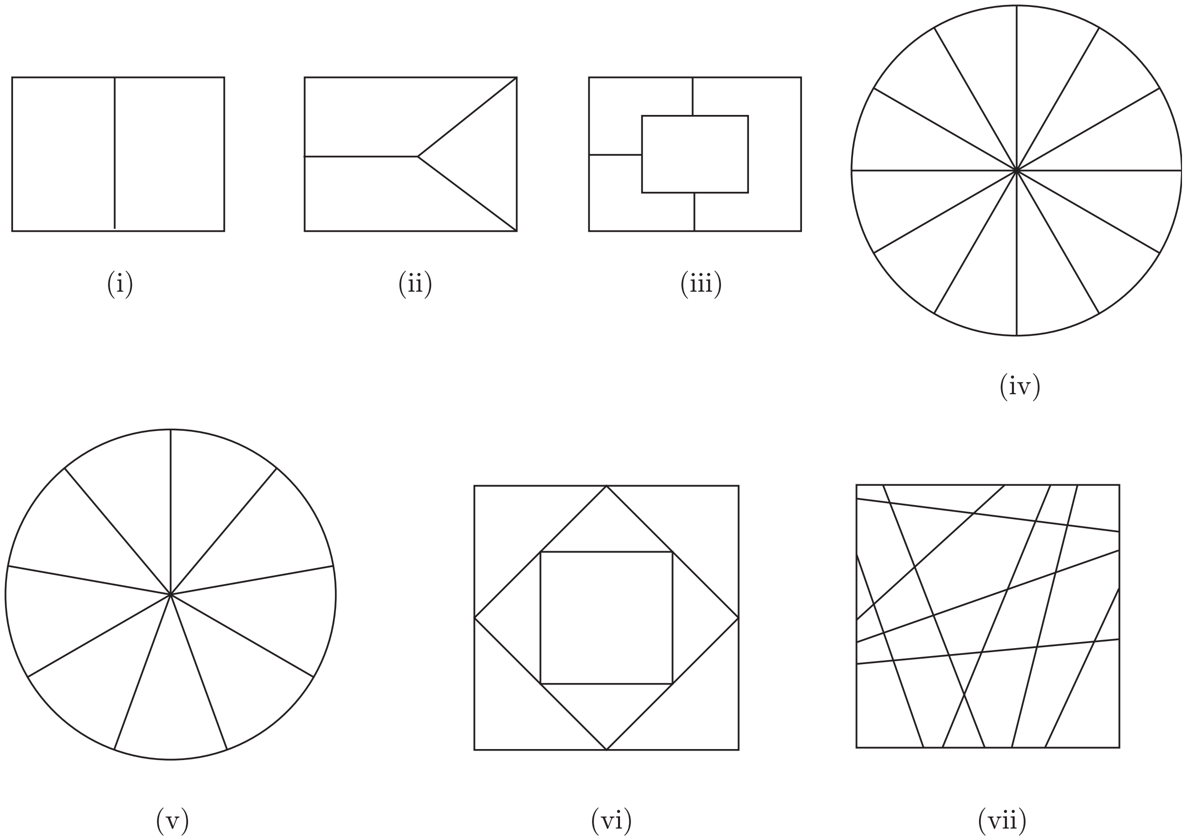


図 6.2　色を塗ってみよう

(i) のグラフは 2 色必要です.　(ii) のグラフは 3 色必要です.
(iii) のグラフは 4 色必要です.

残りのグラフは, (v) を除き 2 色で色を塗ることができます. (v) は 3 色で彩色できます.

問　5 色必要なグラフはありますか.

これは 4 色問題とよばれて「**どんな平面上のグラフも 4 色あれば彩色可能である**」とことが示されています.

アペルとハーケンが, 1976 年にスーパーコンピューターを 1,200 時間ほど使って証明しました.

練習 図 6.3 のグラフに対して 4 色で塗ってみよう．失敗してもよいように図 6.3 に同じグラフを 9 個準備してあります．

失敗した場合は，よく考えてから新しいグラフに挑戦しましょう．

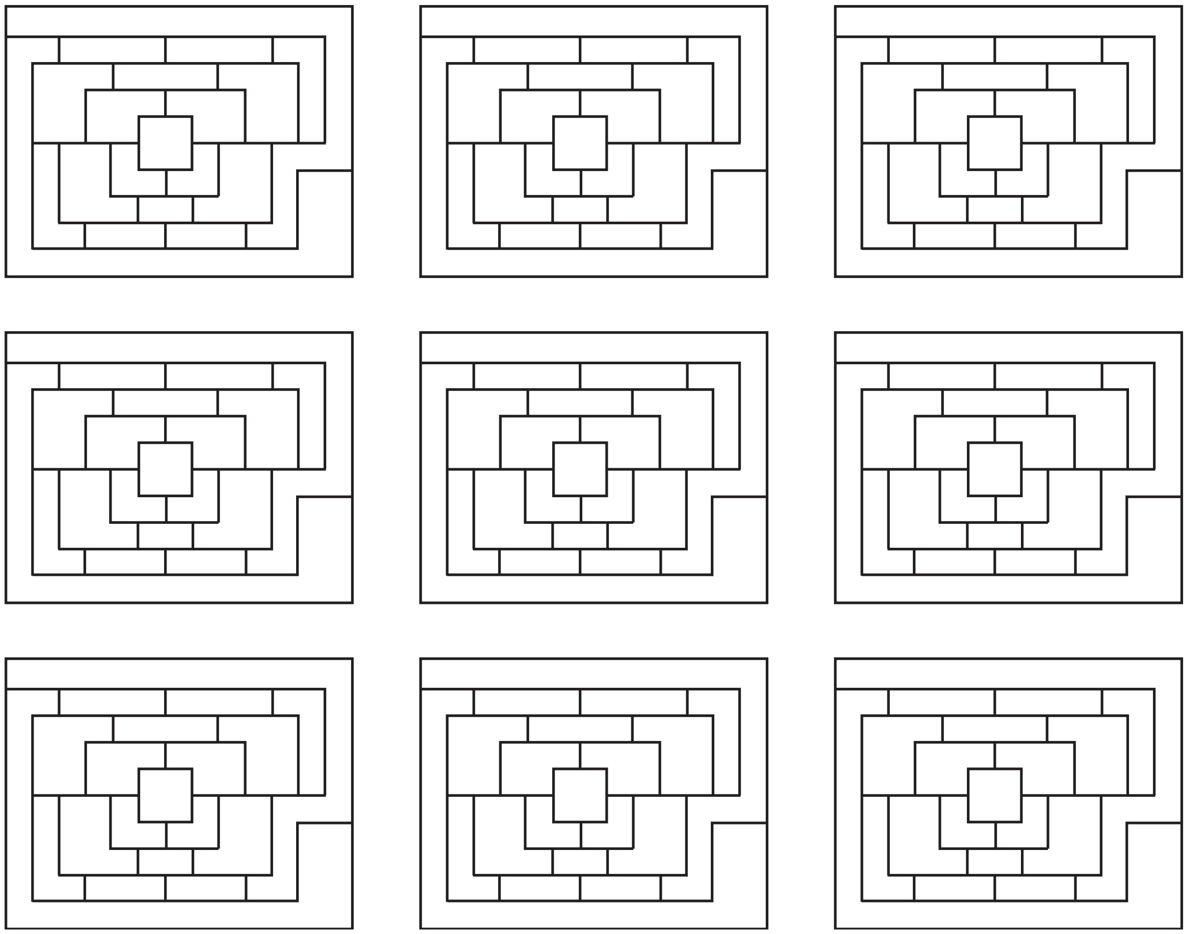


図 6.3　4 色で塗り分け

グラフを 4 色で塗る簡単な方法はまだ見つかっていません．

練習 図 6.4 のグラフに対して 4 色で彩色しなさい．簡単なアルゴリズムがないので，考えながら 4 色で彩色しよう．

5 色での彩色は，アルフレッド・ブレイ・ケンプの論理を改良した簡単なアルゴリズムがあります[*2]．

[*2] グラフ理論 ：R. ディーステル著 根上生也・太田克弘訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 p.123.

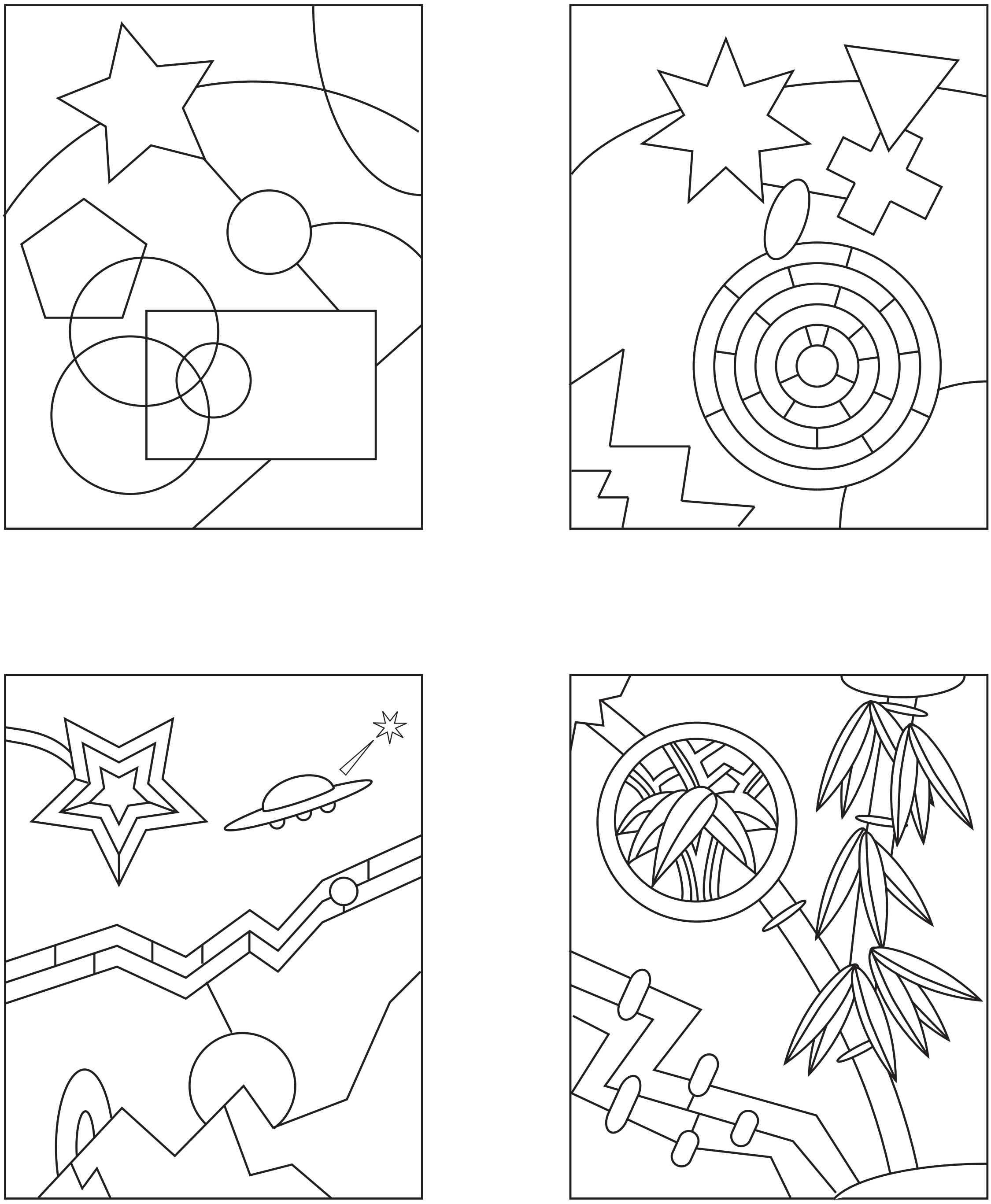


図 6.4　4 色問題

4 色問題は, 地図の色塗りの問題から派生してきました. 印刷業者は経験則として 4 色あれば十分だとわかっていたみたいです.

レポート 10 図 6.5 の近畿 2 府 5 県の地図[*3]の中からひとつ選び 4 色で彩色しなさい. または, 好きな都道府県の白地図を用意して 4 色で彩色しなさい.

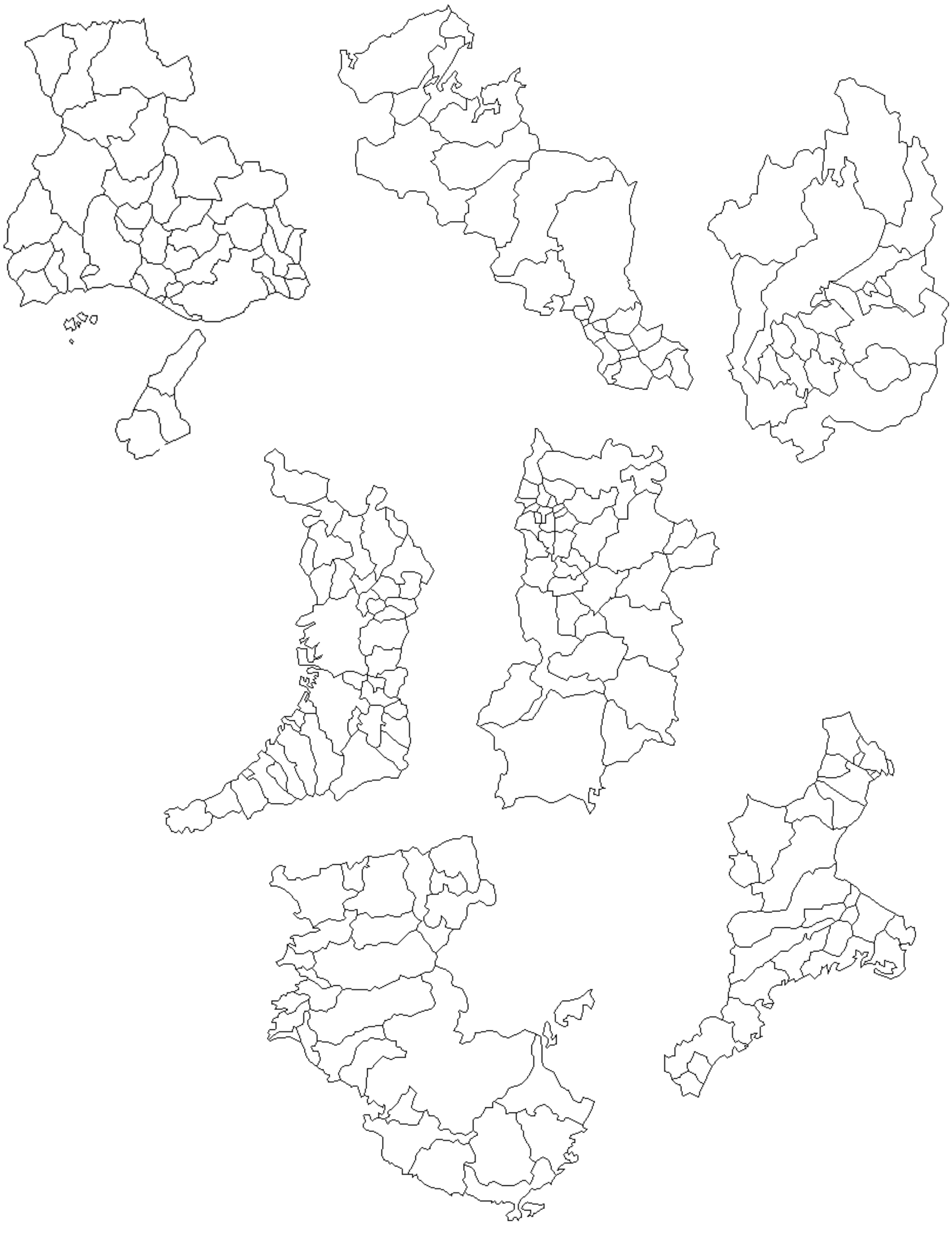


図 6.5　グラフに色を塗って

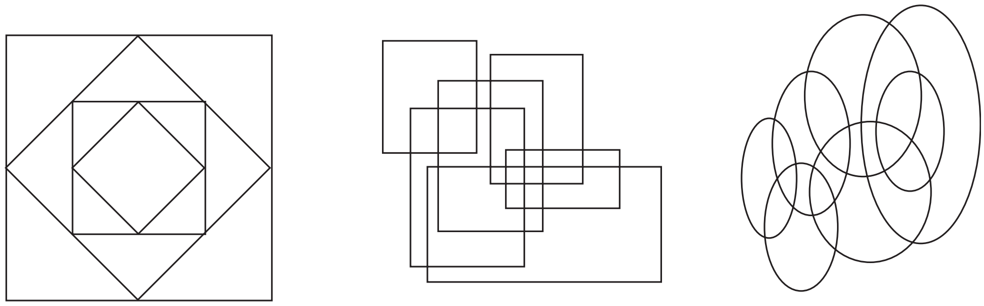
[*3] 最近の市町村合併には対応していません.

6.2　2 色塗りと一筆書きのグラフ

平面上のグラフは 4 色で色塗りが可能でした．3 色で色塗りが可能なグラフはどのようなものでしょうか．また, 2 色で可能なグラフはどのようなグラフでしょうか.

2 色あれば彩色できるグラフを考えます.

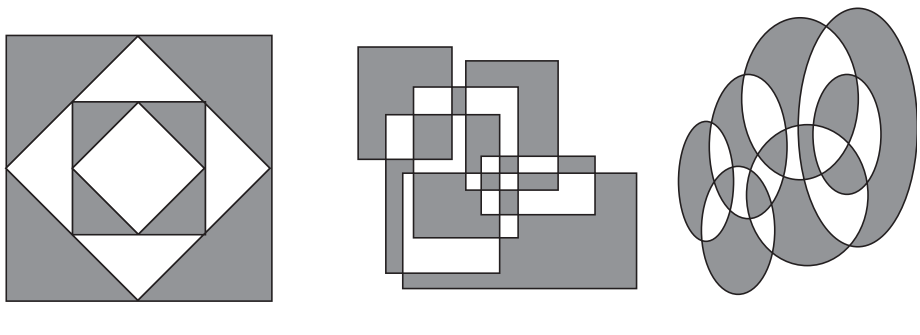
問題 図 6.6 のグラフは 2 色で彩色できるでしょうか.



(i)　(ii)　(iii)

図 6.6　2 色で彩色できますか

2 色で彩色した図 6.7 のグラフ はどのような性質を持つグラフですか.



(i)　(ii)　(iii)

図 6.7　2 色で彩色されたグラフ

連結な 2 色で彩色可能なグラフは，始点と終点が一致する一筆書きできるグラフです．

逆に一筆書きできるグラフで始点と終点が一致するグラフは 2 色で彩色可能です.

練習 図 6.8 のグラフを 2 色で彩色して下さい.

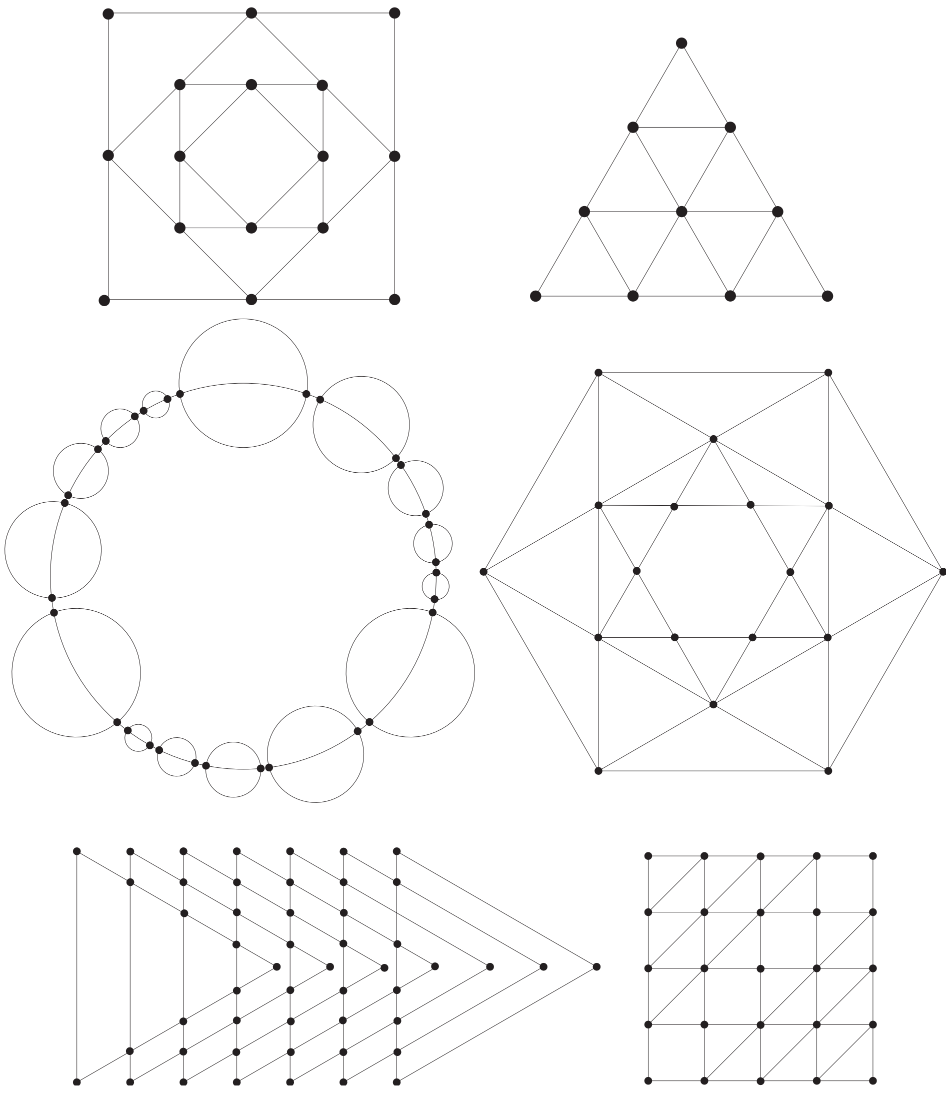


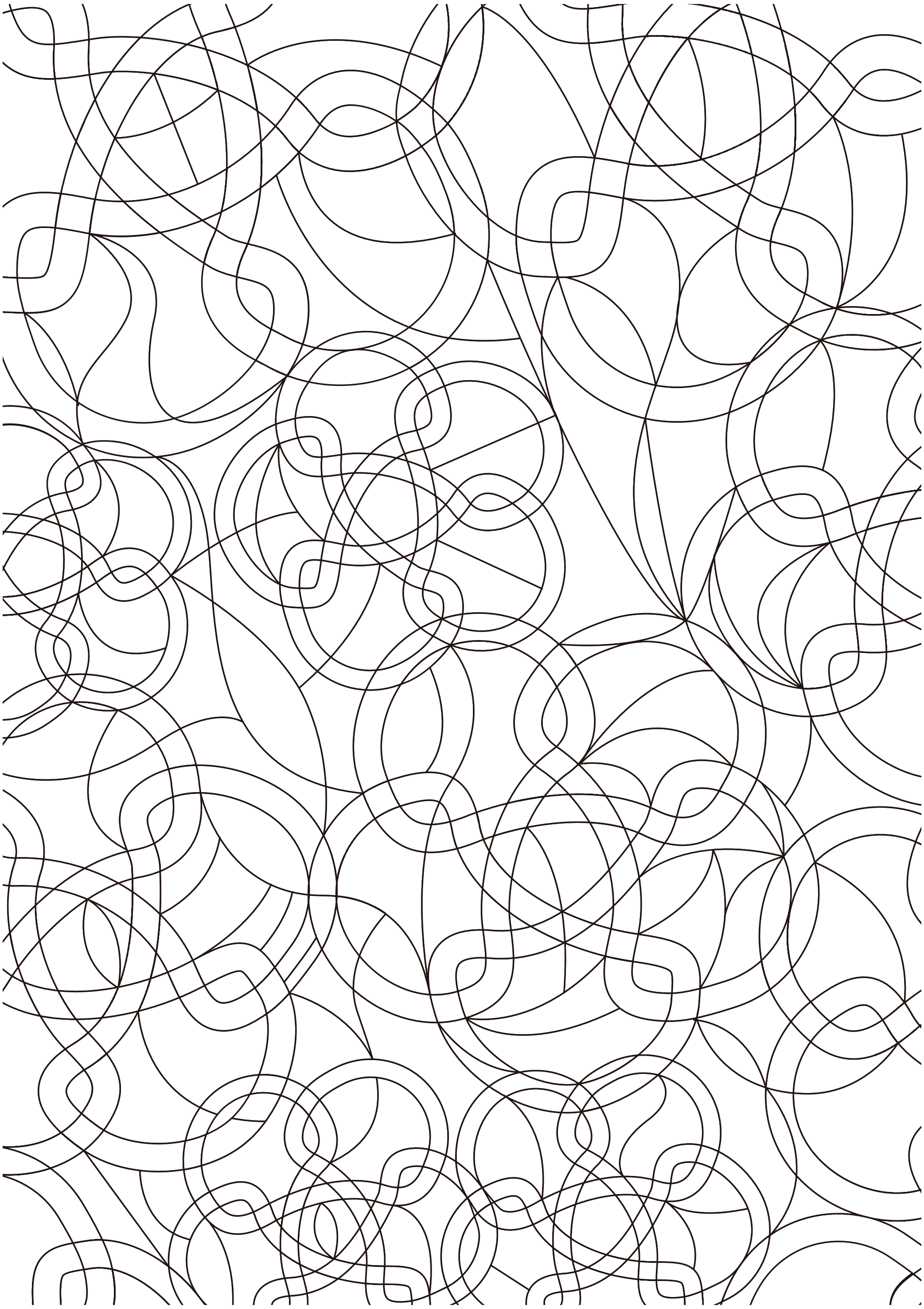
図 6.8　一筆書き可能なグラフと 2 色塗り

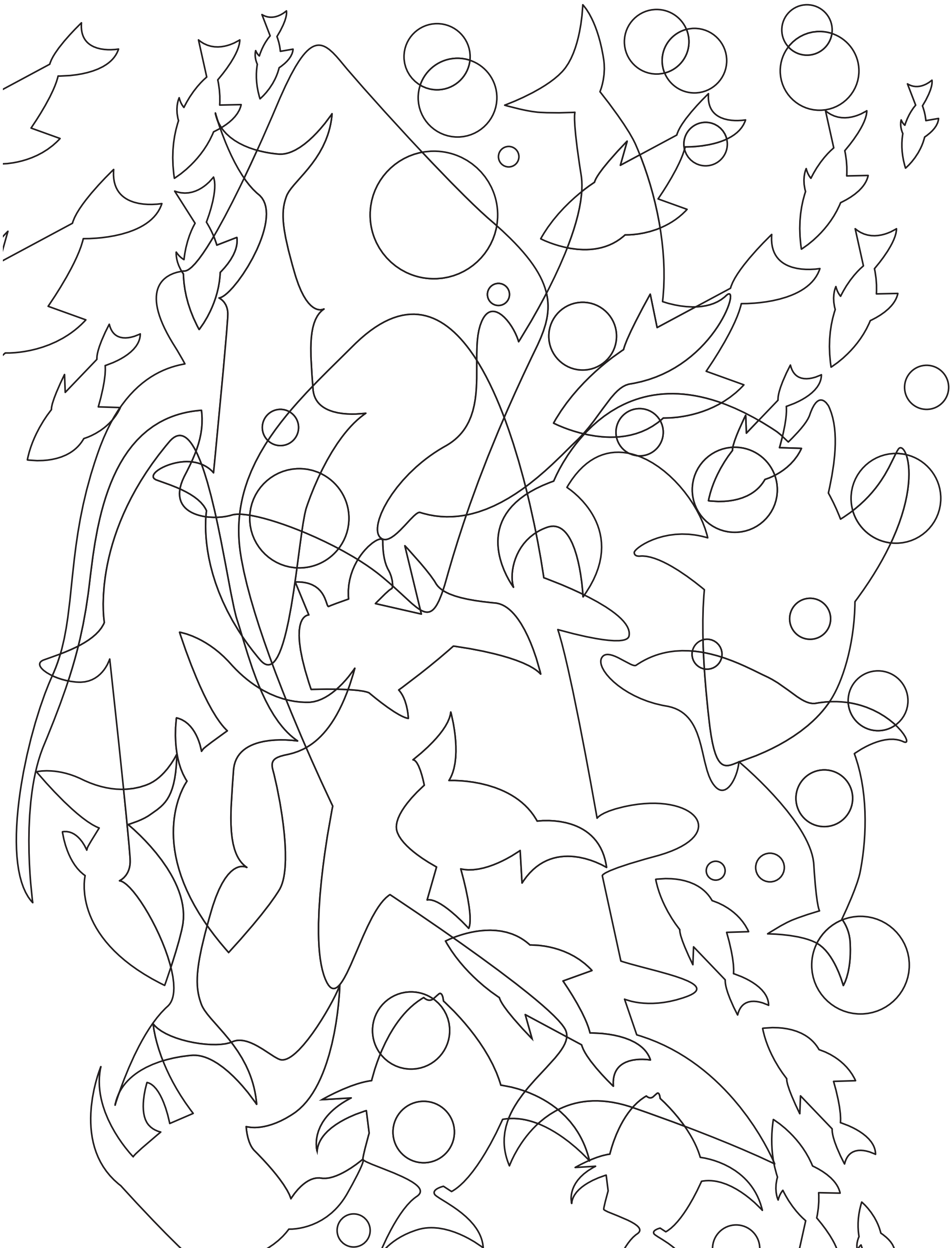
レポート 11 一筆書きできるグラフで, 始点と終点が一致するグラフは, 2 色で彩色可能となることを示せ.

レポート 12 3 色必要なグラフをたくさん作り, なぜ 3 色必要なのかを述べなさい.

6.3 塗り絵

国士舘大学の新庄玲子先生に塗り絵を描いてもらいました.





6.4　レポート 1 題

レポート 13 次のマジックは Mr. マリックがやっていたマジックです[*4].

図 6.9 で表された山手線と京浜東北線を考えます．横浜駅がスタート地点で山手線には左回りを図のように決めておきます.

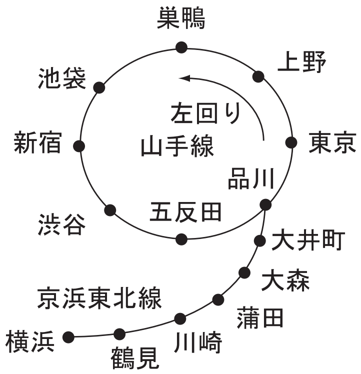


図 6.9　山手線

手順 1 さあ, 皆さん「7 以上の数を考えてください.」

手順 2 京浜東北線の横浜駅から順に数えていき, 1 番目は鶴見, 2 番目は川崎と進んでいきます．品川駅からは左回りに山手線を回っていきます．自分の考えた数のところが停車駅なのでそこで停まります.

手順 3 そこの駅から今度は考えた数だけ山手線を逆の方向に戻っていきます．ただし, 京浜東北線には入らないようにします.

手順 4 自分のいる駅をしっかりと見てください．たぶん, 巣鴨ではないですね. 新宿や品川でもないですね.

7 以上のどんな数を考えても必ずある駅になります．どの駅でしょうか？また理由を考えてください.

2015-10-29

[*4] ナポレオンズもやっていました．結構有名な手品みたいです