9　赤い三角形・青い三角形

9.1　赤い三角形・青い三角形

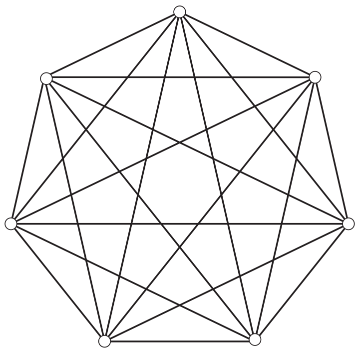

図 9.1　K_7

完全グラフ K_n の辺を青か赤で色をぬります．このとき，K_n の部分グラフで三角形 K_3 ですべての辺が赤色の三角形を赤い三角形，すべての辺が青色の三角形を青い三角形と呼ぶ.

【問題 1】 完全グラフ K_n の各辺を赤と青で自由にぬります．赤い三角形も青い三角形のどちらもできないようにぬることはできますか.

図 9.2 の K_6 で，考えながら色ぬりをしてみよう.

K_6 の辺の数は 15 本より, 色のぬり方は $2^{15} = 32,768$ 通りあります．このグラフ全部を考えると赤い三角形も青い三角形もできないぬり方が 1 つはあるかもしれません.

【問題 2】 図 9.3 の K_5 の各辺に色をつけて赤い三角形も青い三角形もできないようにしなさい.

実は K_6 ではどのように辺に色をぬっても，赤い三角形か青い三角形の少なくともどちらかができます．ただし, 青い三角形と赤い三角形の両方ができるというわけではありません.

これを使ったものとして昔からパーティー問題と言われているものがあります.

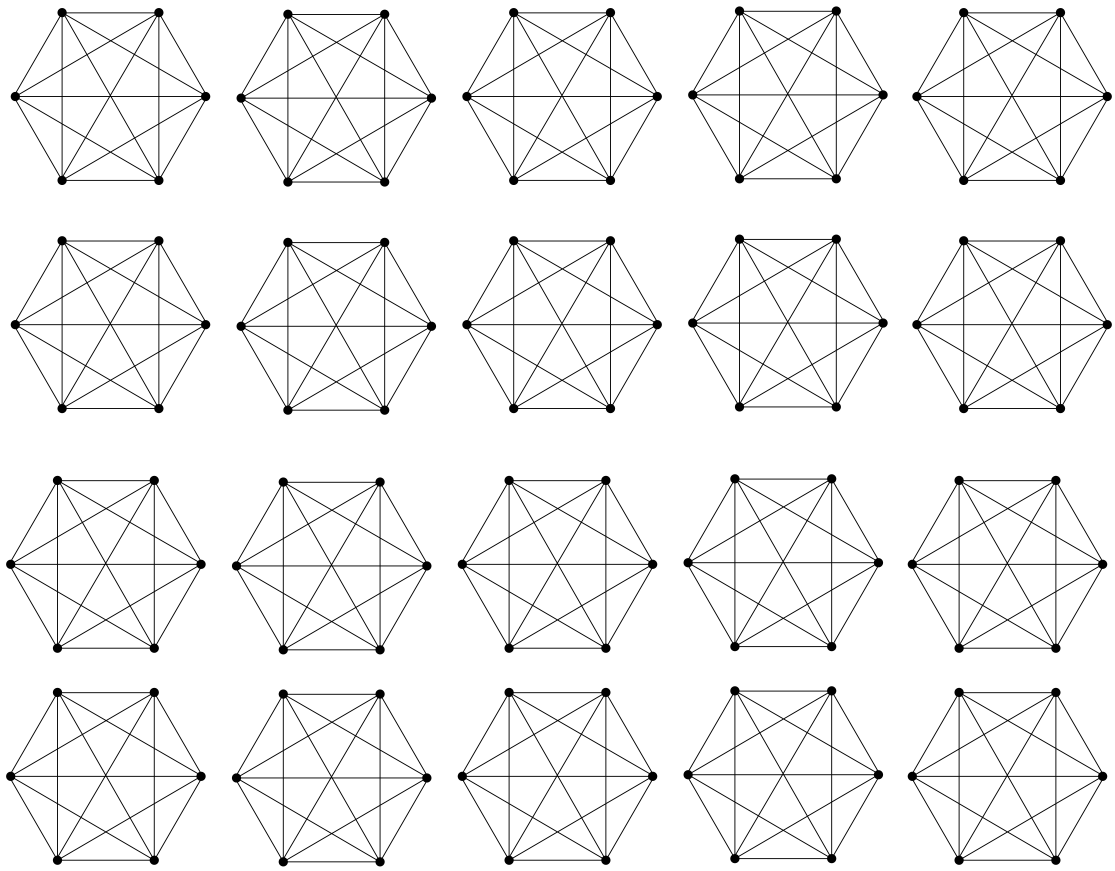

図 9.2　辺を赤と青でぬる

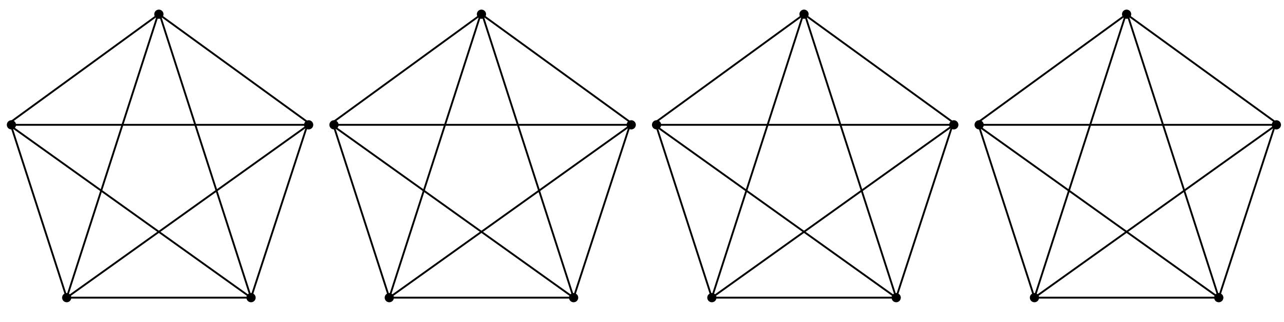

図 9.3　K_5 のグラフでは

【 パーティー問題 】
6 人を集めると必ず互いに知っている 3 人組みか互いに見ず知らずの 3 人組みが必ずいる.

6 人を頂点としてみて 2 人が知り合いだったら青色の辺でこの 2 つの頂点をつなぎ他人だったら赤色の辺でつなぐと考えると，パーティー問題は次の定理 9.1.1 に変わります.

定理 9.1.1 K_6 の各辺を青か赤でぬる. このとき部分グラフ K_3(三角形) ですべての辺が青か赤のものが存在する.

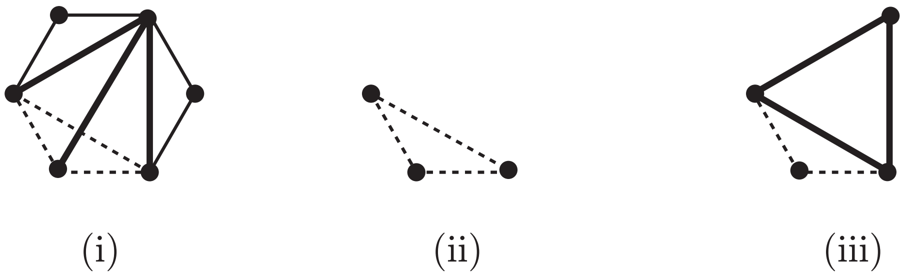

図 9.4　赤い三角形

証明 図 9.5 の K_6 の辺を自由に青と赤でぬりなさい. K_6 のすべての頂点に青と赤の辺の本数を書き入れなさい.

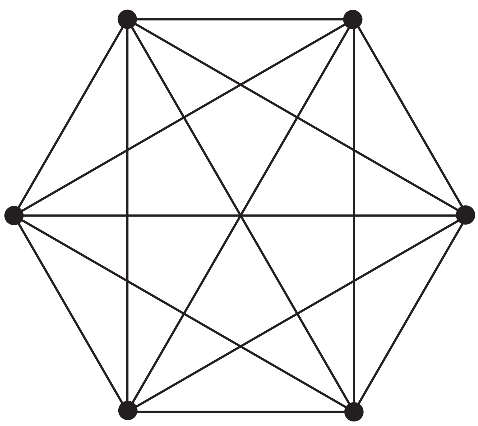

図 9.5　K_6

考察 すべての頂点で青か赤の辺の数のどちらかは 3 以上だということに気が付きましたか.

どれでもよいので，1 つの頂点に注目すると辺は 5 本でています．赤か青の辺のどちらかは 3 本以上あります．それを青色としよう．もし, 赤色だったら, 以下の文章の青色をすべて赤色に変えます.

Step 1. 図 9.4 (i) のように, その青い辺から 3 本選び太くぬってください.

Step 2. これらの辺のもう一つの頂点に青色で大きく丸で囲みましょう．3 つ頂点があるので, それらを頂点とする新しい三角形ができました．図 9.4 (ii) の点線でできた三角形がそうです.

Case 1. もし, その三角形の中に青色の辺があればもとの青い辺とあわせて青い三角形ができます．図 9.4 (iii) の三角形です.

Case 2. 三角形の辺に青色の辺が 1 本もなかったら (すべて赤色だった) ら, その三角形が赤い三角形となっています.

以上より**証明されました**.

これはラムゼー (Ramsey[*1]) の定理と呼ばれているものの一部です.

レポート 22 K_7 に対しても同様の定理がなりたちます．証明を与えよ．一般に $n \geq 6$ の K_n に対して定理は成立します.

このようにこの証明ではあまり数式がでてきません．このように言葉で話を進めるのも数学では重要です.

レポート 23 完全グラフ K_{17} の辺を赤・青・黄色の 3 色でぬりました．このとき部分グラフ K_3 ですべての辺が同じ色となるものがあることを示しなさい.

[*1] Ramsey について調べていると NTT の研究所のホームページに行きついた．グラフ理論はネットワーク・電気回路等の数学的モデルとして利用されている他, ネットワークデザイン, ビジュアルインタフェースなど幅広い分野へ応用されているので当然といえば当然なんだけど.

レポート 24 完全グラフ K_{10}[*2]の辺を赤と青でぬりました．すべての辺が青色となる部分グラフ K_4 かあるいは, すべての辺が赤色となる部分グラフ K_3 が存在することを示しなさい

9.2　K_3 に色をぬって

K_3 の各頂点を赤と青でぬることを考えよう.

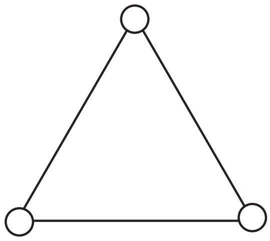

図 9.6　K_3

何通りのぬり方があるでしょうか.

2^3 通りあります．$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ の各々の $\times 2$ は図 9.7 での枝別れの本数に対応していることがわかります.

また, 掛けた回数は頂点の個数と対応していることが分かります.

レポート 25 K_3 を 120° の回転でうつりあう彩色の三角形は同じと考えます.
　このとき，頂点を赤と青で彩色したときの色ぬりは何通りになるでしょうか．また, 同じぬり方になる三角形の個数は各々いくらになりますか.

9.3　K_4 に色をぬって

　次に K_4 の頂点に赤色と青色をぬることを考えます．図 9.8 の (i) と (ii) は同じグラフでしょうか, それとも異なるグラフでしょうか.

　(ii) は頂点が $\{1, 2, 3, 4\}$ で辺が $\{12, 23, 34, 13, 14, 23\}$ となるグラフです．1 と 4 が青い頂点です.

[*2] K_9 に対しても成立するが, 証明を簡単にするために K_{10} にした.

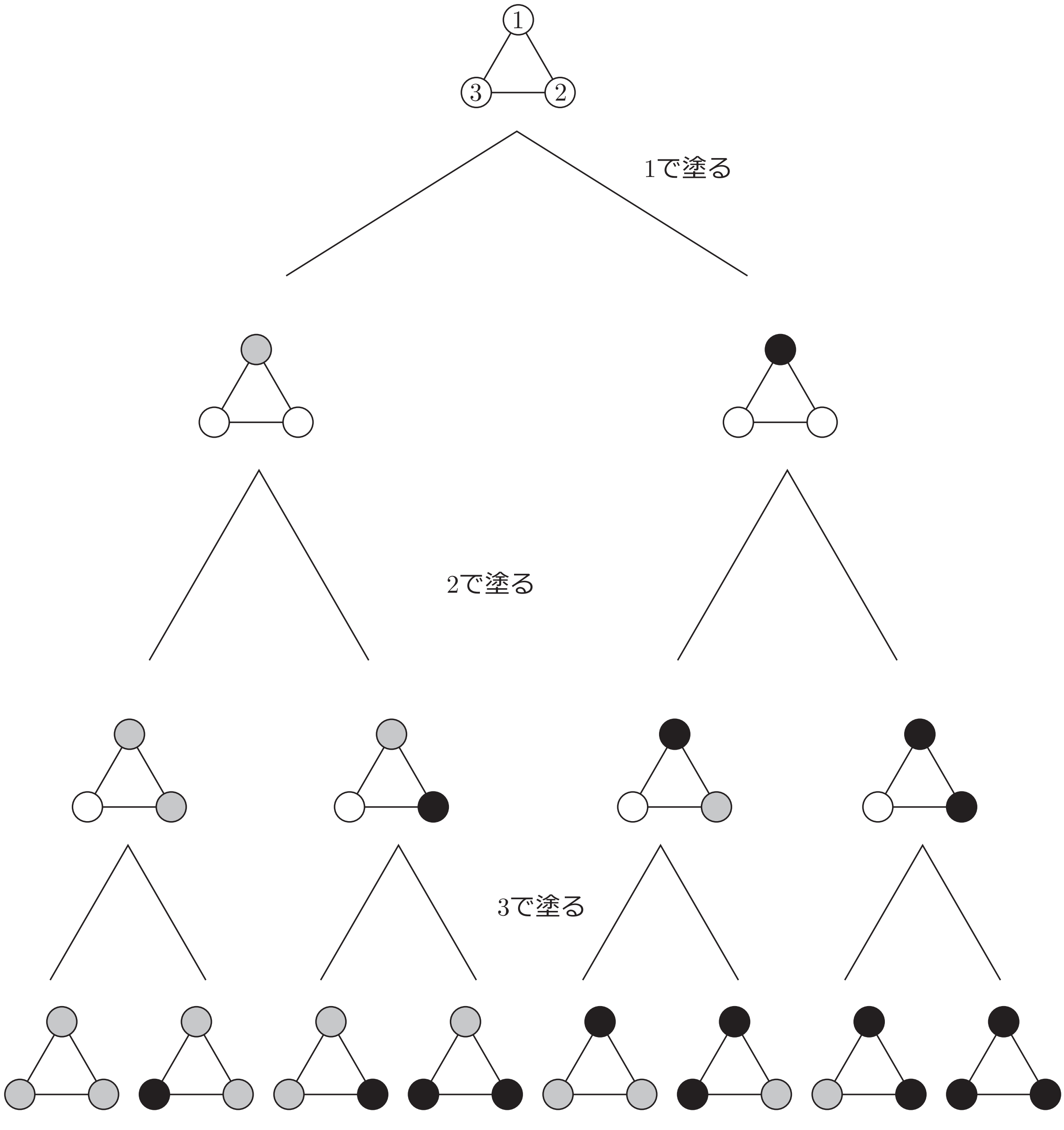

図 9.7　K_3

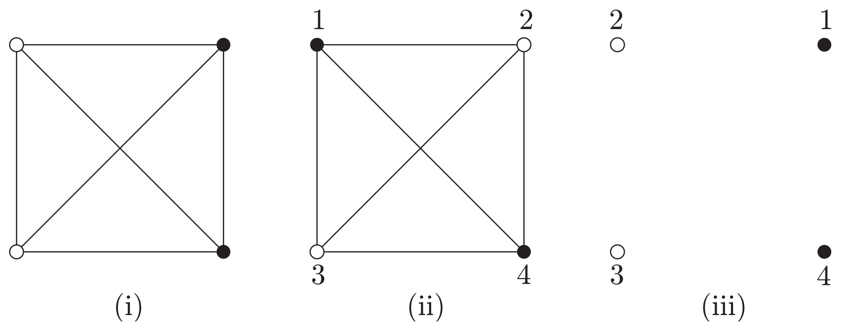

図 9.8　K_4

これを (iii) で表された頂点に対して辺を書き込みましょう．すると (i) と同じグラフがえられます．

レポート 26 K_5 について同様に頂点を赤と青の 2 色でぬってください．グラフの同形 (同じグラフ) で移りあうものを同じだと考えたときに個数はどのようになるでしょうか．

レポート 27 K_3 の頂点を三色 (青・赤・黄色) でぬった．ぬり方は何通りありますか．(K_3 を回転でうつりあうものは同じだとみなしています．)

また，ひっくり返してもよいと考えたときはどうなりますか．

レポート 28 ネックレスに色違いのビーズが 9 個つながっている．ネックレスを回転させてもよいがひっくり返さないとすると何種類あるか．

またひっくり返しても良いものとすると何種類あるか．

さらに K_9 の頂点に色違いのビーズがあるとすると，何種類あるか．

レポート 29 赤のビーズ 5 個と青のビーズ 2 個のネックレスがあった．この赤と青のネックレスは何種類ありますか．ひっくり返すのを許したときと許さないときで種類に変化がありますか．

2014-11-20