

11 貨車の入れ替えクイズ

11.1 貨車の入れ替え 1.

[クイズ]*¹ 転車台*²(図 11.1) の中央のターンテーブルに貨車を 2 台乗せ, テーブルを 180 度回転させるとこの 2 台の貨車の順番を入れ換えることができます 図 11.2.

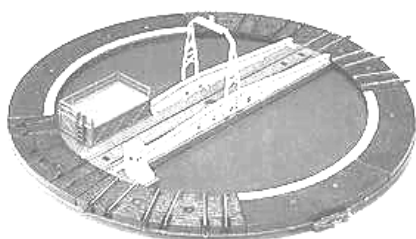


図 11.1 転車台

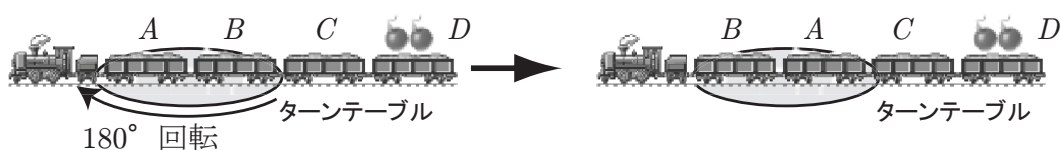


図 11.2 貨車の入れ替え

機関車と貨車 A, B, C, D があります. 貨車 D には火薬をつんでいるので機関車のすぐあとにはつなげることができません. $ADBC$ の順番に並んでいる貨車を, 転車台を使って $CBDA$ にすることはできますか.

できるとすればどのような手順が一番効率がよいでしょうか.

グラフ理論を使って解いてみよう

頂点の集合 V を貨車の並び方としよう. $\{A, B, C, D\}$ の並べ方で D は先頭に置くことができないので

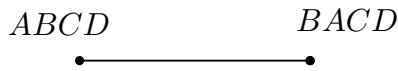
*¹ 本間龍雄 グラフ理論入門 講談社ブルーバックスより改題.

*² この近くだと JR の吹田操車場に転車台があります.

$V = \{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,$
 $BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,$
 $CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA\}$

となります*3.

1回ターンテーブルを使うことで移りあうことのできる頂点を辺で結びます。たとえば頂点 $ABCD$ に対して AB をターンテーブルにのせて回転させると頂点 $BACD$ になります。このとき頂点 $ABCD$ と頂点 $BACD$ を辺で結ぶ。



頂点 $ABCD$ に注目してグラフを作成しよう。

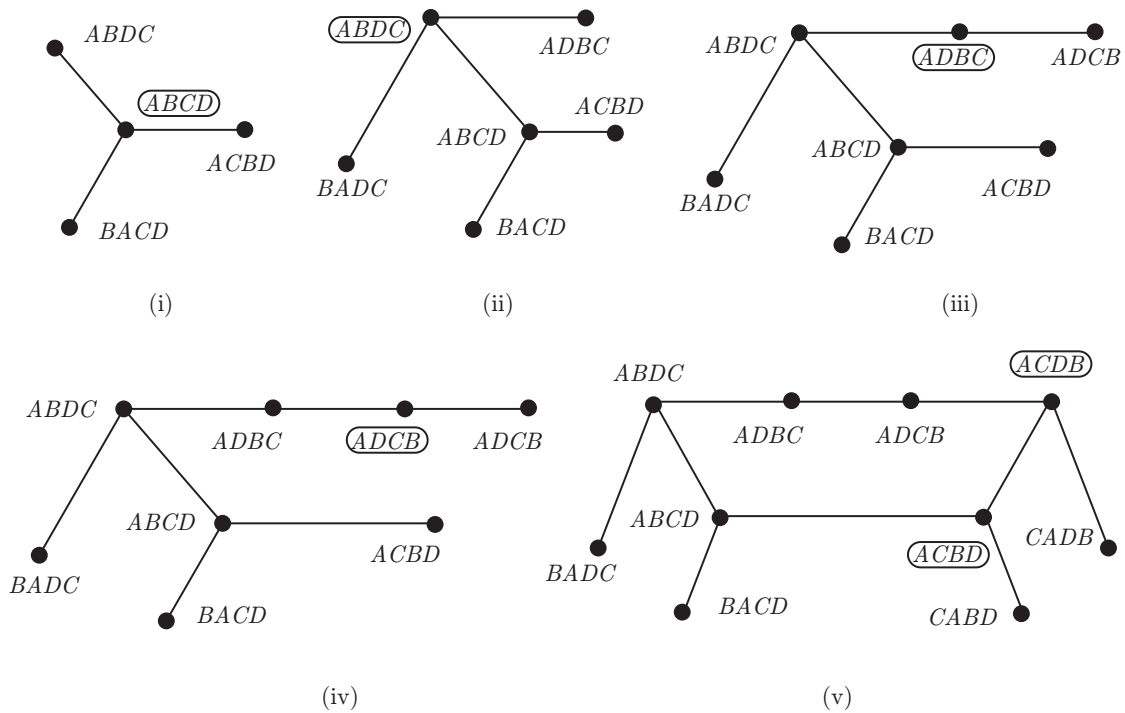


図 11.3 貨車の入れ換えのグラフの作成

(1) 頂点 $ABCD$ と 1 本の辺でつながっている頂点をすべて考える。

*3 規則正しく A, B, C, D が並んでいることに注意。

- (2) 頂点 $ABCD$ と頂点 $ABDC$, 頂点 $ACBD$, 頂点 $BADC$ が辺でつながる. 下線は
 転車台にのせて交換した貨車を表す.
- (3) 頂点 $ABCD$ のまわりは図 11.3(i) になります.
- (4) 同様に頂点 $ABDC$ のまわりを考えると (ii) になります.
- (5) 頂点 $ADCB$ のまわりは, D は機関車の後ろにつなぐことができないので (iii) にな
 ります.
- (6) 頂点 $ADCB$ の周りも, D の条件から (iv) になります.
- (7) 頂点 $ACDB$ と頂点 $ACBD$ のまわりは (v) になります.

このようにすれば A で始まる頂点すべてを考えることができます. 図 11.4 を完成させ
 ましょう.

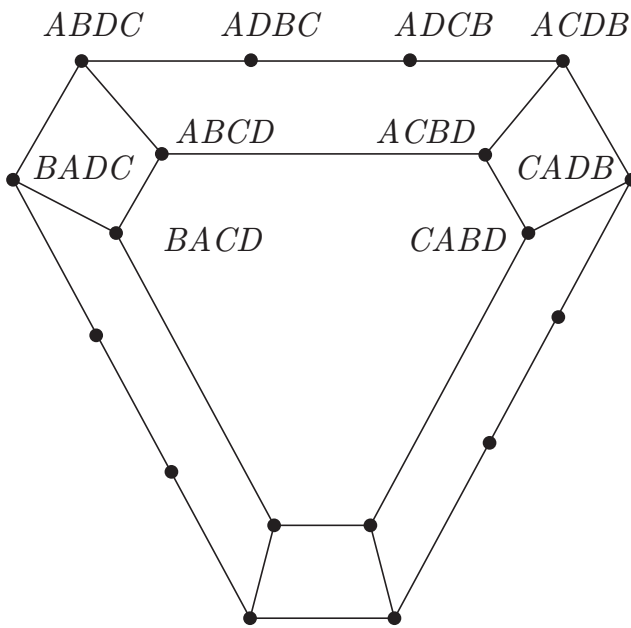


図 11.4 貨車の入れ換えのグラフ

$ADBC$ の順番に並んでいる貨車を, 転車台を使って $CBDA$ にすることは頂点 $ADBC$
 から頂点 $CBDA$ まで辺に沿った転車台の使い方できます. 辺の数が最短になるのが最短
 の手順です.

11.2 貨車の入れ替え 2

[クイズ]*⁴線路上 (図 11.5) に機関車と 2 つの貨車 A と貨車 B がある .

X の場所には貨車を 1 台入れて左右どちらにも出せるが貨車を 2 台以上入れることはできない . 機関車は大きいので入れることができない . 機関車は貨車を前後に押し引きしたりできる (図 11.6).

貨車 A と貨車 B を入れ換えて機関車をはじめの位置にもどすのにはどうすればよいか .

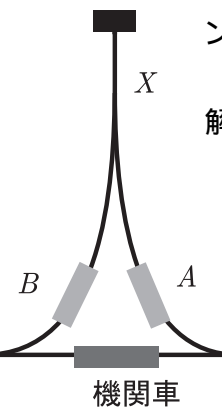


図 11.5 貨車の入れ換え 2

図 11.6 機関車

初めは普通に考えてください . 学生を見ていると , ノートに線路を書き消しゴムとかペンのキャップなどを貨車だとか機関車に見て考えている学生がいます .

解答 図 11.7



- (1) 機関車を右に移動し貨車 A を X に入れる .
- (2) 機関車を一度戻してから左に行き貨車 B を X まで移動する .
- (3) 機関車を使って B と A とつなげる .
- (4) A と B を引き出して A を機関車があった所におく .
- (5) B を X に入れる .
- (6) 機関車を使い A を B が在った所に移動する .
- (7) 機関車を右側に移動し B を A のあったところに移動する .
- (8) 機関車をはじめの位置にもどす .

*⁴ 推理パズル 藤村孝三郎 河出文庫 より改題

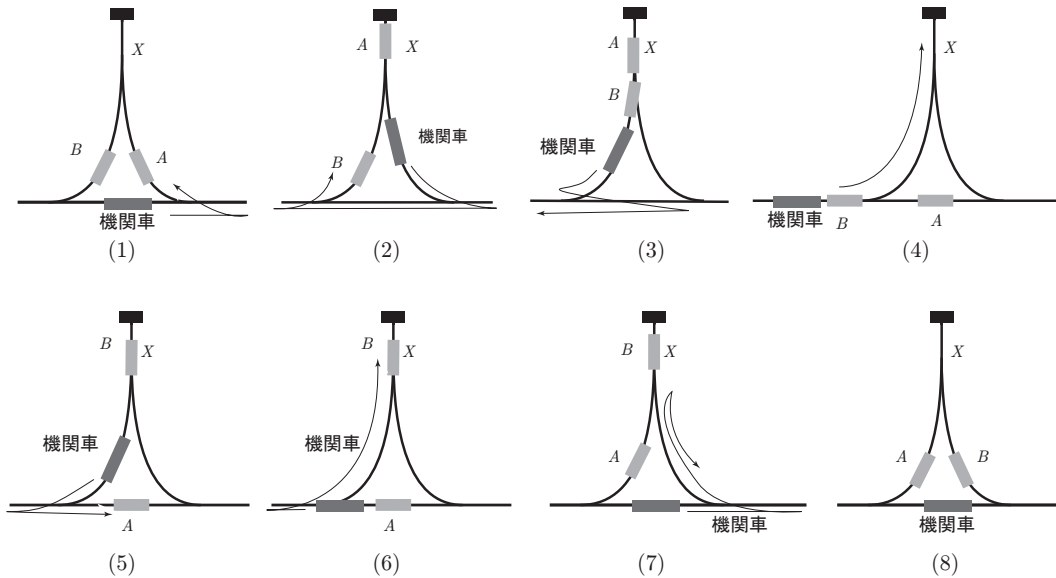


図 11.7 貨車の入れ替えの答え

■ グラフ理論を使って解きたい．頂点と辺に何を対応させますか．

頂点 頂点は機関車と貨車 A, 貨車 B の状態を対応させます．そこで, どれくらい異なる状態があるか考えます．図 11.8 の 2 つの状態は同じですか, それとも違いますか．

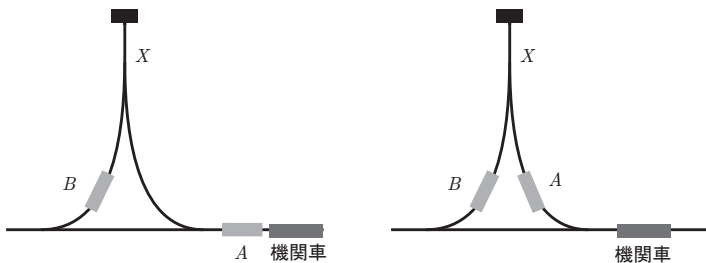


図 11.8 貨車の入れ換え

この 2 つはすぐに互いに移すことができるのでこの 2 つの状態は同じ状態とみなしましょう．同様に考えて図 11.9 は同じ状態だと考えます．

すると最後の状態, すなわち機関車と貨車を 1 列につなげた状態 (A 機関車 B) で, この状態を表すとして, 頂点の集合 V は機関車, 貨車 A, 貨車 B の並べ方で表されて個数は $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 個あります．

$$V = \{(AB \text{ 機関車}), (A \text{ 機関車 } B), (BA \text{ 機関車}), (B \text{ 機関車 } A), (\text{機関車 } AB), (\text{機関車 } BA)\}$$

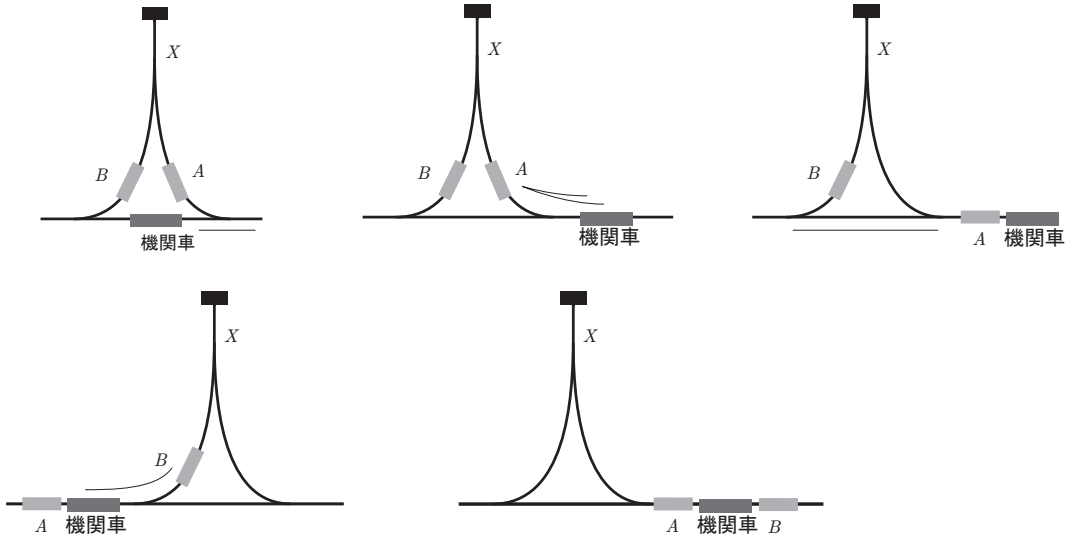


図 11.9 貨車の入れ換え 1

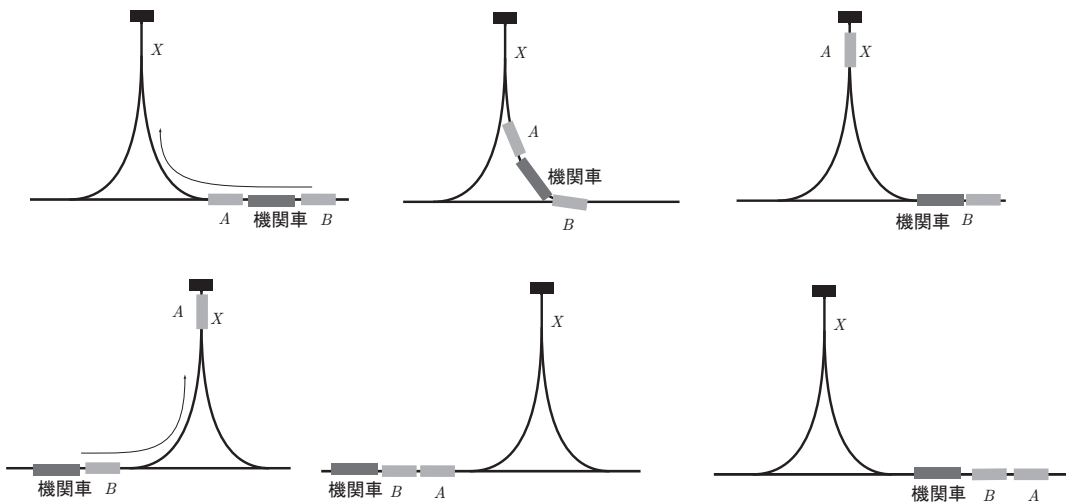


図 11.10 貨車の入れ換え 2

辺 辺は頂点の状態を変える次の 2 つの操作を対応させます。

操作 1 X に貨車を入れて、反対側から引き出す操作です。たとえば、図 11.10 の操作です。

このとき、頂点 (A 機関車 B) と ($機関車 BA$) とを辺で結びます。

操作 2 この操作はポイントを使って行います。 (AB 機関車) を図 11.11 のようにポイントを使って (BA 機関車) にします。同様に、左側のポイントを使うことにより ($機関車 AB$) を ($機関車 BA$) にできます。

各頂点に対して、上の 2 つの操作で移りあう頂点を考えます。

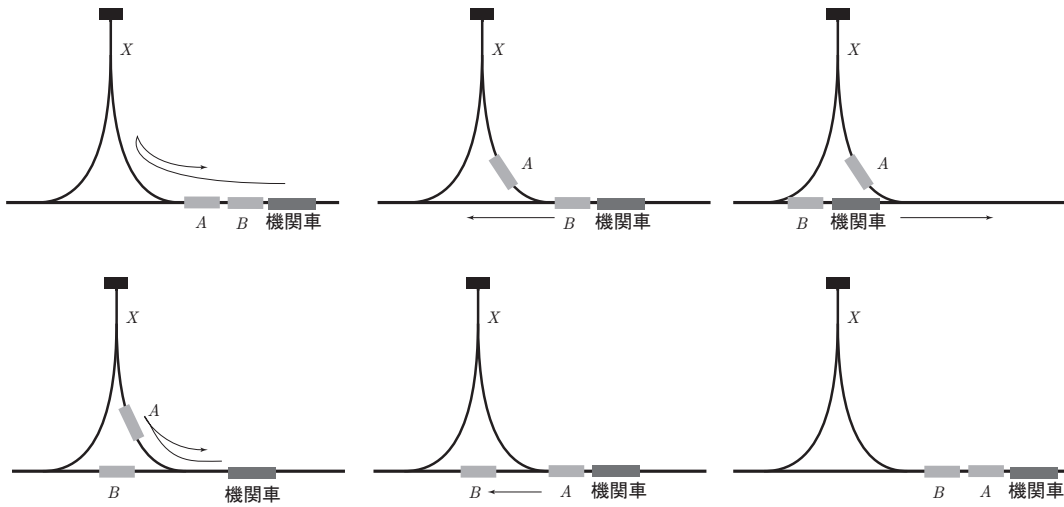


図 11.11 貨車の入れ換え 3

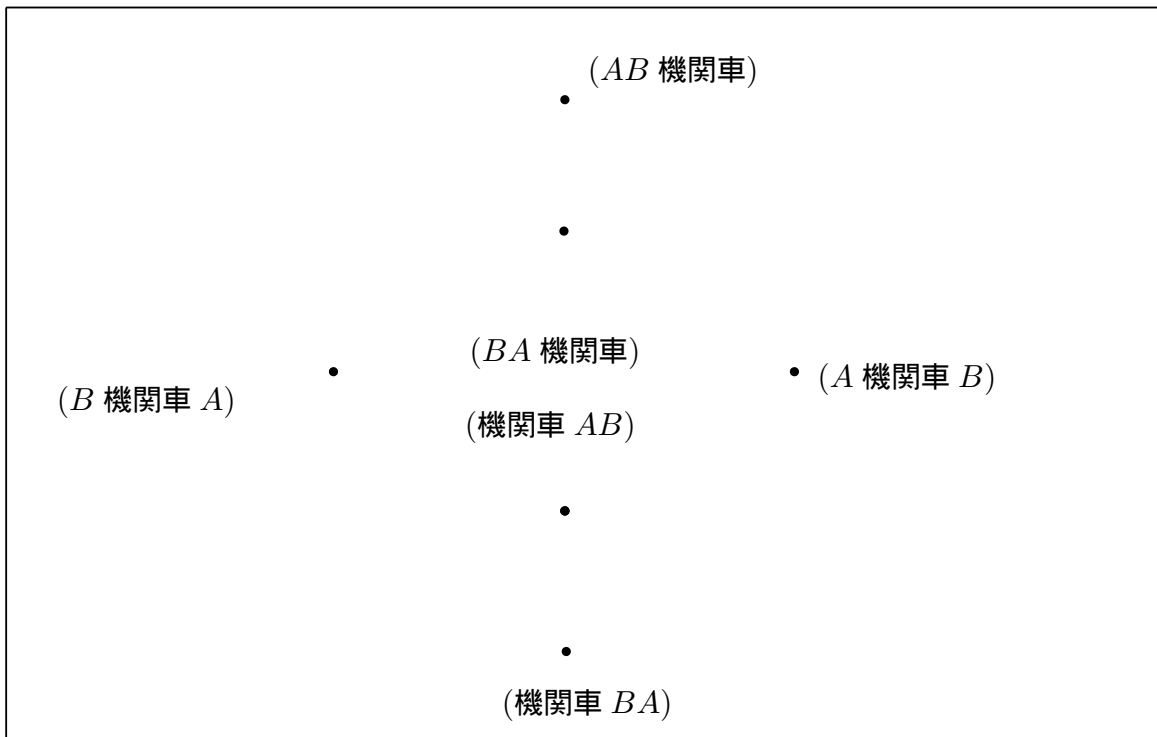


図 11.12 頂点だけのグラフ

問 図 11.12 に辺を描き込みグラフを完成させなさい。

(A 機関車 B) の状態から (B 機関車 A) の状態に変えればよいので、それらの頂点を辺で結ぶ操作で辺の個数が最小の行き方がこのクイズの解答になります。

レポート 32 図 11.13 の線路上に貨車 A と貨車 B がある。トンネルの長さは貨車の長さと同じで一方から入れて他方から引き出すことができる。ただし機関車は大きいのでこのトンネルを通り抜けることができない。貨車 A と貨車 B を入れ換えて機関車を元に戻すにはどうすればよいでしょうか。グラフを使って考えなさい。



図 11.13 貨車の入れ換え (トンネル編 1)

レポート 33 図 11.14 の線路上に貨車 A と貨車 B がある。トンネルの長さは貨車の長さと同じで一方から入れて他方から引き出すことができる。ただし機関車は大きいのでこのトンネルを通り抜けることができない。貨車 A と貨車 B を入れ換えて機関車を元に戻すにはどうすればよいでしょうか。グラフを使って考えなさい。

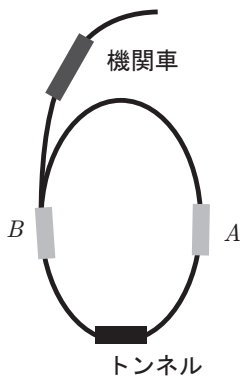


図 11.14 貨車の入れ換え (トンネル編 2)