# 1　はじめに

## 1.1　グラフ理論とは

グラフ理論の初歩について解説します．グラフ理論は双曲線・直線・三角関数とかのグラフや、円グラフ・棒グラフとか折れ線グラフとかを研究する理論ではありません．

グラフ理論は、グラフと呼ばれる頂点と辺 (線分) からなる図形を研究します．グラフの例は、一筆書きの図形や鉄道の路線図のようなものです．

■ 一筆書きの問題を使ってグラフ理論をちょっと垣間見てみよう．

ケーニヒスベルクの 7 つの橋の問題を聞いたことがあると思う．

図 1.1 は東プロシアの古都ケーニヒスベルグ、旧ソ連のカリーニングラードとして知られる町の地図です[*1]．そこを流れるプレーゲル川は町を中央のクナイホフと呼ぶ島を含む 4 つの地区に分割していました．7 つの橋が図 1.2 のように掛けられていました．

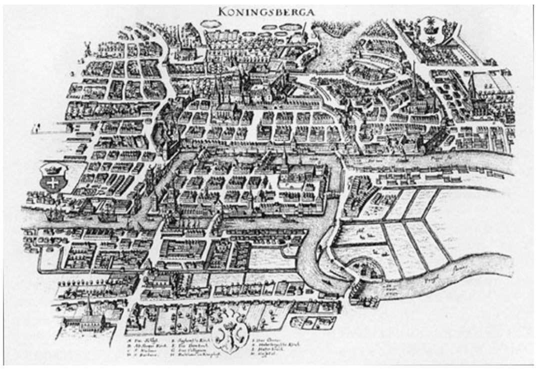



図 1.1　ケーニヒスベルクの橋 1

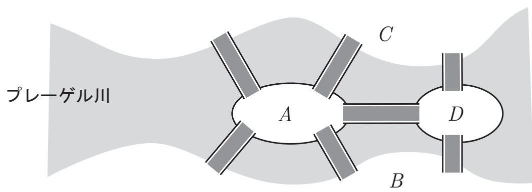



図 1.2　ケーニヒスベルクの橋 2

「この 7 つの橋を、ちょうど一度ずつ渡る渡り方があるだろうか」と問題になりました．図 1.2 でちょうど一度ずつ渡ることができるか試してもらいたい．

当時の多くの市民が実際に橋の渡り方を試したが、成功した者はいなかったということです．そこで、この橋を一度ずつ渡ることは不可能だと思われていました．

スイス生まれの数学者オイラー (L. Euler、1707–1783) が数学的に不可能だと証明をしました．

[*1] 絵は安野光雅氏のだったかもしれない．著作権上自分で書きなおしたほうが良いかも．

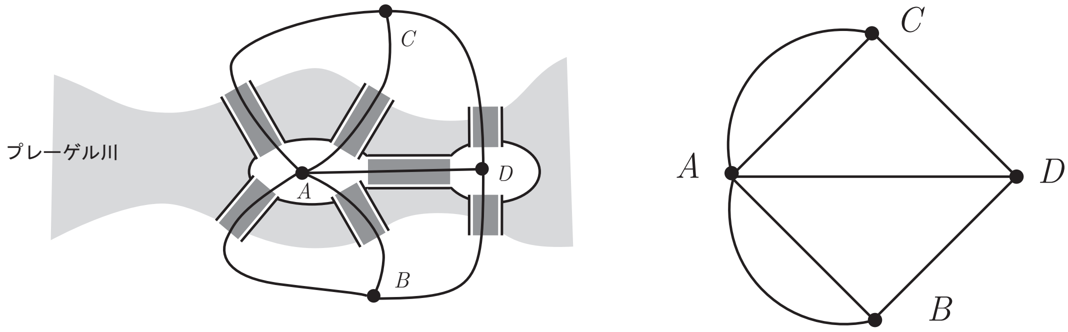



図 1.3　ケーニヒスベルクの橋のグラフ

オイラーは 1736 年の論文の中でこの問題では島の大きさとか橋の長さ・幅を無視してよいことを指摘しています．長さ・幅を無視するということは、図 1.3 の左図のように両岸と島を頂点とみなし橋を辺と呼ばれる線分または曲線とみなした図形を考えることです．そして、両岸と島を頂点，橋を辺としたこの図形がグラフの例になります．

数学ではこのように要らない情報をいかになくすか、また必要な情報をどのように表すかも重要な点です．

ケーニヒスベルクの橋の問題は、図 1.3 の右図のグラフが一筆書きできるかどうかという問題になります．

数学の問題では答えを自分で考えることが大事なので、このグラフが一筆書きできるかどうか考えてみよう．しかし、自分で考えることに不慣れな学生はこのグラフだけで考えると考えにくいかもしれないので、図 1.4 の幾つかのグラフがそれぞれ一筆書きできるかどうか考えてみよう．

簡単に一筆書きできるグラフやちょっと考えないとできないグラフ、そしていくら考えてもできないグラフがあると思う．

グラフが一筆書きができるかどうかの答えはここではしません．なぜなら，自分で考えて答えをだすほうが良いので（もし、オイラーより早く生まれていればオイラーの代わりに名前が歴史に残っていたかもしれない）もう少しヒントをだすので，考えてください．

(1) 各グラフに対し各頂点に集まっている辺の本数を書き込んでみよう
(2) 辺の本数が偶数ならば青、奇数ならば赤で頂点に色をつけよう．

次に一筆書きできたグラフを見てみよう．赤と青はどうなっているだろうか．3 章で一筆書きを学習すれば、図 1.5 の一筆書きの問題 (一部頂点を省略しています) を 5 分以内でできるようになると思う．

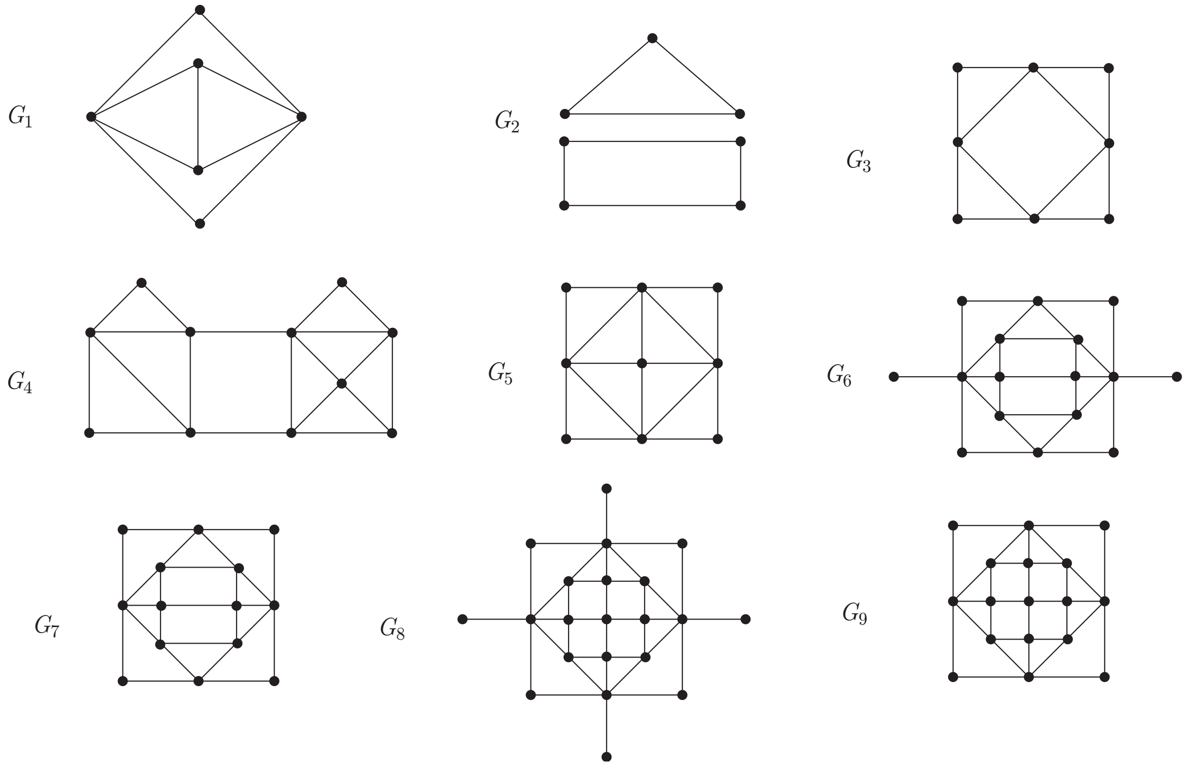



図 1.4　一筆書き

**宿題 1.** 大学の建物で、階段にある電灯のスイッチを考えてみよう．どの階のスイッチでも階段のすべての電灯がついたり消えたりします．このときの電線の回路はどうなっているか考えてください．これもグラフ理論の１つです．

**宿題 2.** 電車を考えましょう．ドアの外側にちいさな電灯があります．これはドアが開くと電気がつき、 すべてのドアが閉まると電気が消えます．これの回路も考えてください．

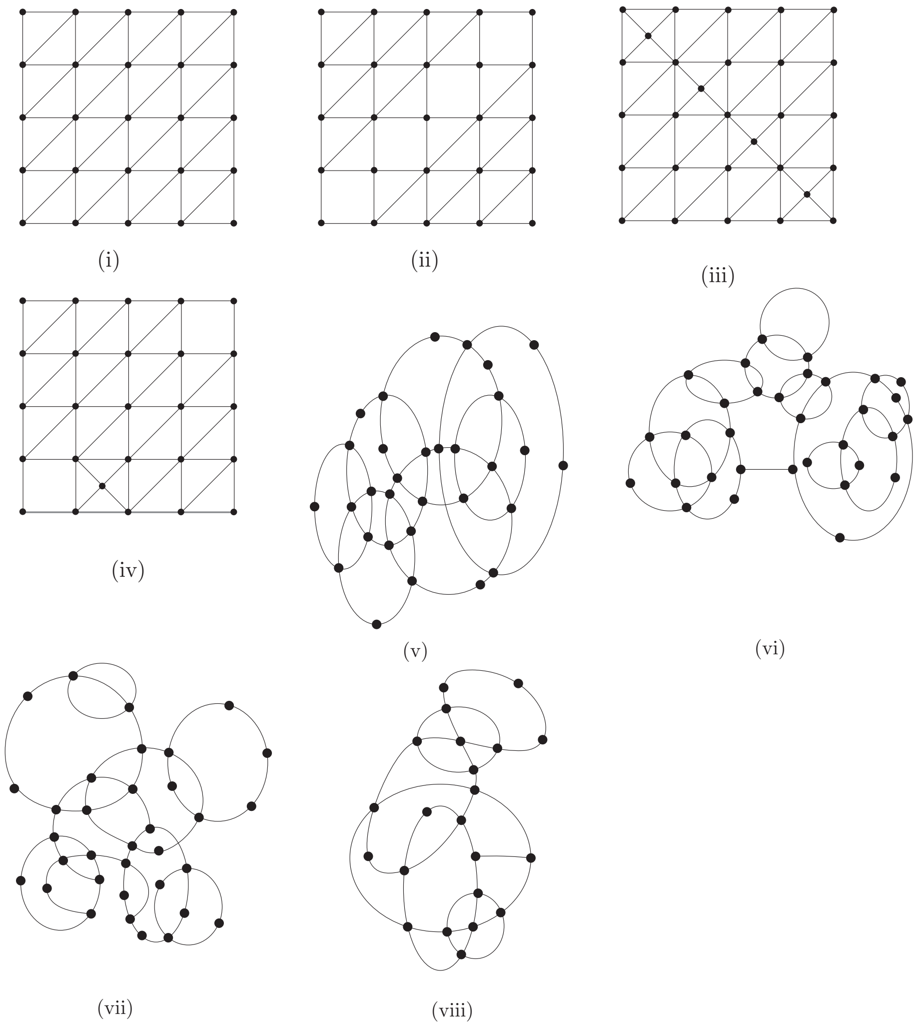



図 1.5　一筆書きでるだろうか (制限時間 5 分)

## 1.2　注意

このグラフ理論では、専門用語を覚える手間を少なくするために、なるべく専門用語を使用しない方向で進めます.

**追記** この授業では、はさみ、のり、色鉛筆、電卓、定規、コンパスなどをもって来た方が良いかもしれない.

**神戸薬科大学 内田吉昭**

**2015-09-25**

# 2　グラフの定義と応用

## 2.1　グラフの定義

**グラフ**とは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形です.

1 章での一筆書きの図形や図 2.1 はグラフの例です.

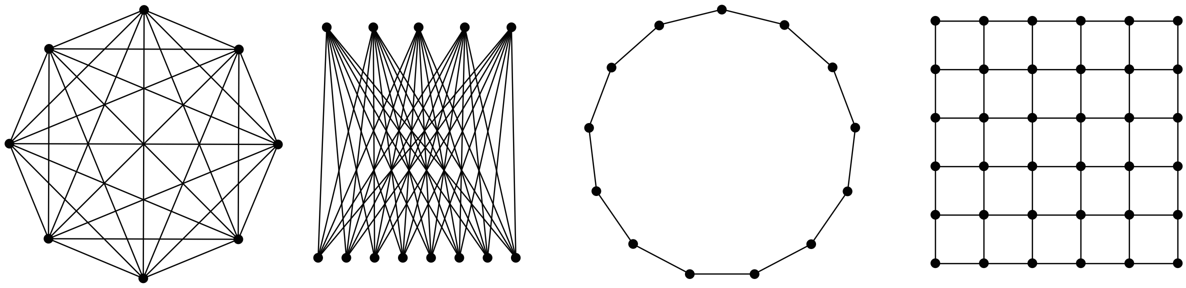


図 2.1　グラフ・グラフ・グラフ

この本では頂点は太い点 ● で表します. 図 2.1 の最初の 8 角形のグラフを見てほしい. このグラフで頂点は 8 角形の 8 つの頂点だけであり、対角線が交わっているところは、頂点ではありません.

Planarity[*1] は頂点を動かしてグラフを平らにするゲームです.

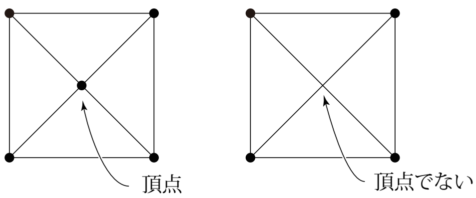



図 2.2　頂点と辺の交わり

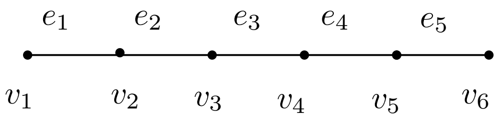
**練習** ノートにいくつかグラフを描いてみよう.

## 2.2　グラフと電線

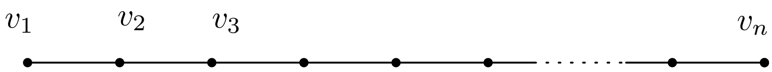
色々なものをグラフに表すことができます. たとえば、電柱を頂点として電線を辺とすれば電線と電柱のグラフができます.

[*1] http://www.planarity.net/

6 本の電柱が直線上に立っている．電線は何本ありますか.




$n$ 本の電柱が立っているとき，電線は何本あるでしょうか.




わからないときは、$n$ が 1, 2, . . ., $n$ と具体的に考えてよう.

| 電柱 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 電線 | | | | | | . . . | |

ちょっと複雑になった図 2.3 の場合にはどうなりますか. (i) から (v) のグラフの電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください.

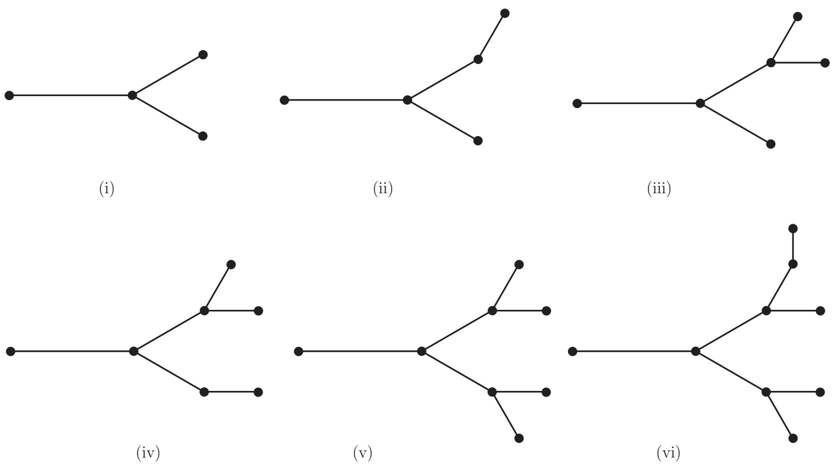



図 2.3　ちょっと複雑な電線

| 図 2.3 | (i) | (ii) | (iii) | (iv) | (v) | (vi) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 電柱 | | | | | | |
| 電線 | | | | | | |

図 2.4 のように頂点と辺を増やすことにより，図 2.3 の電線と電柱の例を拡張して電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．何か関係が見つかりませんか.

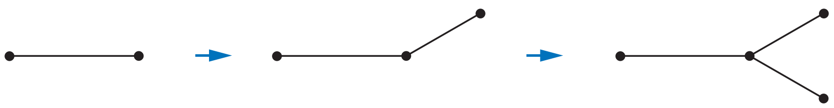
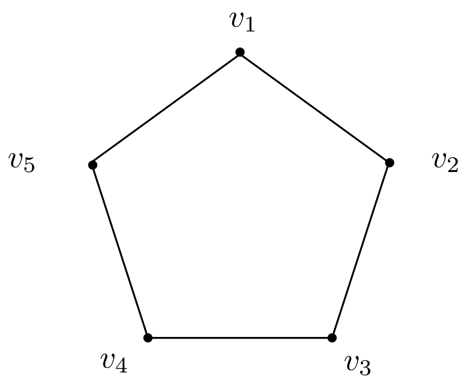


図 2.4　ちょっと複雑な電線の拡張

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 電柱 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | $\cdots$ | $n$ |
| 電線 | | | | | | $\cdots$ | |

## 2.3　輪のある電線

次の図のように輪になった電柱と電線の場合はどうなるでしょうか.

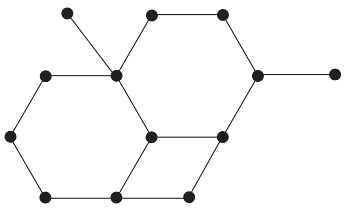



上の 5 本の電柱には電線は何本ありますか.

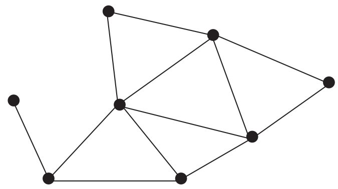
電柱が $n$ 本のとき，電線は何本あるでしょうか．次の空欄を埋めてください．

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 電柱 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $n-1$ | $n$ |
| 電線 | | | | $\cdots$ | | |

さらに、図 2.5 のように電柱と電線がありました．電柱と電線の関係はどうなるでしょうか．A と B の電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい．



(A)



(B)

図 2.5　たくさんの電線

| | A | B |
|---|---|---|
| 電柱 | | |
| 電線 | | |

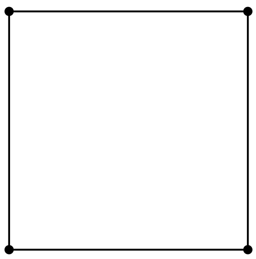
この場合，電柱と電線の関係は他に条件が必要です.

**レポート 1** どのような条件か考えましょう．ただし、考え方の一例を次の節でします.

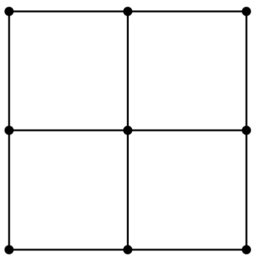
## 2.4　さらに複雑な電線 (オイラーの公式を目指して)

前の節で、複雑な電線を考えました．このような場合、どのように問題を考えていけば良いのかの一例を示すことにします.

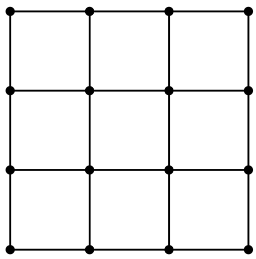
初めは簡単なグラフで考えよう.



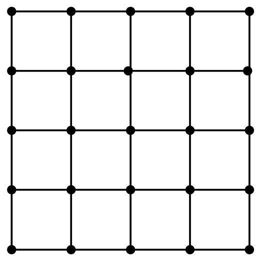
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

図 2.6　正方形の電線

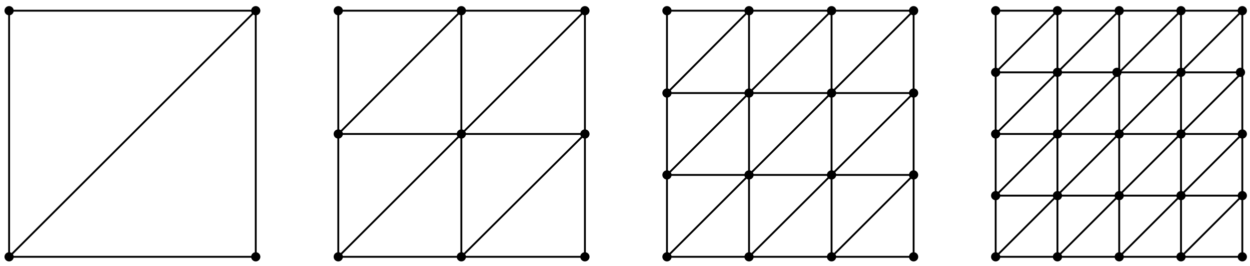
図 2.6 のグラフは格子状の形をしている正方形からなり正方形の一辺が 1 つ、2 つ、3 つと分割されています.

このグラフに対して、頂点数、辺数、一番小さな正方形で囲まれた面 (領域) の数を求めてみよう．

| グラフ | (i) | (ii) | (iii) | (iv) | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 頂点数 | | | | | $\cdots$ |
| 辺数 | | | | | $\cdots$ |
| 面数 | | | | | $\cdots$ |

頂点数、辺数、面数の間に関係がないだろうか．これらを足したり引いたり掛けたりして考えてほしい．

図 2.7 と 図 2.8 の 3 角形からなるグラフを考えよう．頂点数、辺数、最小の 3 角形で囲まれた面数を求めてみましょう．



(i) (ii) (iii) (iv)

図 2.7　3 角形の電線

| 図 2.7 のグラフ | (i) | (ii) | (iii) | $\cdots$ | $n \times n$ のグラフ |
|---|---|---|---|---|---|
| 頂点数 | | | | | |
| 辺数 | | | | | |
| 面数 | | | | | |

| 図 2.8 のグラフ | (i) | (ii) | (iii) | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| 頂点数 | | | | |
| 辺数 | | | | |
| 面の数 | | | | |

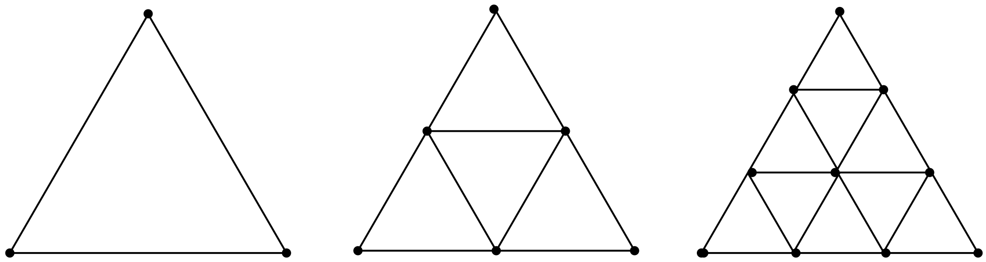


図 2.8　3 角形の中の 3 角形の電線

正方形のときも 3 角形のときも頂点数 $v$、辺数 $e$、面数 $f$ の関係[*2]は同じ関係になっています．$v$、$e$、$f$ の関係式を求めて、興味のある学生はなぜそうなるのか考えてください．この関係式がオイラー標数です.

## 2.5　向きの付いたグラフ

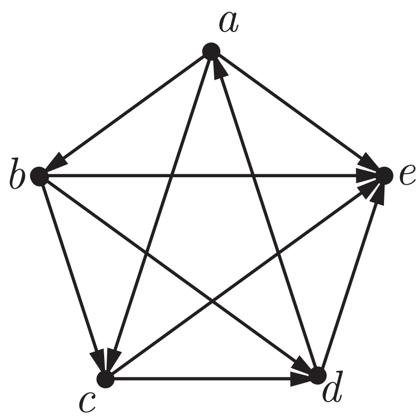
5 つのチーム $a, b, c, d, e$ でリーグ戦（総当り戦）をした．その結果つぎの表になった ($a$ チームは $b$ チームに勝った).

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | | ◯ | ◯ | × | ◯ |
| $b$ | × | | ◯ | ◯ | ◯ |
| $c$ | × | × | | ◯ | ◯ |
| $d$ | ◯ | × | × | | ◯ |
| $e$ | × | × | × | × | |

これをグラフを使って表してみよう．図 2.9 のように矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね.

この様に辺に向きをつけて考えることもあります.

[*2] $v$，$e$，$f$ は vertex(頂点)，edge(辺)，face(面) の頭文字です.



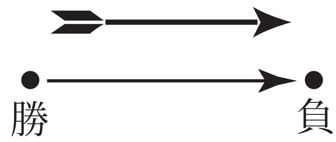




図 2.9　向きの付いたグラフ

**問題** 6 チーム $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$ がリーグ戦（総当たり戦）をしました．

成績は $A$ が四勝一敗、$B$ が全勝、$C$ が二勝三敗、$D$ が三勝二敗でした．$E$ は一度だけ勝っていますが、どのチームとの試合で勝ったのでしょうか．

この問題は、上のリーグ戦のグラフを使えば、簡単に解けます．6 チームなので正 6 角形の各頂点に各チーム $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$ を対応さよう．

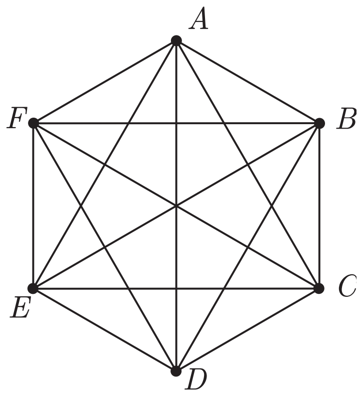



図 2.10　リーグ戦のグラフ

図 2.10 のグラフに条件に合うように辺に向きを書き入れていきましょう．ところが、$A$ の頂点から書き入れようとしても、どのチームと勝ったかどうかは、わからないですね．どのチームから考えればよいでしょうか．

$B$ は全勝しているので、残りのすべての頂点に対して $B$ を始点とする矢印つきの辺で結びます．

$A$ は四勝一敗なので $B$ 以外とはすべて勝っているのでそれらの頂点に対して同様に矢印つきの辺で結びます．
$D$ は三勝二敗なので $A$ と $B$ 以外の頂点に対して同様に矢印つきの辺で結ぶことができます．
$C$ は二勝三敗なので $E$ と $F$ の頂点に矢印つきの辺で結びます．
すると、条件から $E$ は 1 回だけ勝っているので残りの $F$ の頂点と矢印つきの辺で結ぶことになります．したがって、$E$ は $F$ に勝ったことがわかります．

**レポート 2** このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を考えよ．

**レポート 3** 好きな都道府県の国道からなるグラフを描け．国道を辺とみなして、いくつかの国道が交わっている点を頂点と考えよ．

名古屋地下鉄の路線図[*3]をグラフと考えて作成してみよ．ただし、すべての駅名を入れなくてよい．

東京・パリ・ニューヨークなど、地下鉄が複雑に走っている都市の地下鉄の乗り換え図を作成してみよう．

**2015-10-01**

[*3] 路線図は時刻表やインターネットで検索すれば出てきます．

# 3　一筆書き

## 3.1　一筆書きに挑戦

**練習** 図 3.1 のグラフに対して一筆書きをしてください．ただし，一筆書きできないグラフもあります．(制限時間 5 分)

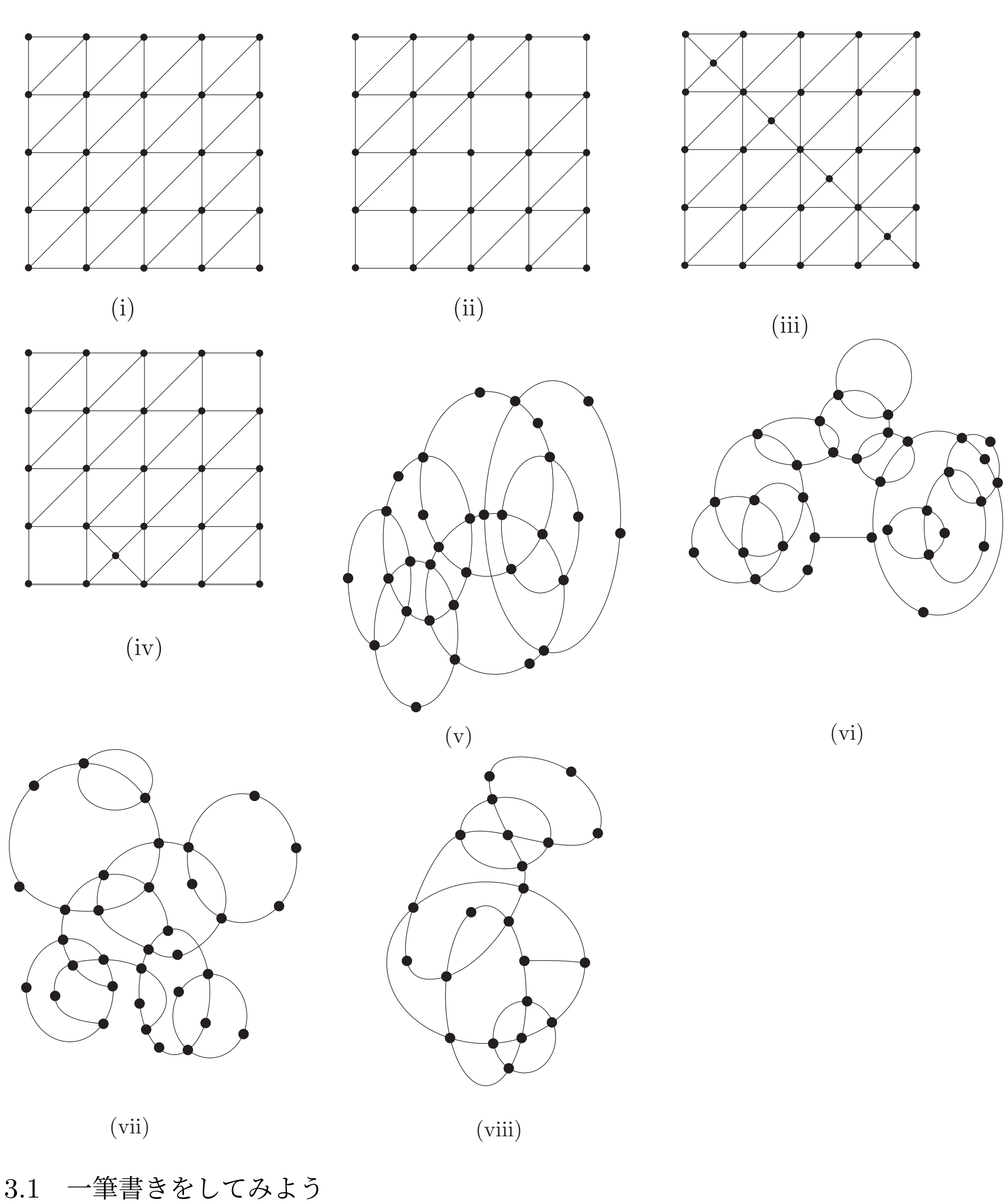



図 3.1　一筆書きをしてみよう

## 3.2　一筆書き

1 章で考えた一筆書きを考えます．一筆書きできるグラフとできないグラフの見分け方, そして, できるグラフに対して一筆書きの仕方を考えます.

**問** 図 3.2 のグラフに対して一筆書きをしてください．できないグラフもあります.

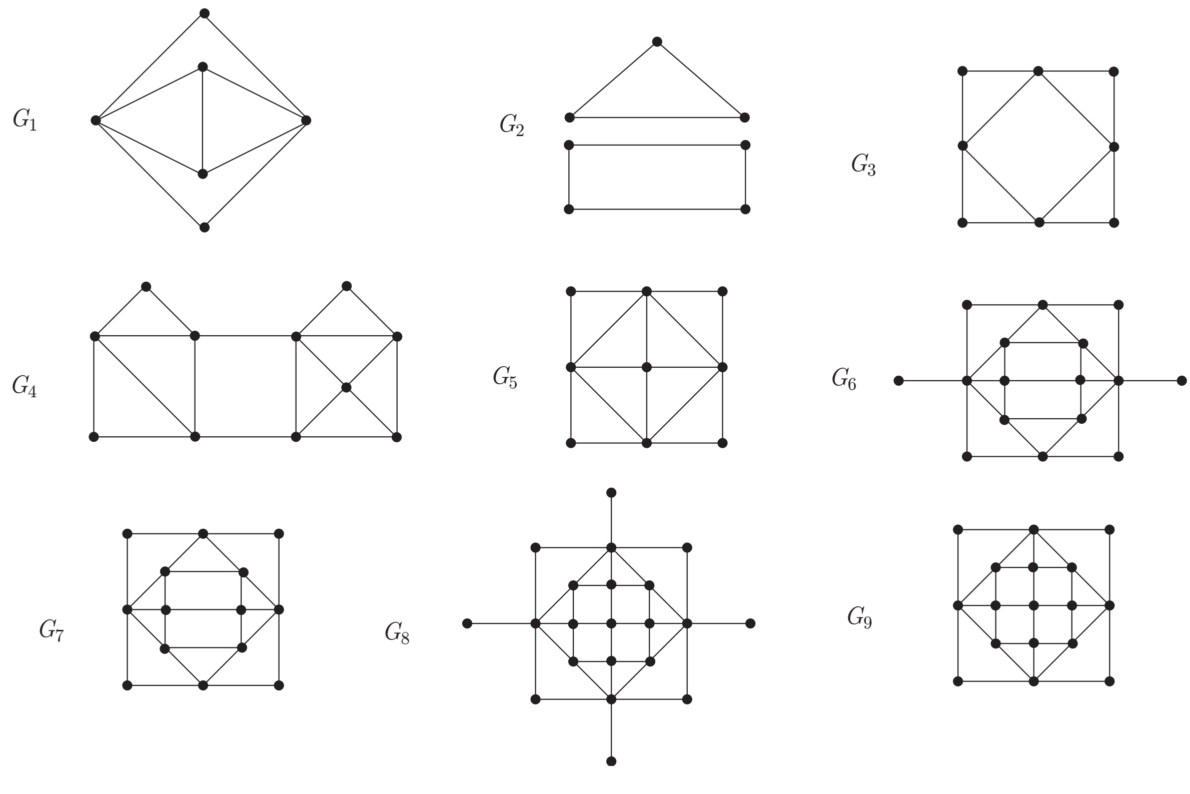



図 3.2　再び一筆書き

**解説** グラフ $G_1$, $G_3$, $G_4$, $G_6$, $G_7$ が一筆書き可能で残りはできないグラフです.

① 連結

つながっていないと一筆書きできないので，グラフ $G_2$ はできません.

② 始める頂点は.

グラフ $G_3$ は簡単に一筆書きができるグラフです．グラフ $G_1$, $G_4$, $G_7$ は一筆書き可能ですがすこし 難しいグラフです.

グラフ $G_1, G_4, G_7$ は一筆書きを始める頂点が大事です.

準備として，図 3.2 の各頂点に集まる辺の本数を書き入れ偶数の時には頂点を青で奇数の時には頂点を赤で塗りましょう.

グラフ $G_6$ は一筆書きの始点がすぐにわかるグラフです．両端に伸びている辺の端点から始めないといけません.

グラフ $G_6$ のように始点と終点が決まっているグラフがあります．グラフ $G_7$ はグラフ $G_6$ を少し変形したグラフなので, 同じように始点と終点が決まっています.

それに対して, グラフ $G_3$ はどの頂点を始点にしても良いグラフです.

頂点の色の赤に注目しよう.

一筆書きの途中の頂点では, 一筆書きをした時に入ってくる辺と出て行く辺の 2 本の辺があるので頂点に集まる辺の本数は偶数になることがわかります．頂点の色は青になります.

始点と終点ではどうなるのでしょう．始点と終点が同じならばその頂点に集まる辺の本数は偶数となります．始点と終点が異なる場合は対応する頂点に集まる辺の本数は奇数になるのがわかりますね.

よって, グラフ $G_1$ とグラフ $G_5$ では頂点に集まる辺の本数が奇数 (赤い頂点) から出発して赤い頂点で終わらないといけません.

グラフ $G_5$，$G_8$，$G_9$ は赤色の頂点が 4 つあるので一筆書できません.

頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か奇数が 2 つでその他はすべて偶数となるグラフは一筆書き可能でしょうか.

**定理 3.2.1** 連結なグラフ $G$ が一筆書き可能ということと, 頂点に集まる辺の本数がすべて偶数か 2 つの頂点で奇数で残りはすべて偶数ということは, 同値です.

一筆書きの数学的な説明は後にして, 具体例で実践してみよう．一筆書きできないグラフの見分け方はわかったので, できるグラフを考えます．レベルをだんだんに上げていく練習問題を用意してあるので, 挑戦してみてください．また, 失敗しても良いようにグラフを 2 つ用意してあります.

**一筆書き 難易度 1**

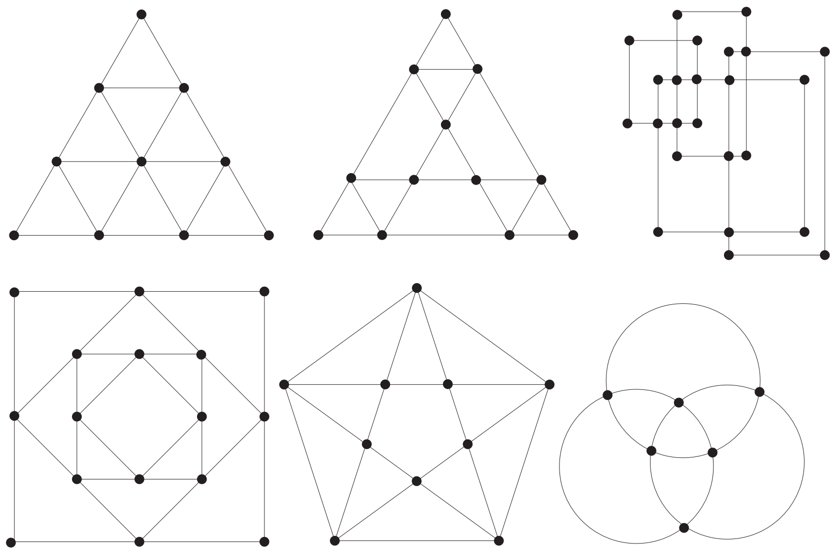


図 3.3　難易度 1

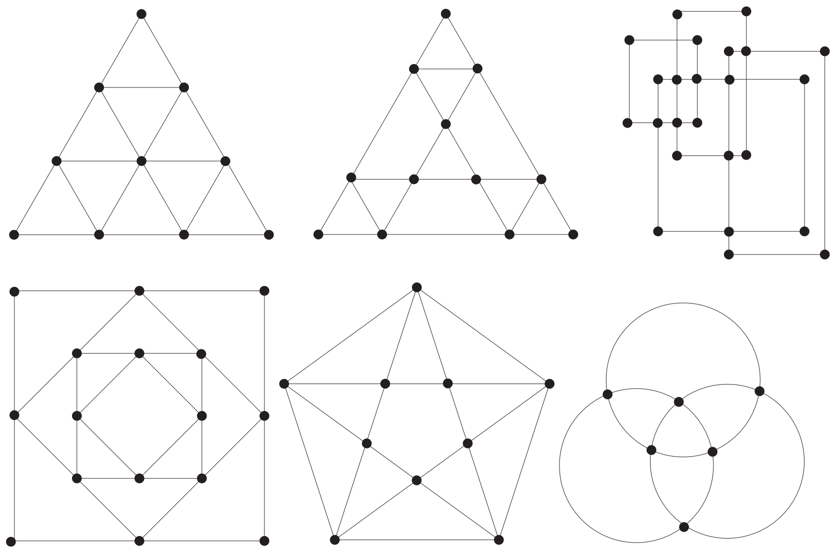


図 3.4　難易度 1 again

**一筆書き 難易度 2**

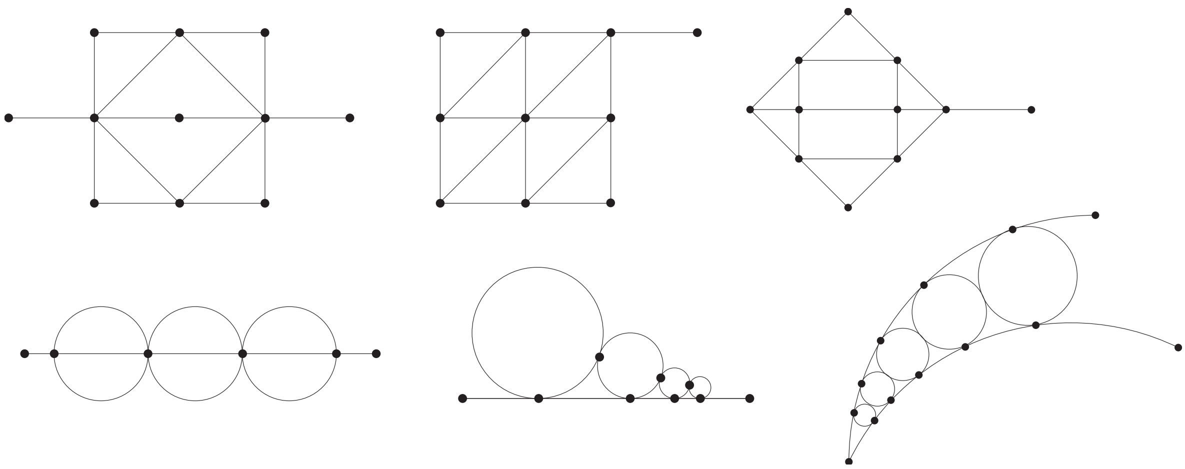


図 3.5　難易度 2

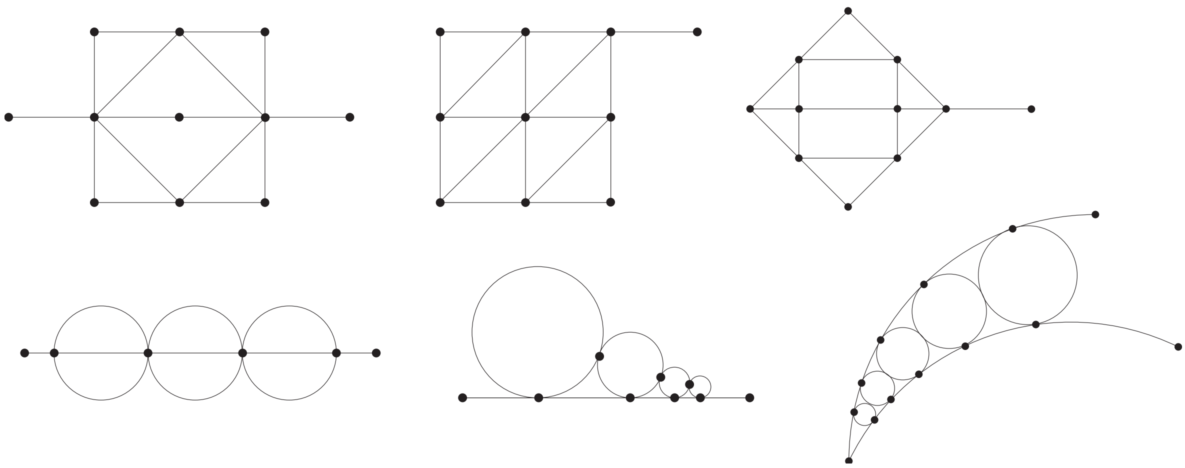


図 3.6　難易度 2 again

**一筆書き 難易度 3** 複雑なグラフなので**アルゴリズム**を考えよう.

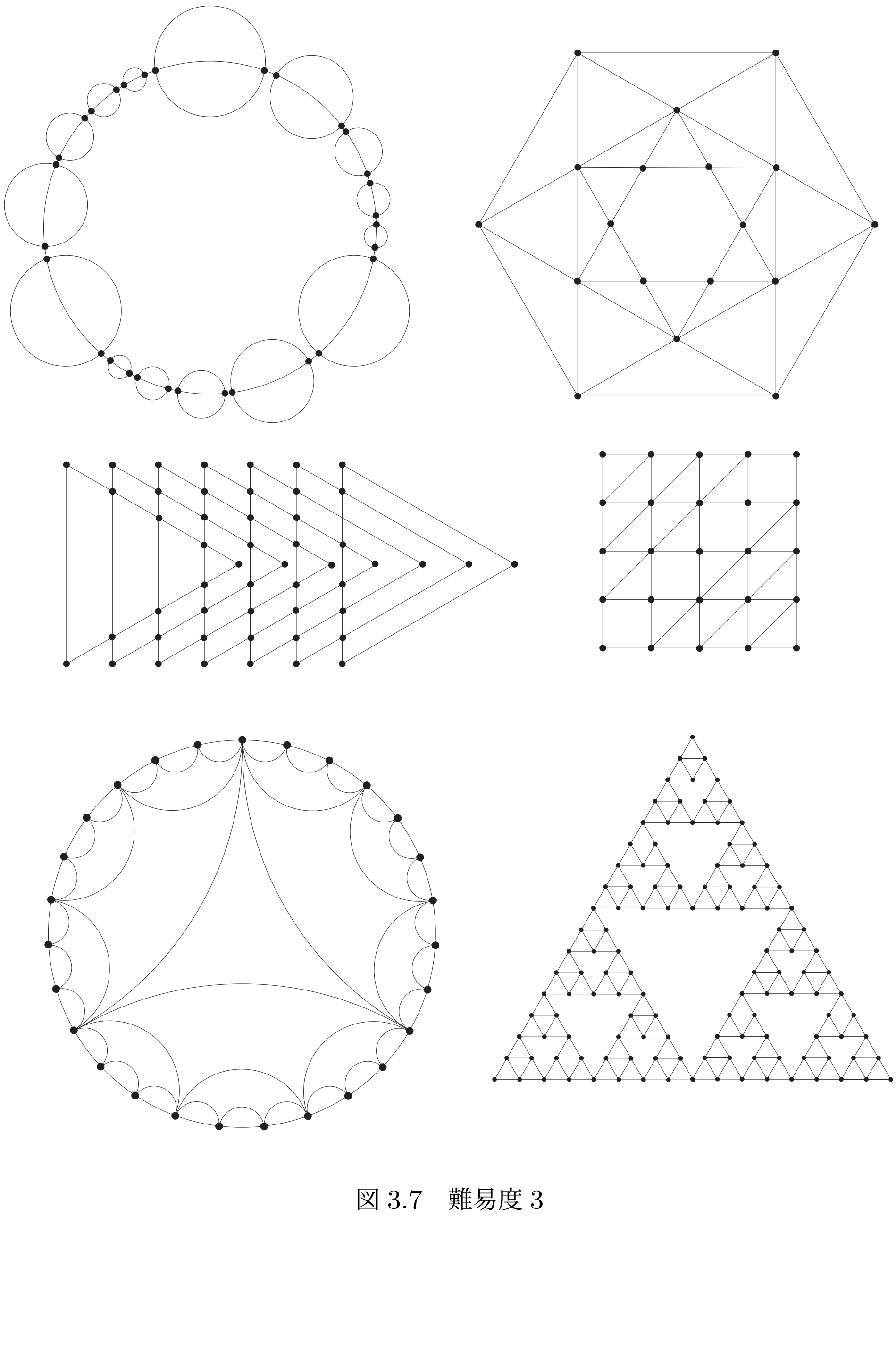


図 3.7　難易度 3

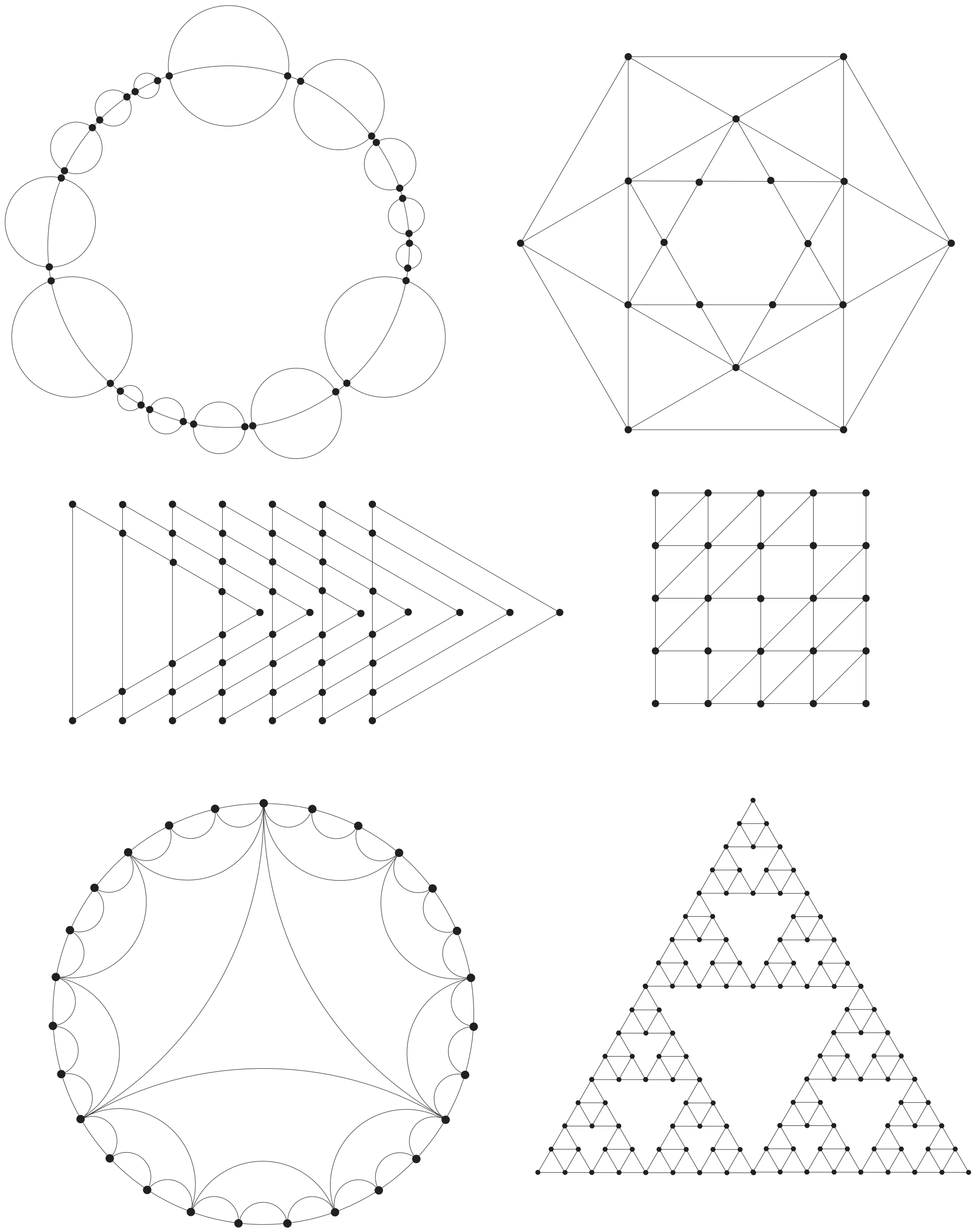


図 3.8　難易度 3 again

## 一筆書き 難易度 4

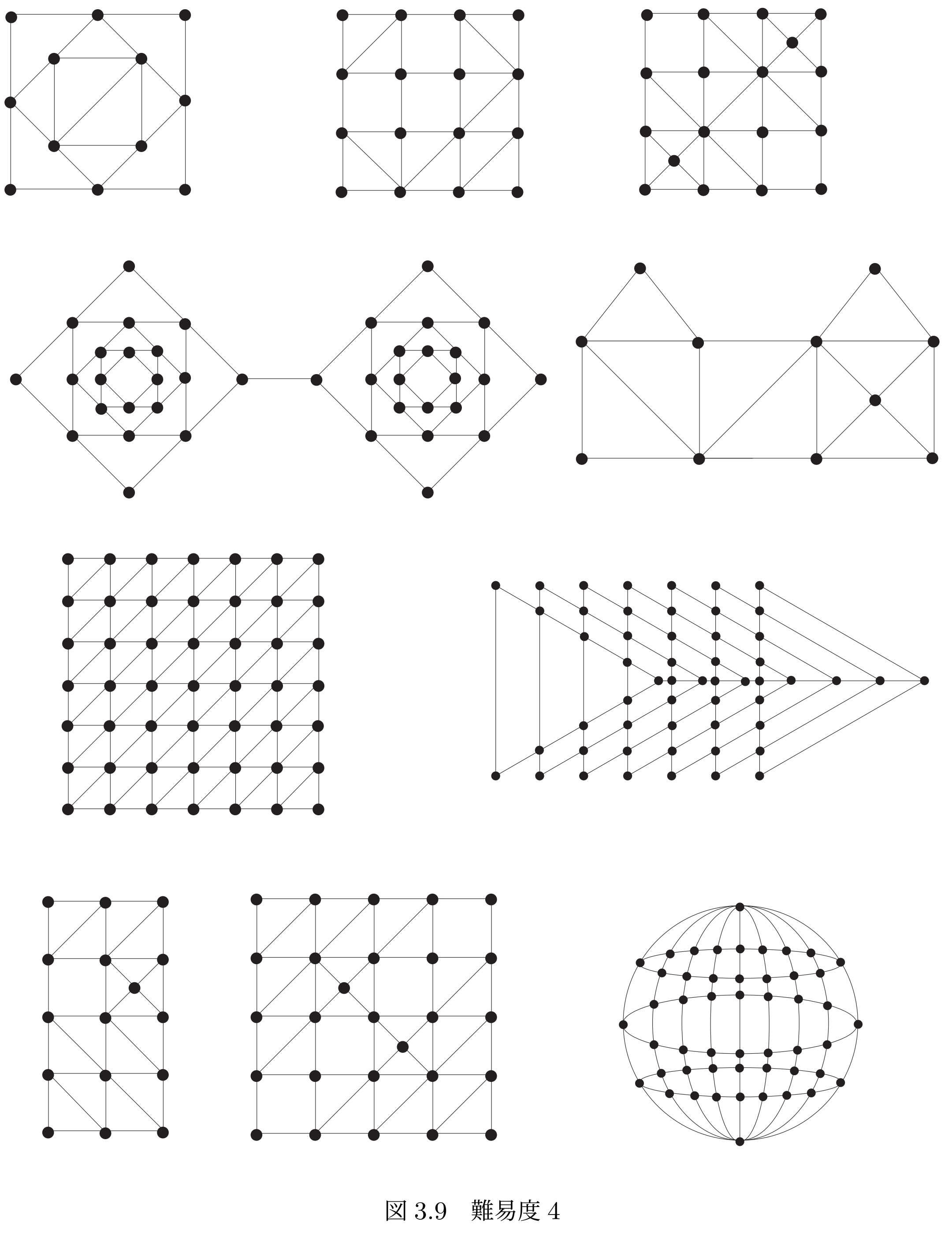


図 3.9　難易度 4

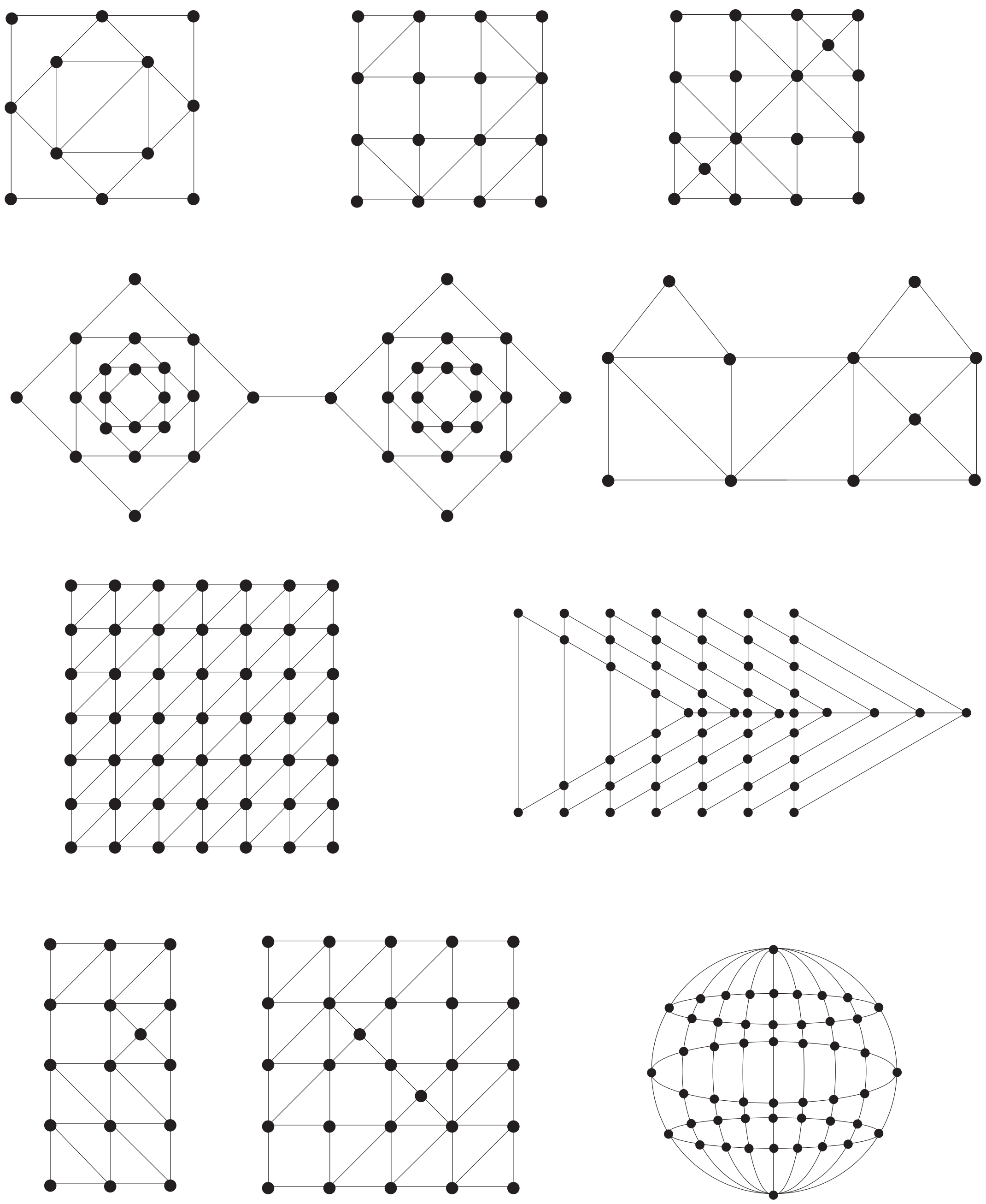


図 3.10　難易度 4 again

## 3.3　一筆書きの仕方

❶ 初めに頂点に集まる辺の本数がすべて偶数のとき

好きな頂点を選んで一筆書きをしていきます．もうこれ以上一筆書きできないという状態はどのような状態でしょうか.

具体例を自分で作って実験をするのが理解する上で非常に大事です．簡単な例で考えてみましょう.

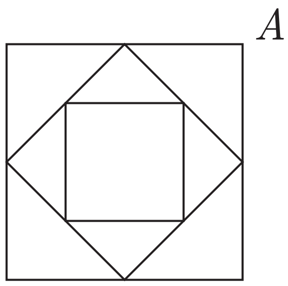



図 3.11　頂点に集まる辺の本数がすべて偶数

図 3.11 で実験してみます．図 3.12 のように, $A$ から出発して外側の正方形を 1 周して見ましょう．もとに戻った $A$ でもうこれ以上進めません.

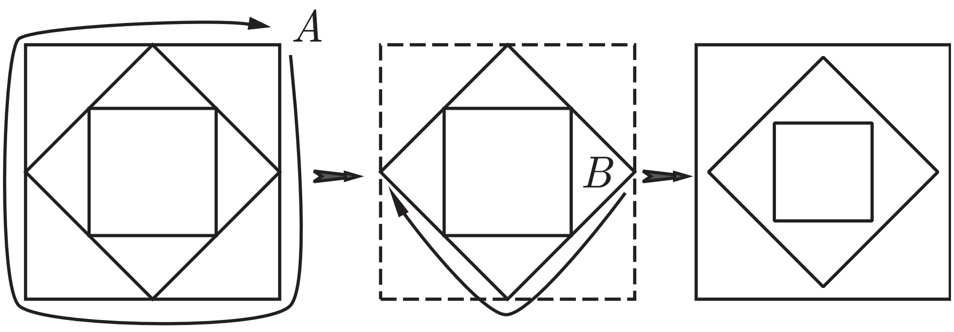



図 3.12　グラフの分割

一つの輪ができたことに気がついたでしょうか．しかし, これではまだ通っていない所があるので一筆書きできたことにはなりません.

そこで, まだ通過していない所に注目します．$B$ から出発して外側を 1 周しよう．そして, 残った正方形も 1 周しよう.

すると, このグラフはいくつかの輪に分解されることがわかります. では, これらのいくつかの輪からどうすれば一筆書きができるのでしょうか？

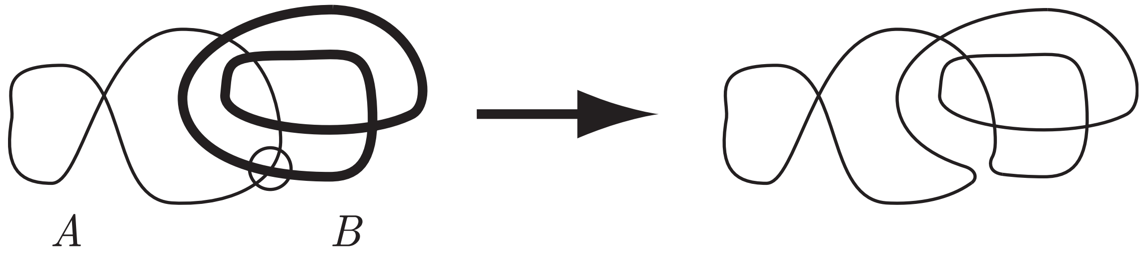



図 3.13　二つの輪を一つにして

簡単のために輪が 2 つある場合を考えましょう. 図 3.13 のように回り道をすれば 2 つの輪が 1 つの輪に変わります.

この仕組みが理解できれば輪がいくつあっても大丈夫です. よって, 頂点に集まる辺の本数がすべて偶数のグラフはどんなグラフでも一筆書き可能となります.

図 3.1 の (ii) (v) 図 3.2 の $G_3$ がそうなのでこの方法で一筆書きしてください. 図 3.1 (v) は輪がすぐに目に見える形で表現されていることに気がつきましたか？

今回はかなり簡単に一筆書きできたと思います.

❷ 頂点に集まる辺の本数が 2 つ奇数でそれ以外は偶数のとき

辺が奇数本集まる頂点に注目します. その頂点から一筆書きを行います. もう一筆書できなくなったときの頂点は辺が奇数本集まっています (なぜでしょうか). 残っているグラフに❶で行った方法を適用します.

以上のことを理解すれば, どんなグラフでも一筆書きできるかどうかわかるし一筆書きできるグラフは一筆書きができるようになります.

**レポート 4** 一筆書きできる複雑なグラフを 3 つ以上作れ

**レポート 5** 一筆書きできない複雑なグラフを 3 つ以上つくり, なぜ一筆書きできないかを述べよ.

**練習再び** 図 3.14 のグラフに対して一筆書きをしてください. ただし, 一筆書きできないグラフもあります.

(制限時間 5 分)

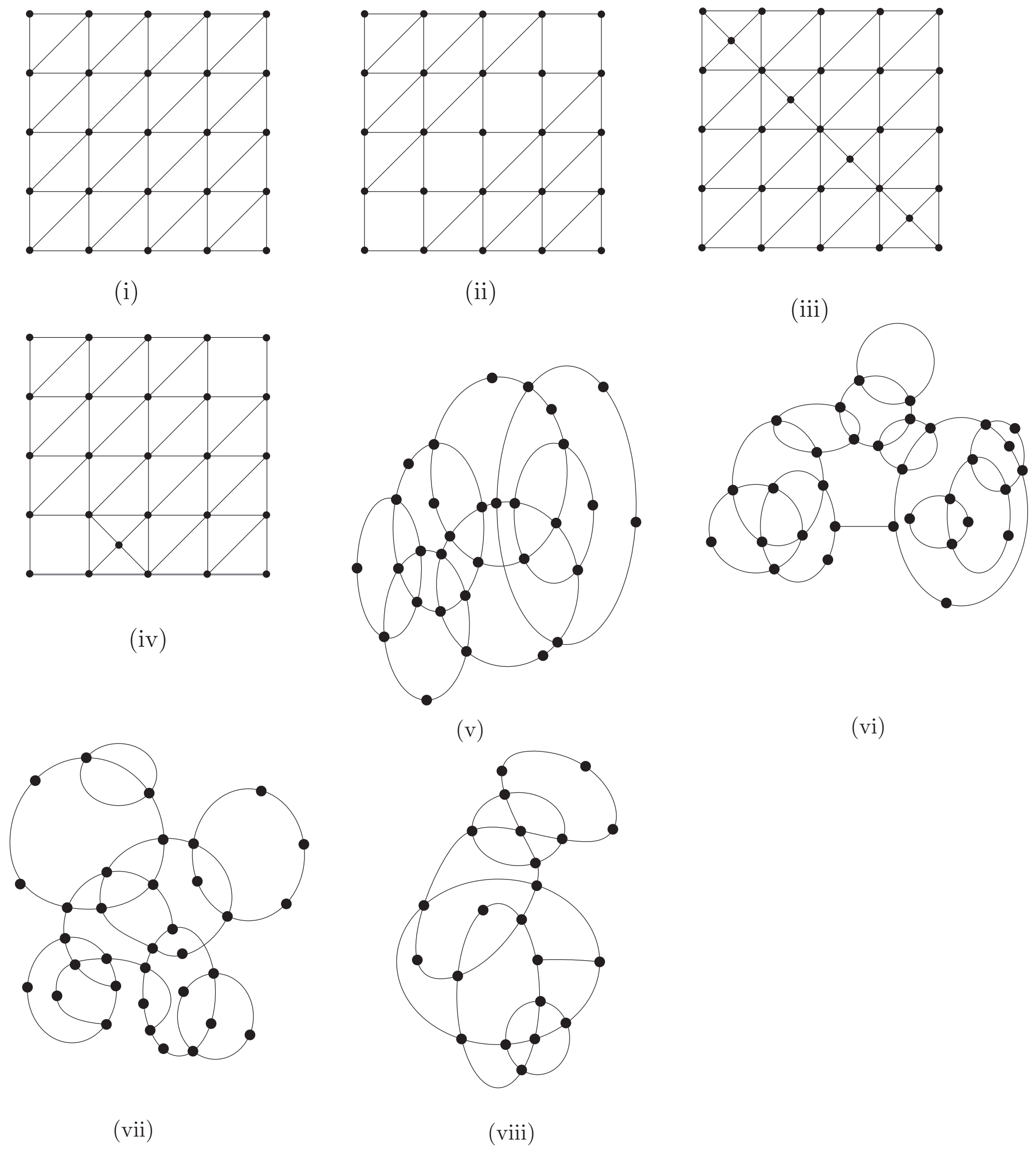



図 3.14　一筆書きをしてみよう

**2014-10-09**