

12 あみだ籤の阿弥陀さま

12.1 あみだ籤

あみだ籤 (アミダクジ) を知っているだろう。あみだ籤を縦棒と横棒からなっているグラフだと思う。

【問題 1】 図 12.1 (i) と (ii) のあみだ籤がある。両方のあみだ籤も、○ は 1 に × は 2 に対応している。ここで横棒 1 本つけ加えて ○ は 2 に × は 1 に対応させるようにしたい。

(i) と (ii) のあみだ籤で可能だろうか、可能ならばどこに線を引けば良いか。

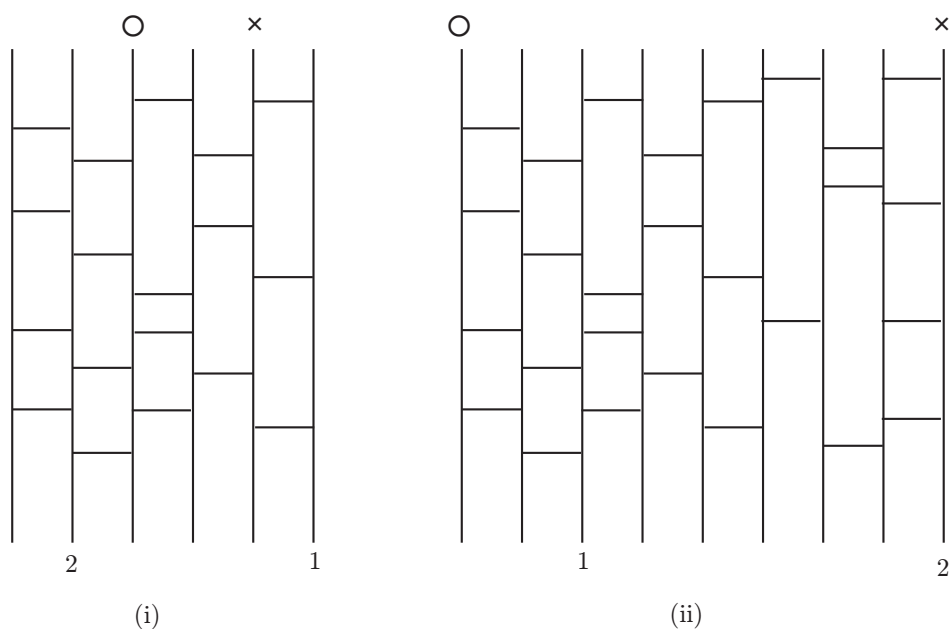


図 12.1 あみだ籤

【解答】 横棒を 1 本入れることで何が変わるのだろうか。

図 12.2 あみだ籤に横棒を書くと

図 12.2 から横棒を加えることによりその両端の通る線の結果を入れ換えることができる。

問題のあみだ籤 (i) はどこに横棒を入れれば良いかわかりますね。あみだ籤 (ii) は横棒を書き入れる場所がないので横棒 1 本では不可能です。

【問題 2】 図 12.1(ii) で横棒を何本か使って良いとして ○ と × の結果を入れ替えることは可能だろうか？

【問題 3】 図 12.3 の結果になるようにあみだ籤に横棒を書き入れよ。ただし、答えは一通りではありません。

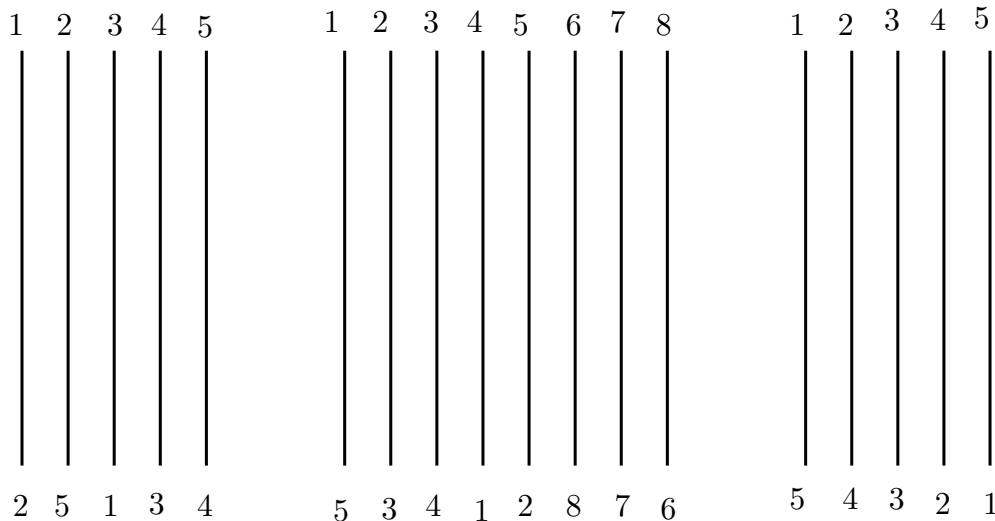


図 12.3 横棒を入れて

あみだ籤は、あみだ籤の上と下の結果を対応させます。

逆に上と下を与えて結果がその様になるあみだ籤を考えよう。図 12.3 の様に、縦棒が n 本のあみだ籤に対して上には 1 から n を与えて、下にはほしい結果の番号 1 から n を書くことにします。

あみだ籤を完成させよう。

図 12.3 では、ほとんどの学生は試行錯誤で横棒を書き入れたと思います。試行錯誤でない方法を考えることにします。

練習 図 12.4 のあみだ籤に横棒を書き入れてあみだ籤を完成させましょう。なるべく書き込む棒の本数を少なくしてください。

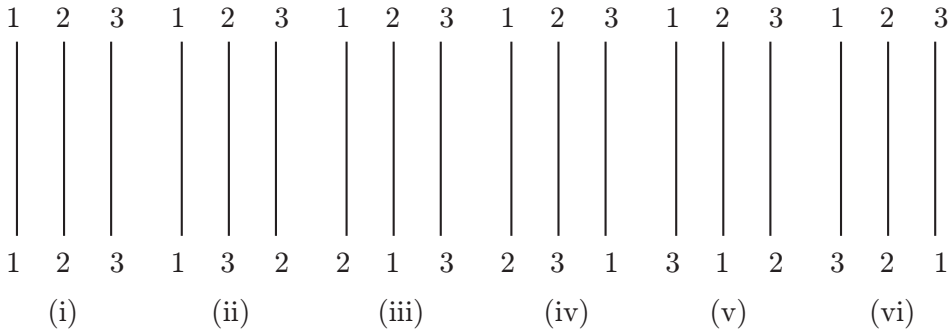


図 12.4 縦棒 3 本のあみだ籤

図 12.3 の様に上と下で対応する番号を直線で結びます．(iii) の様に交点に 3 本以上の線が交わる場合には (iv) のように少し移動します．そして、各交点を図 12.6 の様に変形します．すると、ちょっと歪んだあみだ籤ができるので形をきれいにします．

このあみだ籤をしてみよう．どのような結果がでましたか．

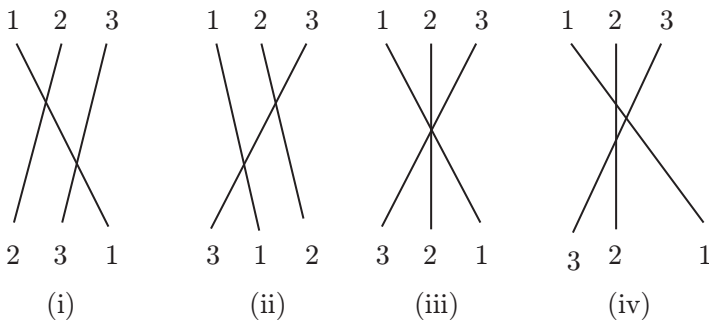


図 12.5 縦棒 3 本

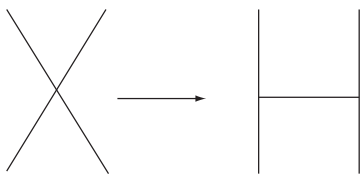


図 12.6 変形

前に出した問題の「図 12.1(ii) で横棒を何本か使って良いとして \circ と \times を入れ替えることは可能だろうか？」の答えはもうわかりましたね．可能でありどに横棒を書き入れればよいかもわかったと思います．

問題 n 本の縦棒を持つあみだ籤がありました．結果が同じあみだ籤は同じあみだ籤だと

みなすと異なるあみだ籤はいくつありますか？

12.2 明らかに自明なあみだ籤

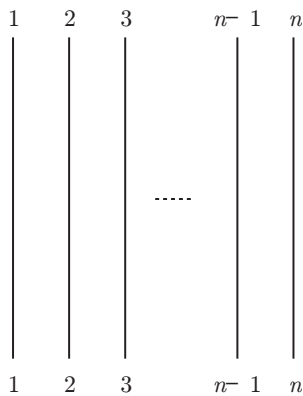


図 12.7 自明なあみだ籤

一番簡単なあみだ籤は横棒がまったくない図 12.7 のようなあみだ籤です．あみだ籤の結果は自明 (まったく変化しない) なのでこのあみだ籤を自明なあみだ籤という．しかし、このあみだ籤では結果はすぐにわかってしまうので見た目は複雑だが、あみだ籤の結果は自明なあみだ籤と同じになるあみだ籤を考えよう．

練習 ノートに自明なあみだ籤と同じ結果になる複雑なあみだ籤をいくつか作れ．

あみだ籤に慣れているとすぐに作れるかもしれませんが、いくつか作り方を考えましょう．

坊主と小坊主

あるお坊さんが檀家の人のためにつぎのようなあみだ籤をつくりました．

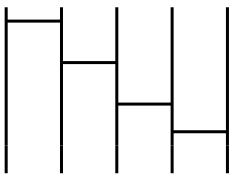


図 12.8 あみだ籤

これを見た小坊主が「お坊さんはばかだなあ．あまりにも簡単すぎるや」といって図 12.9 のように線をひきました．

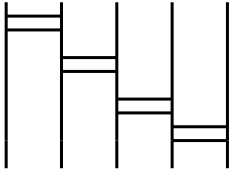


図 12.9 小坊主

これを見たお坊さんは、小坊主に「やっぱりお前はばかだ」といいました。なぜでしょう。

実は、お坊さんが作った図 12.8 のあみだ籤だけでなくどんなあみだ籤も 1 本の横棒を 2 本にすると、そのあみだ籤の結果は自明なあみだ籤と同じになります。ノートにあみだ籤をいくつか書いて確かめてみなさい。

あみだ籤を複雑にしようとして、横棒を何本も書く人がいますが本質的には 2 本書くと 1 本も書かないことと等しくなります。奇数本を平行に横棒を書き入れたものは 1 本の横棒と等しくなります。偶数本を平行に書き入れたものは、1 本も書かないのと同じです。

あみだ籤を複雑にしようとして何本も横棒を書き入れる人がいますが、あみだ籤の結果を見ればあまり関係がなかったりします。

上下をさかさまにして

あみだ籤を 1 つノートに描きましょう。そのあみだ籤を上下をさかさまにして、今書いたあみだ籤の下につけます。図 12.10 参照。どのような結果になるか予想してください。今予想した結果になるかどうか実際にあみだ籤をしてみましょう。

図 12.10 の L に注目します。一番左のところを見ると L をはさんで上下に辺が二本あります。これは上下をさかさまにしたあみだ籤を張り合わせたからです。前の議論で平行に 2 本辺があるとこれらはないのと同じでした。ですから、これら 2 本の辺は消すことができます。すると、上下さかさまにして張り合わせたので、どんどん辺が対になって出てきてそれらが消えて最終的には自明なあみだ籤になります。だから、この操作でも自明なあみだ籤と同じ結果が得られるあみだ籤が得られます*1。

12.3 偶数本の横棒と奇数本の横棒

問題 次のあみだ籤に奇数本の横棒を書き加えてちゃんとした結果になるようにできるか？

*1 線形代数か数学 B ぐらいで勉強したと思いますが、行列の積 AB の逆行列が $B^{-1}A^{-1}$ となることと関係があります。

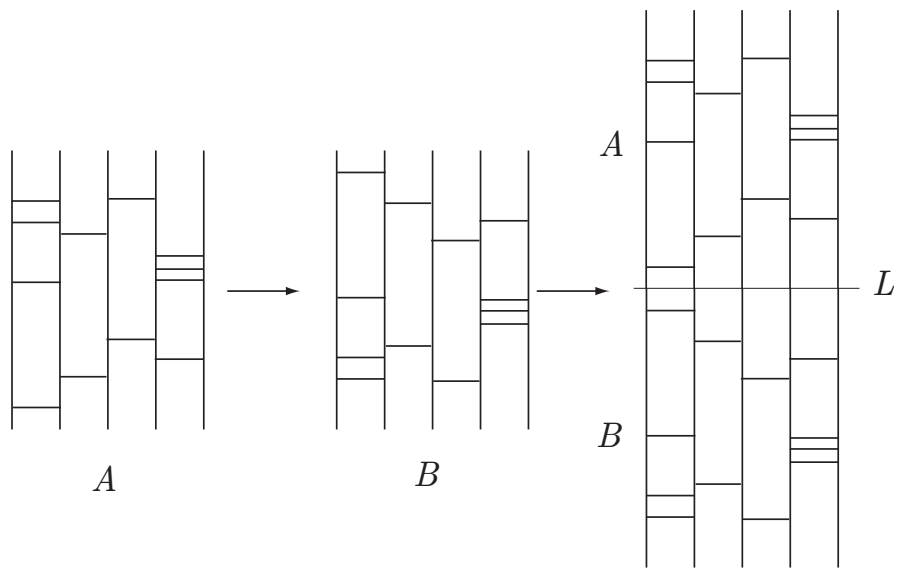
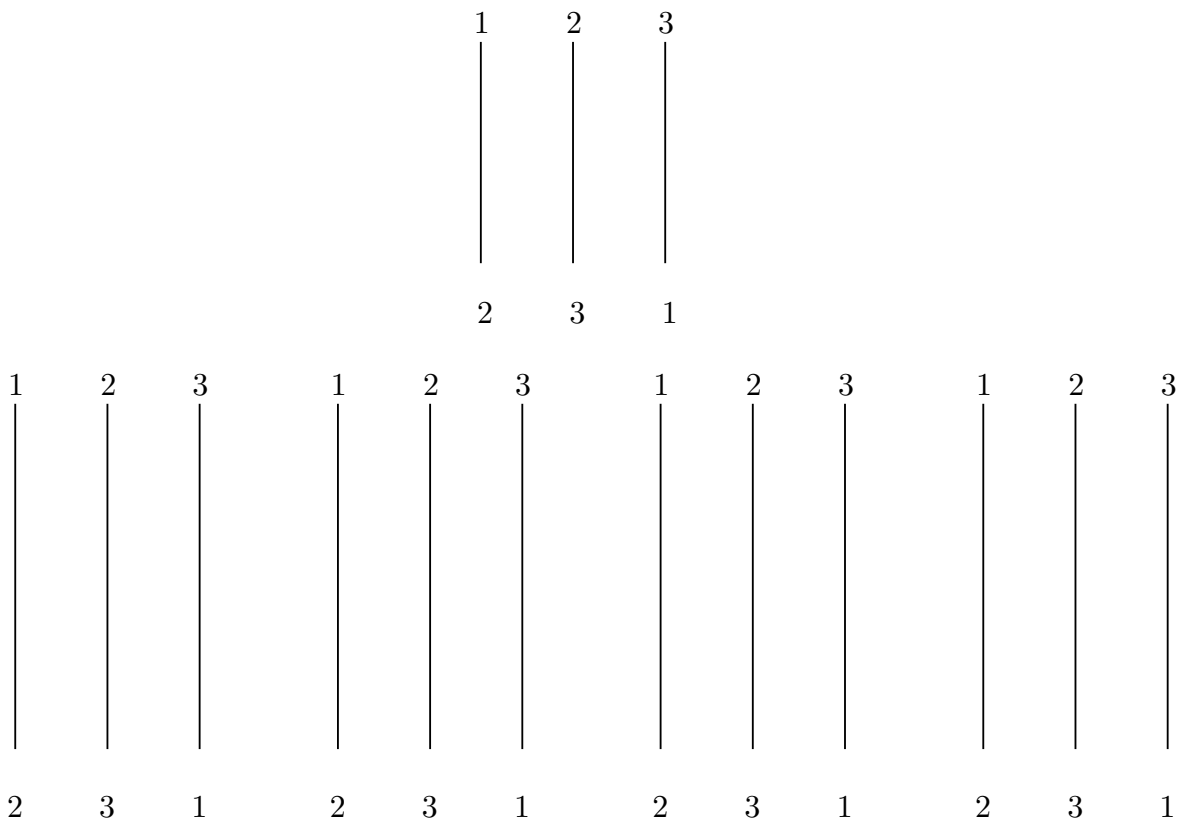


図 12.10 上下をひっくり返して



同じあみだ籤を用意してあるので試行錯誤で良いので試してください。実は、このあみだ籤は奇数本の横棒では実現できないあみだ籤です。図 12.4 のあみだ籤に対して、横棒の数が奇数と偶数とで別けてみなさい。偶数本と奇数本それぞれ 3 個ずつになりました。

偶数本でできるあみだ籤と奇数本でできるあみだ籤は何が違うのでしょうか？

レポート 34 あみだ籤の縦棒が 4 本のときに横棒が奇数本でできるあみだ籤と偶数本でできるあみだ籤に分類せよ．

うめくさ

レポート 35 この授業の学生の多くは山形出身です．この授業のすべての学生はグラフ理論に興味があります．以上から論理的に導き出される結果は・・・

- (1) 山形出身のこの授業の学生はグラフ理論が好きです．
- (2) グラフ理論が好きなこの授業の学生は，山形出身です．
- (3) 山形ではグラフ理論がはやっています．
- (4) このクラスの学生は山形出身でグラフ理論が好きです．

レポート 36 ノートを 7 冊ずつくばると 28 冊余り，10 冊ずつくばると最後の 1 人に渡すノートの数は 5 冊未満でした．ノートの数と人数を求めなさい．

レポート 37 ある先生がいました．「このクラスのもてる学生は全員数学ができるね．」ある学生がいます．「僕は数学ができるから，僕はもてるよね．」この学生が知っていることは正しいでしょうか？

レポート 38 指を使って次のように数を数える

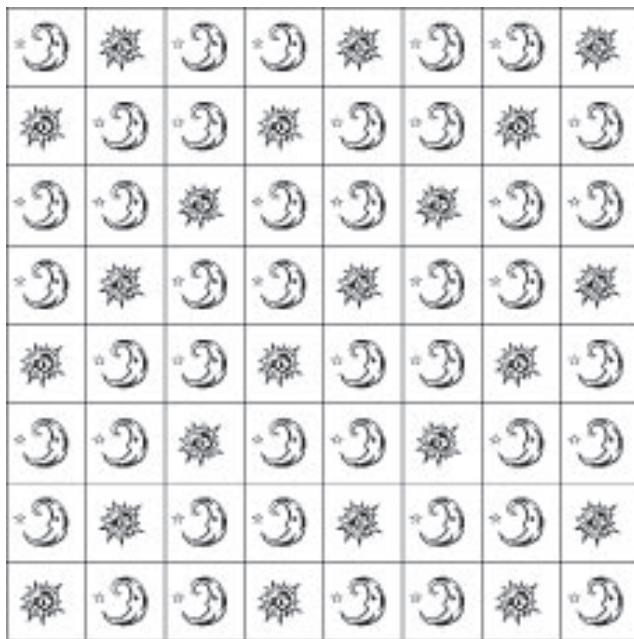
親指から数えはじめて，親指を 1．人差し指 2．中指 3．薬指 4．小指 5 と行き，逆もどりして，薬指 6．中指 7．人差し指 8．親指 9．また同じようにして人差し指 10 という風にしていく．このとき，ことしの 2014 はどの指でおわるでしょうか．

【占い】

占い盤がありました．そこに 3×1 のタイルを重ねないように置きます．

最後に一つだけマス目が残ります．太陽なら願いはかなうでしょう．月ならば願いはかないません．

必ず太陽が残ります．なぜですか．



タイル

--	--	--