3　一筆書き

3.1　一筆書きに挑戦

練習 図 3.1 のグラフに対して一筆書きをしてください．ただし，一筆書きできないグラフもあります．　　(制限時間 5 分)

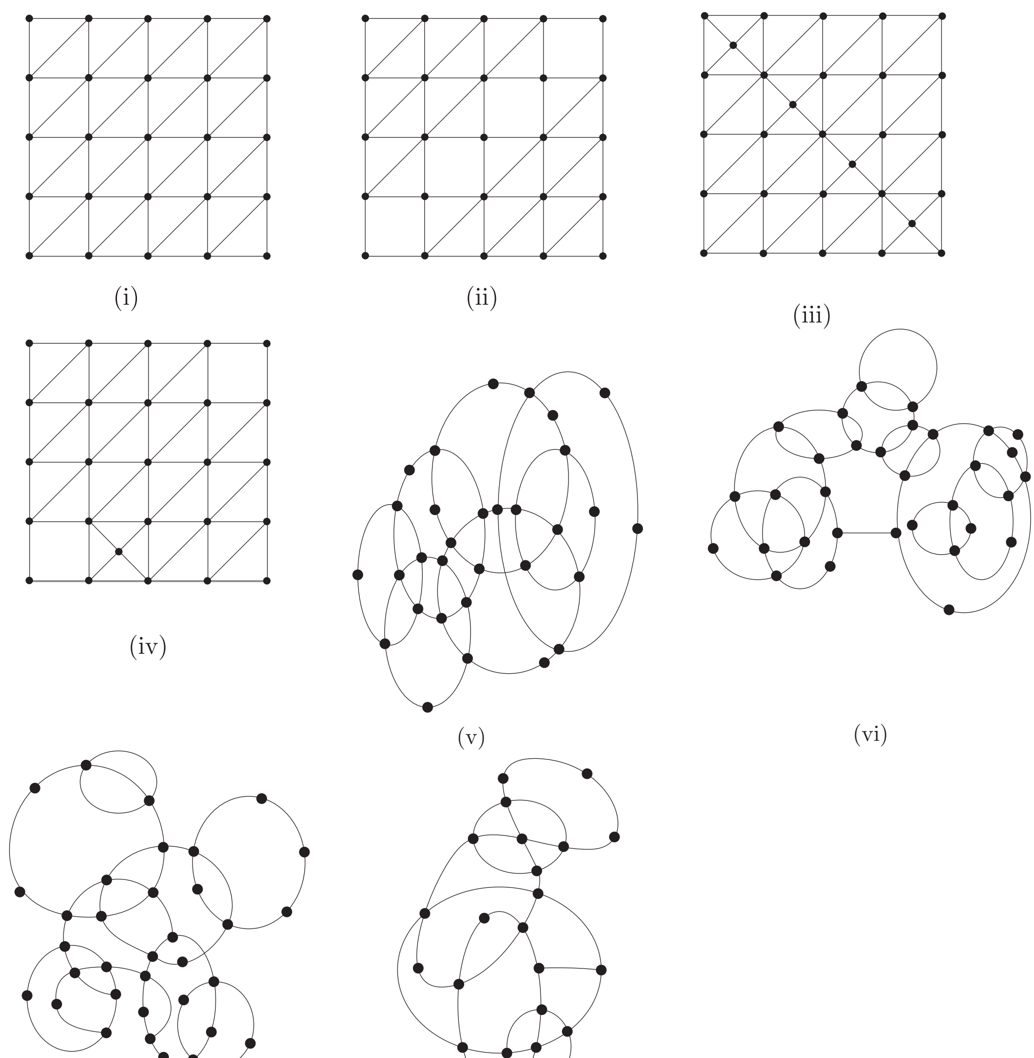

図 3.1　一筆書きをしてみよう

3.2　一筆書き

1 章で考えた一筆書きを考えます．一筆書きできるグラフとできないグラフの見分け方, そして, できるグラフに対して一筆書きの仕方を考えます.

問 図 3.2 のグラフに対して一筆書きをしてください．できないグラフもあります.

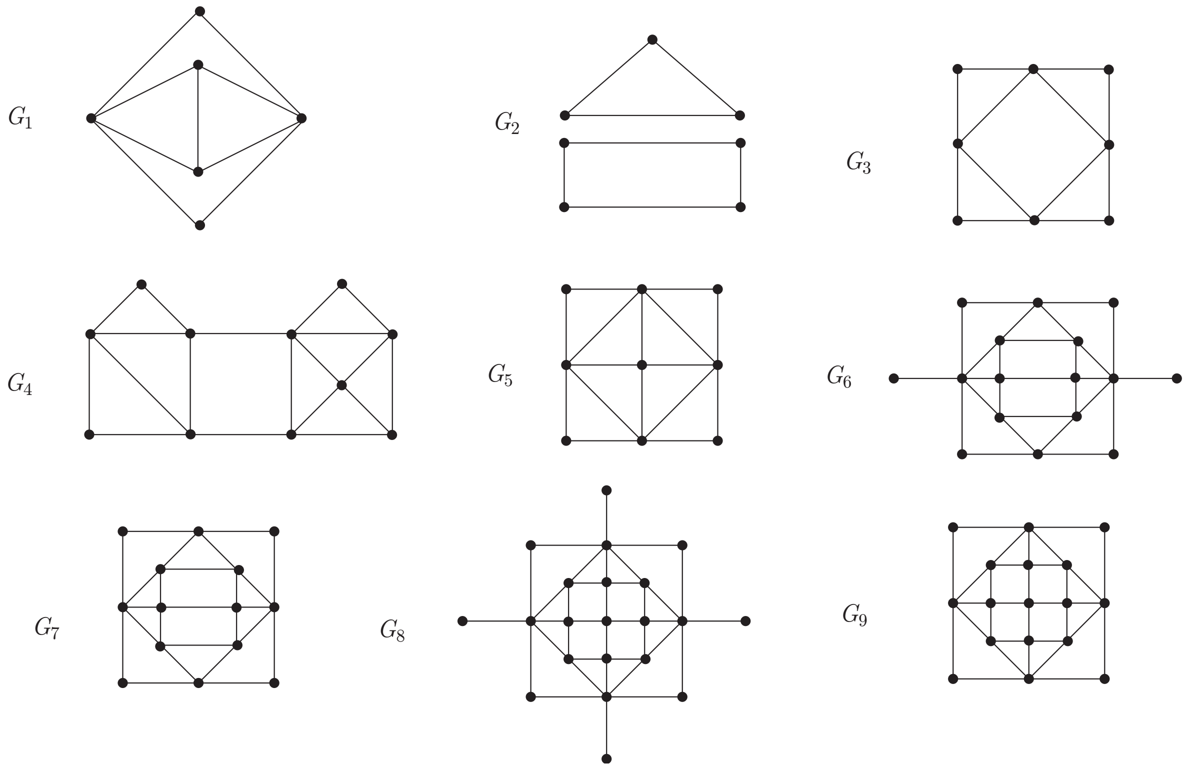

図 3.2　再び一筆書き

解説 グラフ G_1, G_3, G_4, G_6, G_7 が一筆書き可能で残りはできないグラフです.

① 1 つにつながっていないと一筆書きできないので，グラフ G_2 はできません.

② 始める頂点が決まっているグラフがあります.

グラフ G_3 は簡単に一筆書きができるグラフです.

グラフ G_1, G_4, G_7 は一筆書き可能ですがすこし 難しいグラフです．これらのグラフは一筆書きを始める頂点が決まっています.

図 3.2 のグラフの各頂点に集まる辺の本数を書き入れて，偶数のときには頂点を青で，奇数のときには頂点を赤で丸く囲みましょう．

グラフ G_6 は両端に伸びている辺があるので，そのどちらかの端点から始めないといけません．そして，他方の端点で一筆書きが終わります．一筆書きの始点と終点が決まっているグラフです．

グラフ G_7 はグラフ G_6 を少し変形したグラフなので, 同じように始点と終点が決まっています.

それに対して, グラフ G_3 はどの頂点を始点にしても良いグラフです.

頂点の色の赤に注目しよう．

一筆書きの途中の頂点では, 一筆書きをしたときに入ってくる辺と出て行く辺の 2 本の辺があるので頂点に集まる辺の本数は偶数になることがわかります．頂点の色は青になります.

一筆書きの始点と終点の頂点ではどうなるのでしょう．

始点と終点が異なる場合は対応する頂点に集まる辺の本数は一筆書きの途中で通る偶数本の辺に出発または到着した辺が 1 本加わるので奇数になリます．よって, グラフ G_1 とグラフ G_5 では頂点に集まる辺の本数が奇数 (赤い頂点) から出発して赤い頂点で終わらないといけません.

始点と終点が同じならば出発した辺 1 本と到着する辺 1 本の合計 2 本が加わるのでその頂点に集まる辺の本数は偶数となります.

グラフ G_5，G_8，G_9 は赤色の頂点が 4 つあるので一筆書できません.

■ 頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か奇数が 2 つでその他はすべて偶数となるグラフは一筆書き可能でしょうか.

定理 3.2.1 連結なグラフ G が一筆書き可能ということと, 頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か 2 つの頂点で奇数で残りはすべて偶数ということは, 同値です.

一筆書きの数学的な説明は後にして, 具体例で実践してみよう．一筆書きできないグラフの見分け方はわかったので, できるグラフを考えます．レベルをだんだんに上げていく練習問題を用意してあるので, 挑戦してみてください．また, 失敗しても良いようにグラフを 2 つ用意してあります.

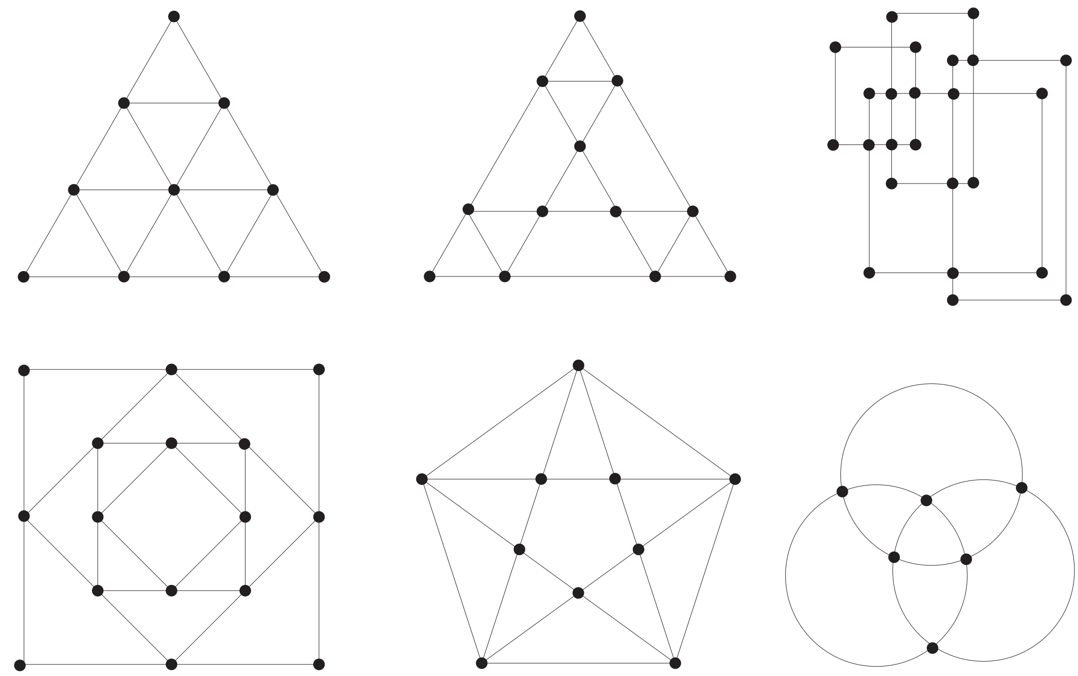

図 3.3　**難易度 1**

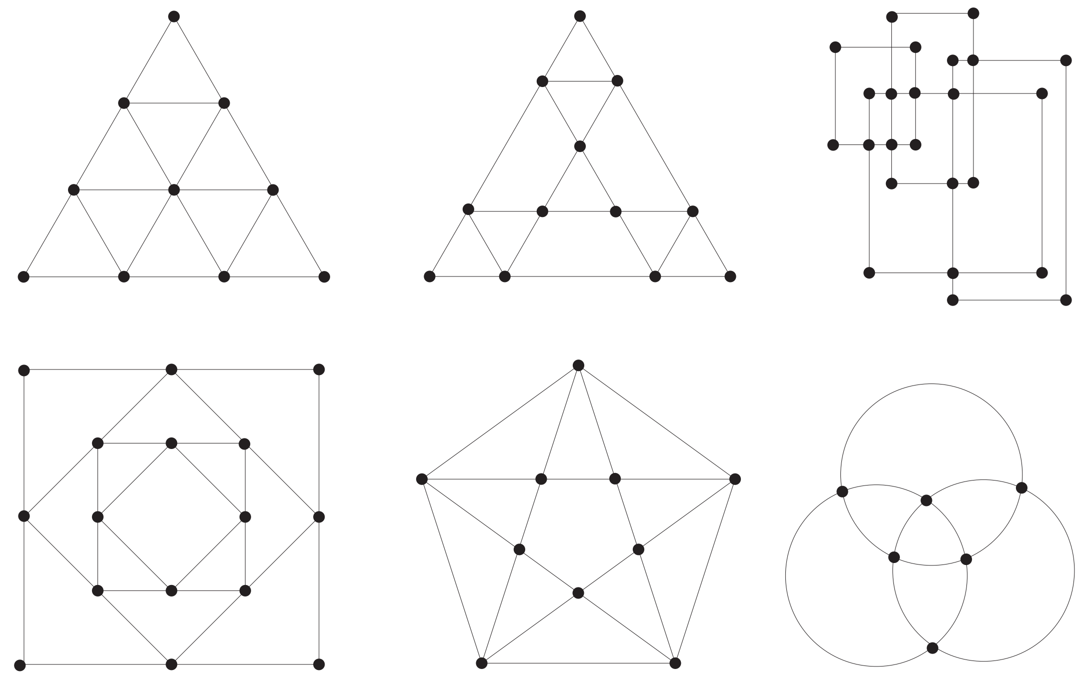

図 3.4　**難易度 1 again**

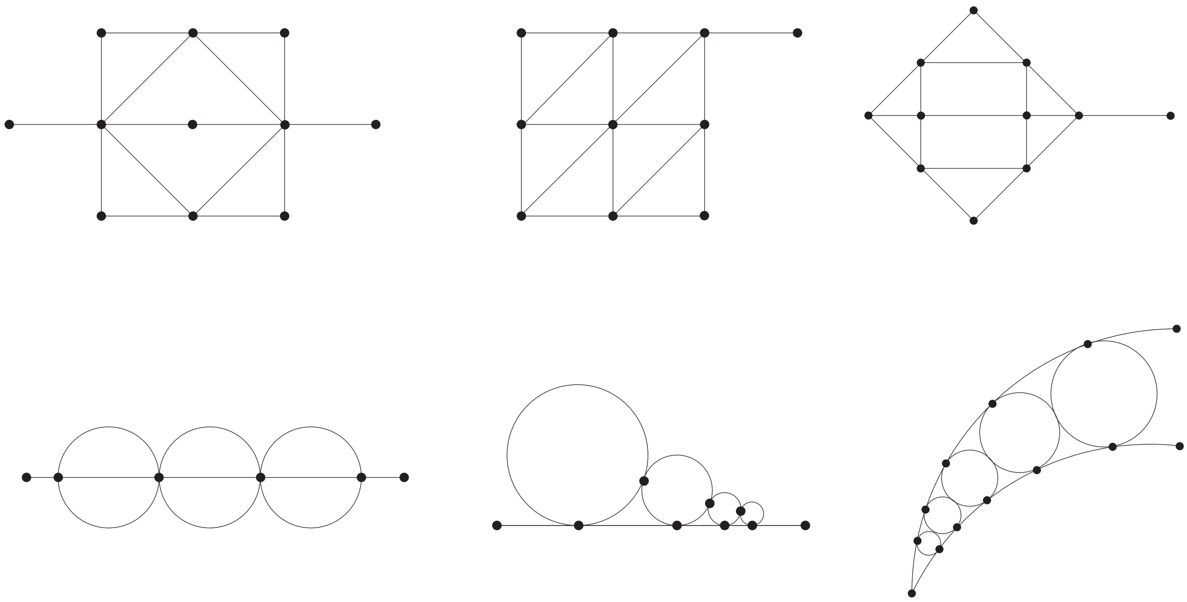

図 3.5　**難易度 2**

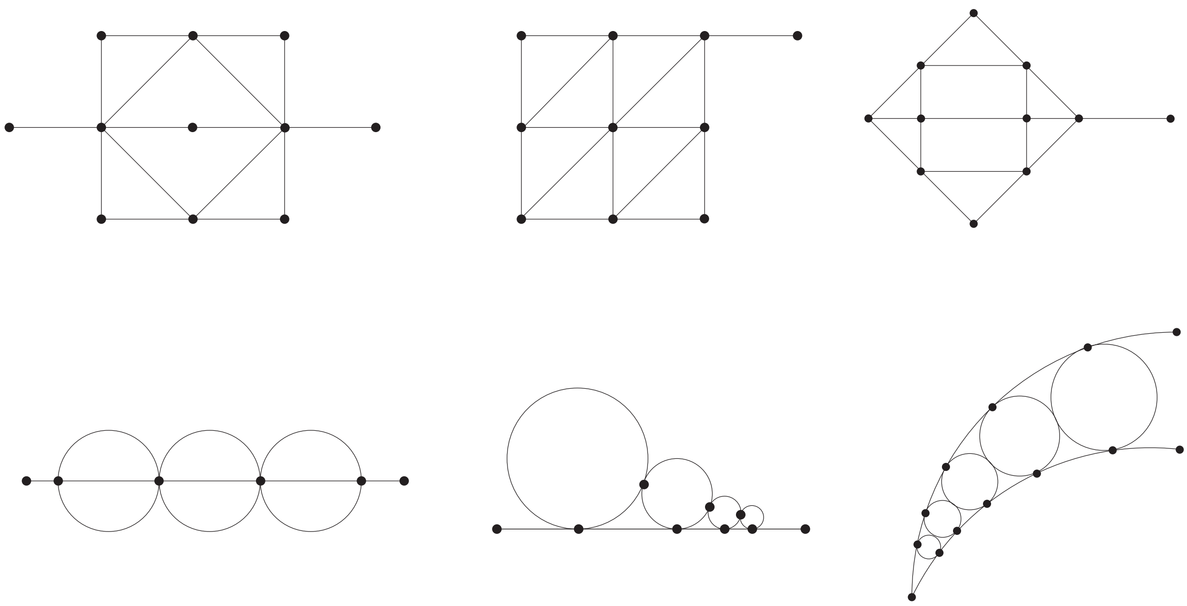

図 3.6　**難易度 2 again**

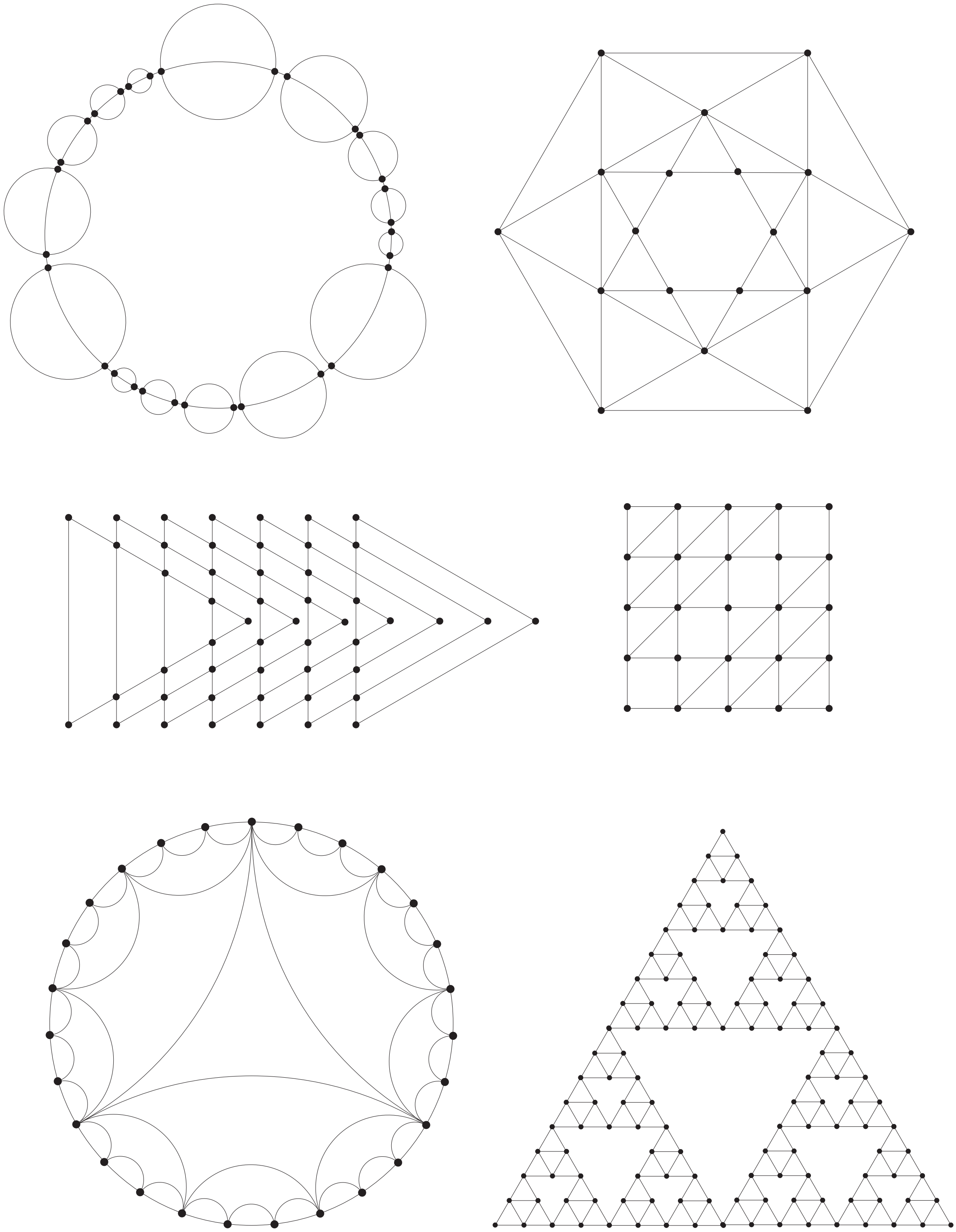

図 3.7　**難易度 3**

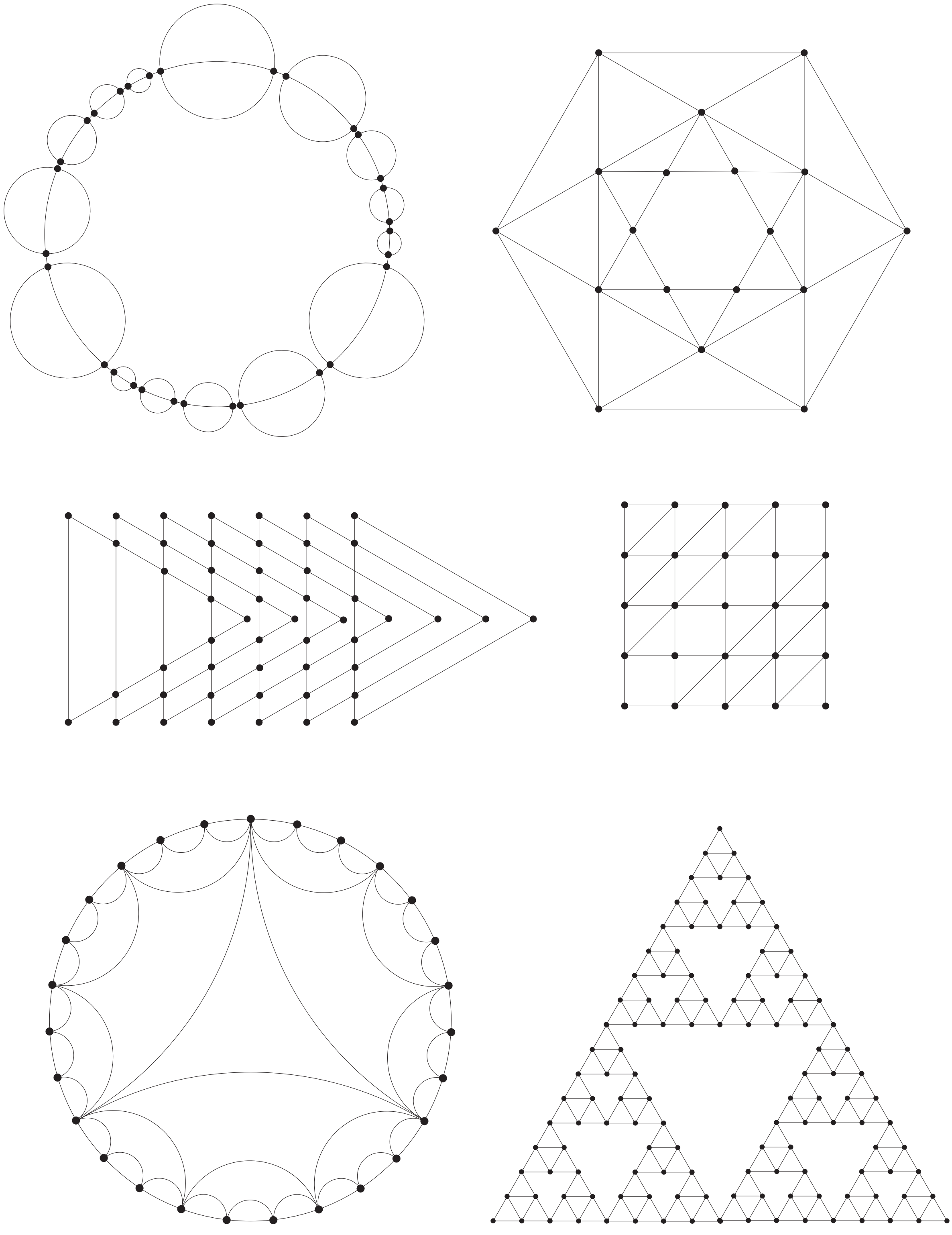

図 3.8　**難易度 3 again**

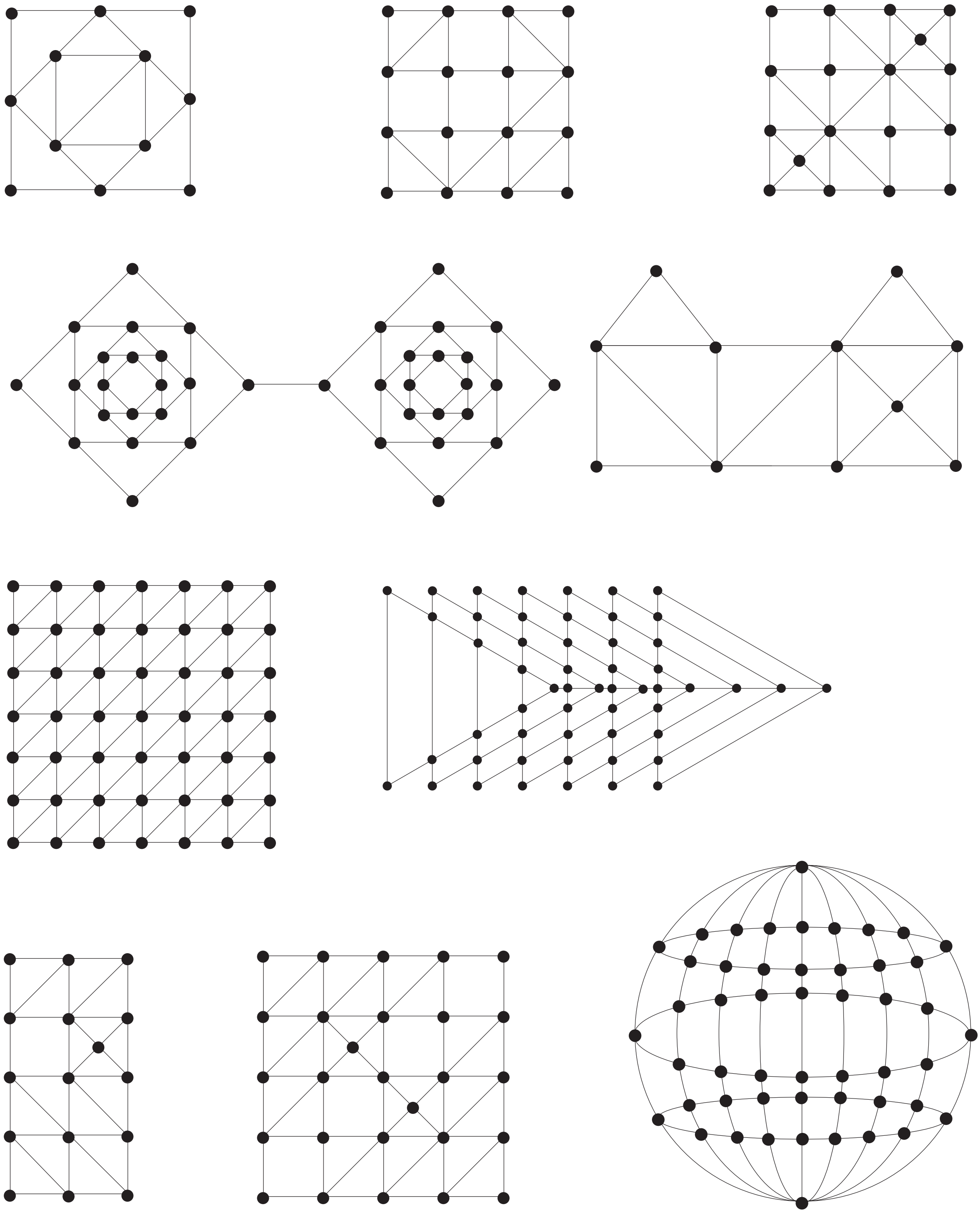

図 3.9　**難易度 4**

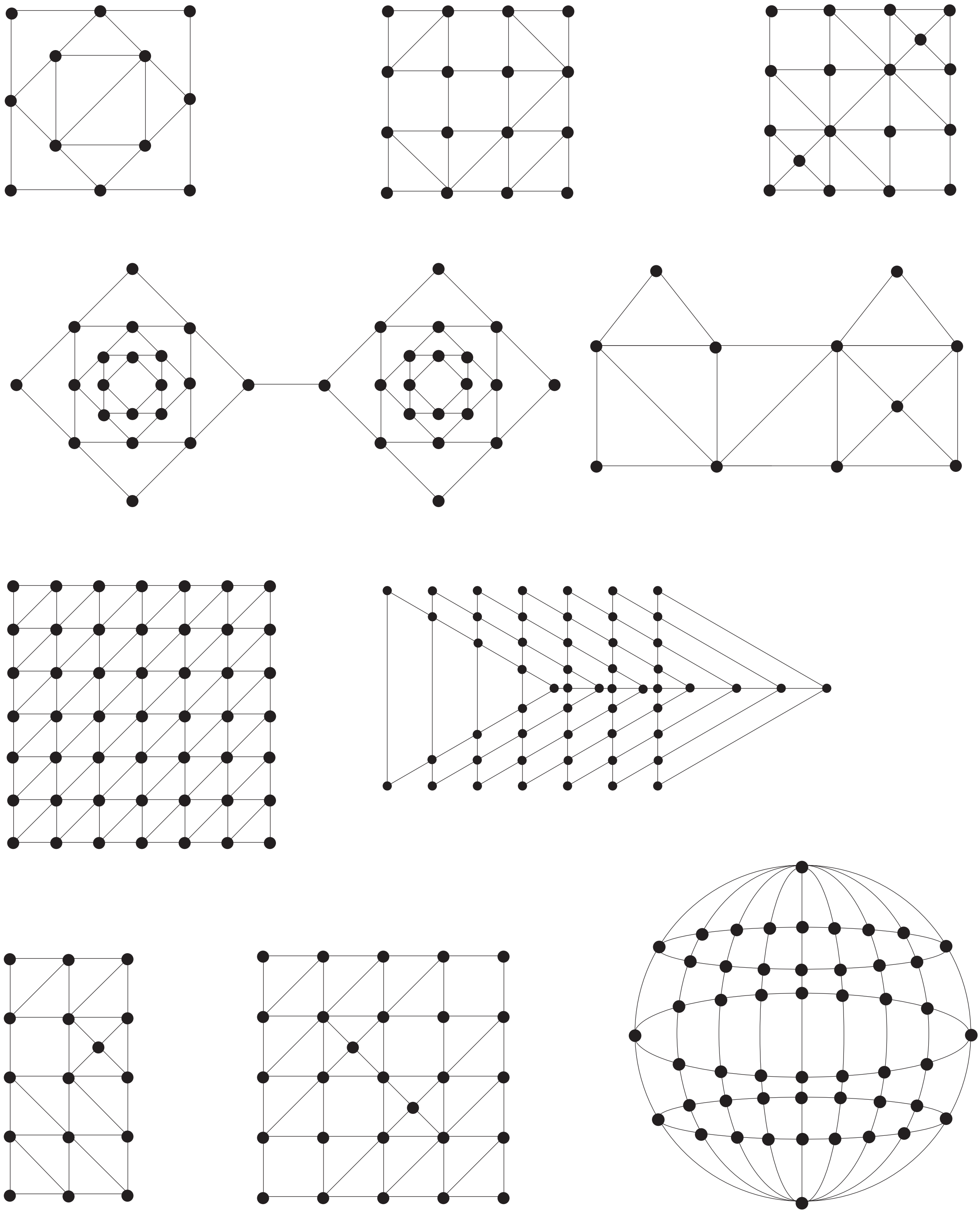

図 3.10　**難易度 4 again**

3.3　一筆書きの仕方

❶ 初めに頂点に集まる辺の本数がすべて偶数のとき

好きな頂点を選んで一筆書きをしていきます．もうこれ以上一筆書きできないという状態はどのような状態でしょうか.

具体例を自分で作って実験をすると理解しやすくなります．図 3.11 の簡単な例で一筆書きを行いましょう.

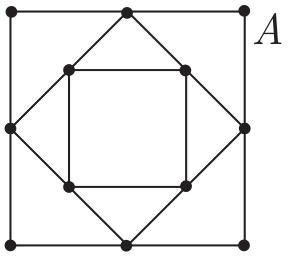

図 3.11　頂点に集まる辺の本数がすべて偶数

図 3.12 の頂点 A から出発して外側の正方形を 1 周します．頂点 A に戻ったらもうこれ以上進めません.

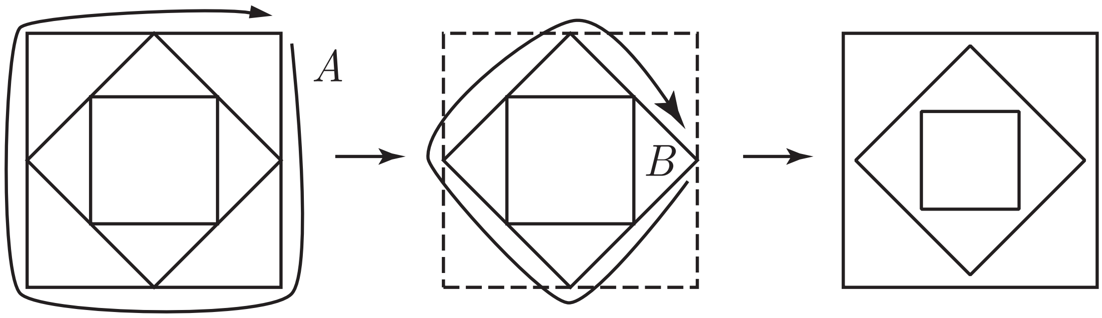

図 3.12　グラフの分割

図 3.12 の点線の 1 つの輪ができました.

まだ通過していない所に注目します．頂点 B から出発して矢印に沿って 1 周します．そして, 残った正方形も 1 周します.

すると, このグラフは 3 つの輪に分解されました．これら 3 つの輪から一筆書きを作っていきます.

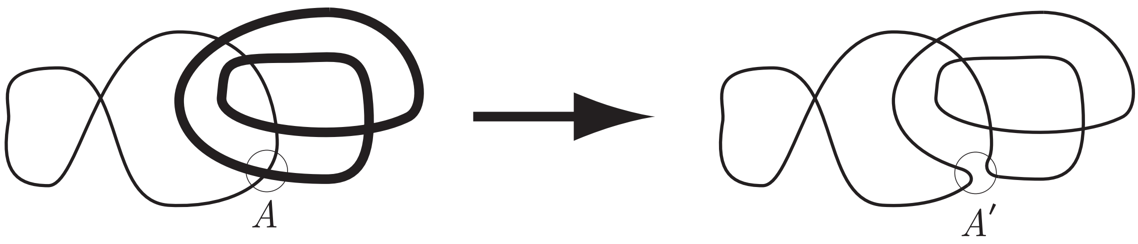

図 3.13　二つの輪を 1 つにして

図 3.13 の輪が 2 つある場合を考えます．図 3.13 の頂点 A の○で囲まれたところで一筆書きの行き方を新しい頂点 A' の○で囲まれたように変えると，2 つの輪が 1 つの輪に変わります.

この方法を使うと輪がいくつあっても一筆書きにすることができます．よって, 頂点に集まる辺の本数がすべて偶数のグラフはどんなグラフでも一筆書き可能となります.

図 3.1 の (ii) (v) と図 3.2 の G_3 をこの方法使って一筆書きしてください．図 3.1 (v) は輪がすぐに目に見える形で表現されています.

今回は簡単に一筆書きできたと思います.

❷ 頂点に集まる辺の本数が 2 つ奇数でそれ以外は偶数のとき

辺が奇数本集まる頂点に注目します．その頂点から一筆書きを行います．もう一筆書できなくなったときの頂点は辺が奇数本集まっています (なぜでしょうか)．すべての辺を通っていれば一筆書きできています.

残っている辺があれば残った辺からできるグラフを考えます．このグラフの頂点には偶数本の辺が集まっています．そこで，❶で行った方法を適用して一筆書きを行います.

すると 2 本の一筆書きになるので，図 3.13 の操作を行って一筆書きを完成させます.

レポート 4 一筆書きできる複雑なグラフを 3 つ以上作れ

レポート 5 一筆書きできない複雑なグラフを 3 つ以上つくり, なぜ一筆書きできないかを述べよ.

練習再び 図 3.14 のグラフに対して一筆書きをしてください．ただし，一筆書きできないグラフもあります．　(制限時間 5 分)

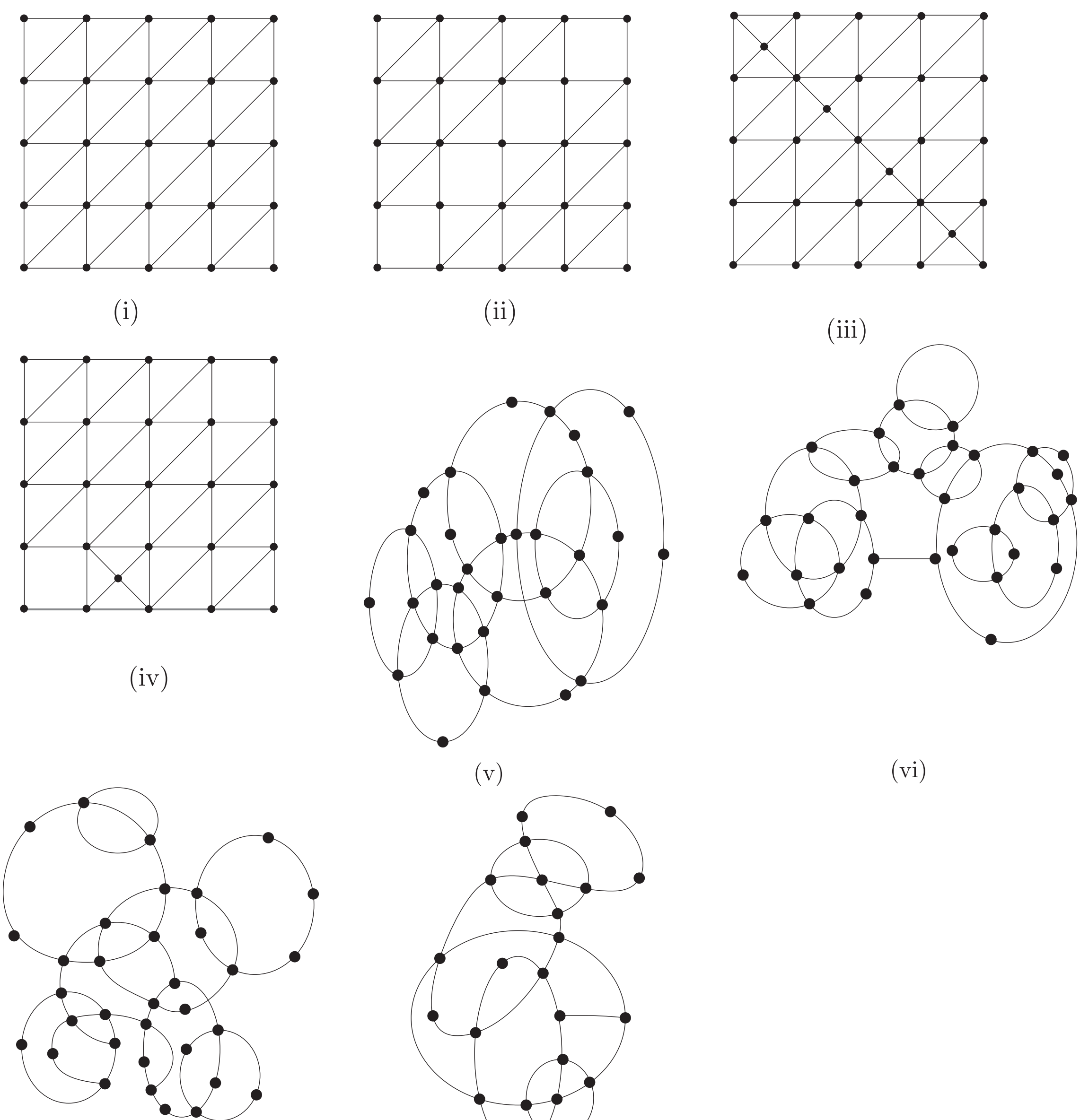

図 3.14　一筆書きをしてみよう

2015-10-08