8　三色の三角形

8.1　三角形の頂点に色を塗って

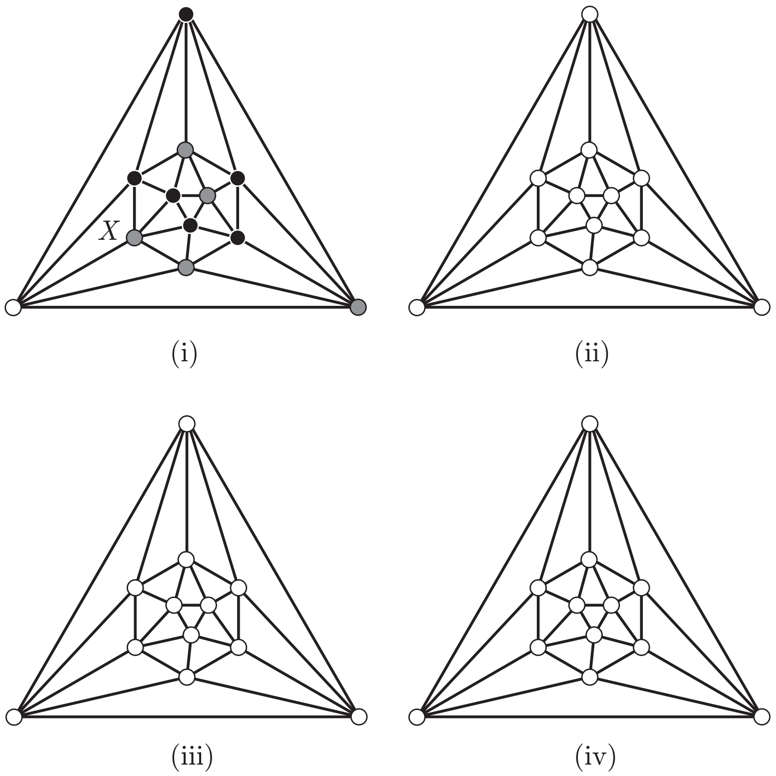

図 8.1　三角形

問題 1 頂点が赤・青・黄の大きな三角形*1を小さな三角形で分割しました*2(図 8.1). 小さな三角形の頂点にも赤・青・黄の色を塗る. このとき, 3 つの頂点が赤・青・黄の小さな三角形を赤・青・黄色の三角形と呼ぶ. 図 8.1(i) では X の所に赤・青・黄色の三角形ができています.

赤・青・黄色の三角形がないように色を塗ることができるだろうか.

問題 2 異なる小さな三角形の分割で赤・青・黄色の三角形がないように色を塗ることができるだろうか.

図 8.2 から図 8.5 のグラフ (同じグラフが 4 つあります) で試してください.

---

*1 プリントでは, 白・黒・灰色で塗ってある.

*2 根上生也著 グラフ理論 3 段階 遊星社より改題

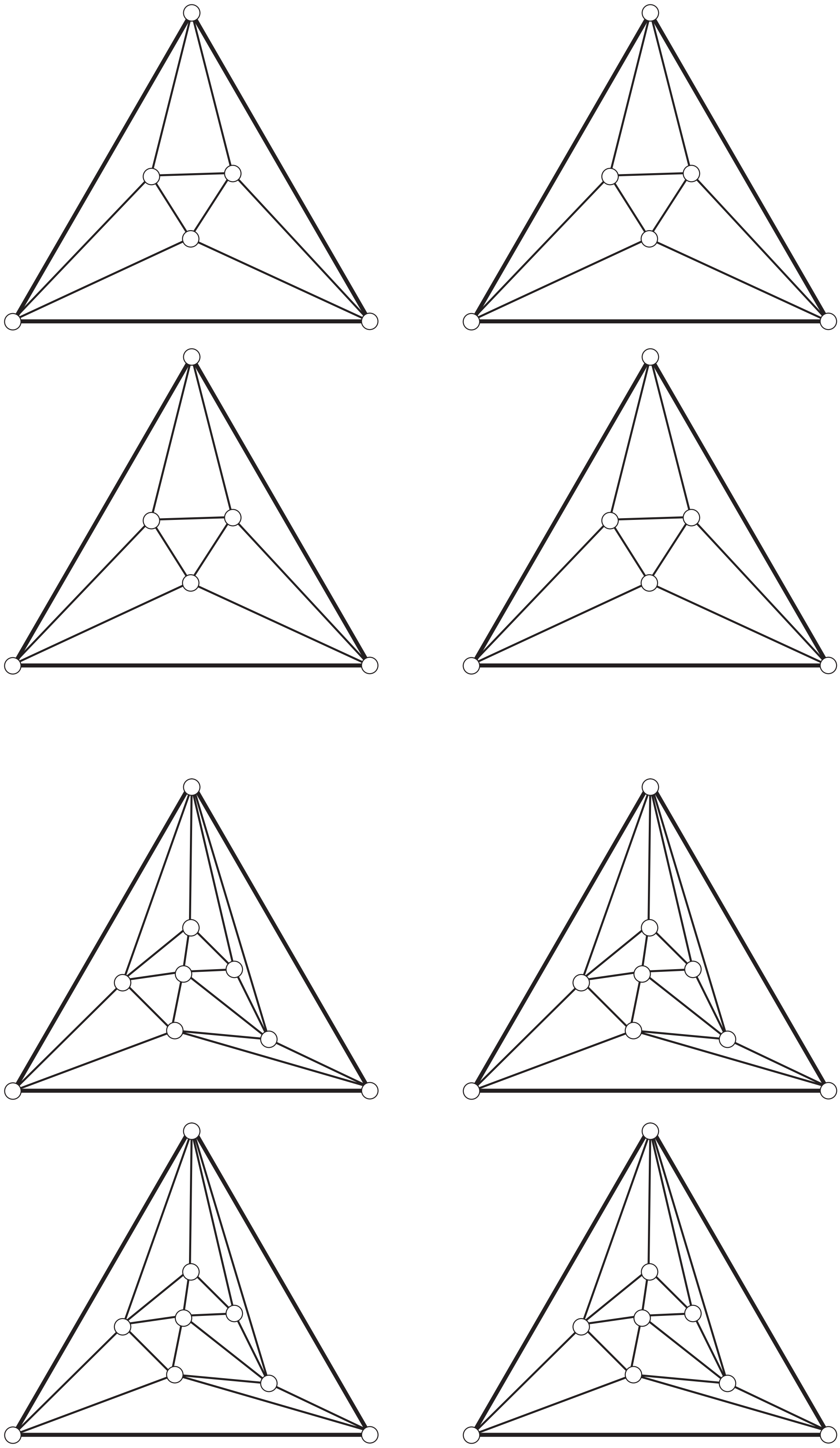

図 8.2　赤・青・黄色の三角形 1

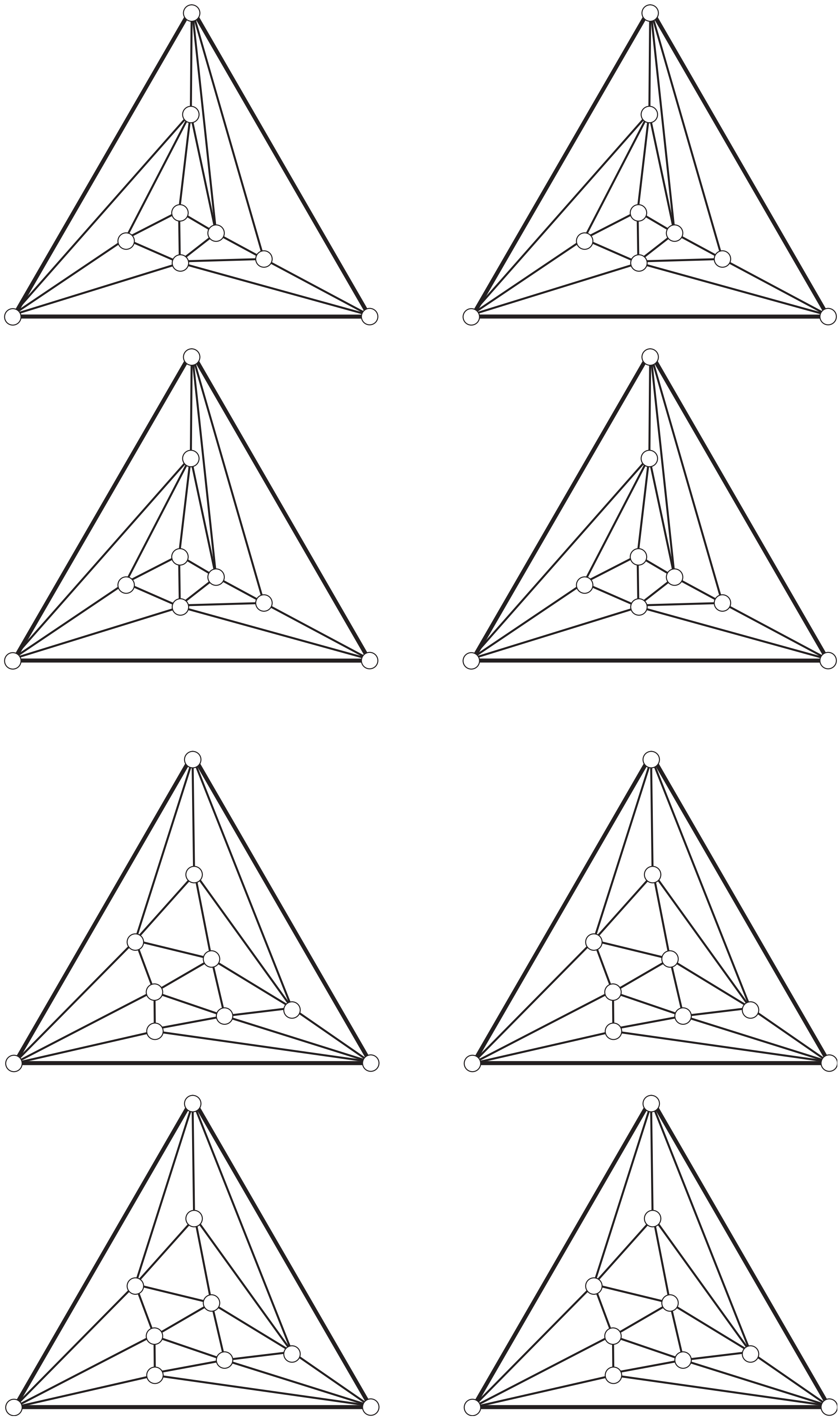

図 8.3　赤・青・黄色の三角形 2

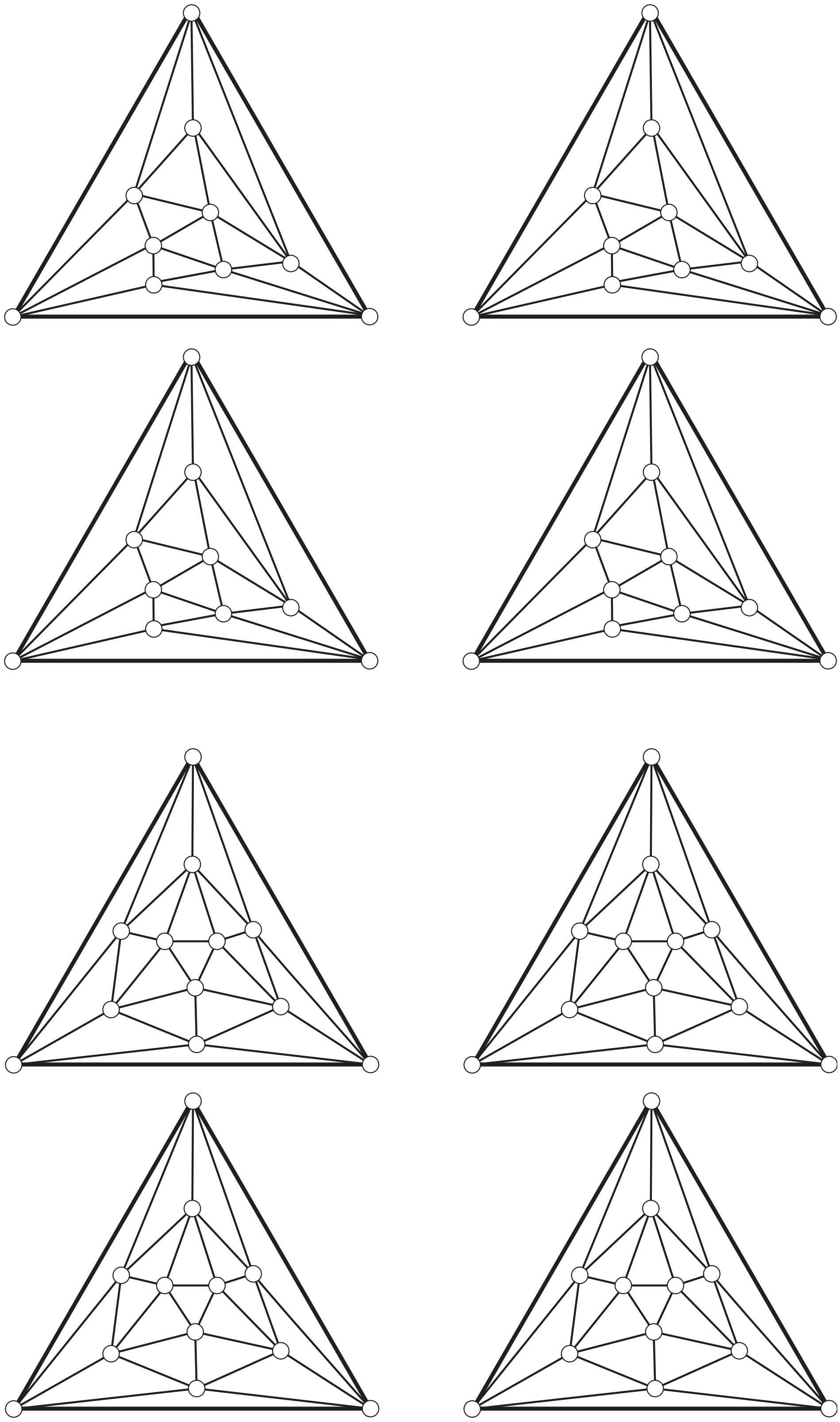

図 8.4　赤・青・黄色の三角形 3

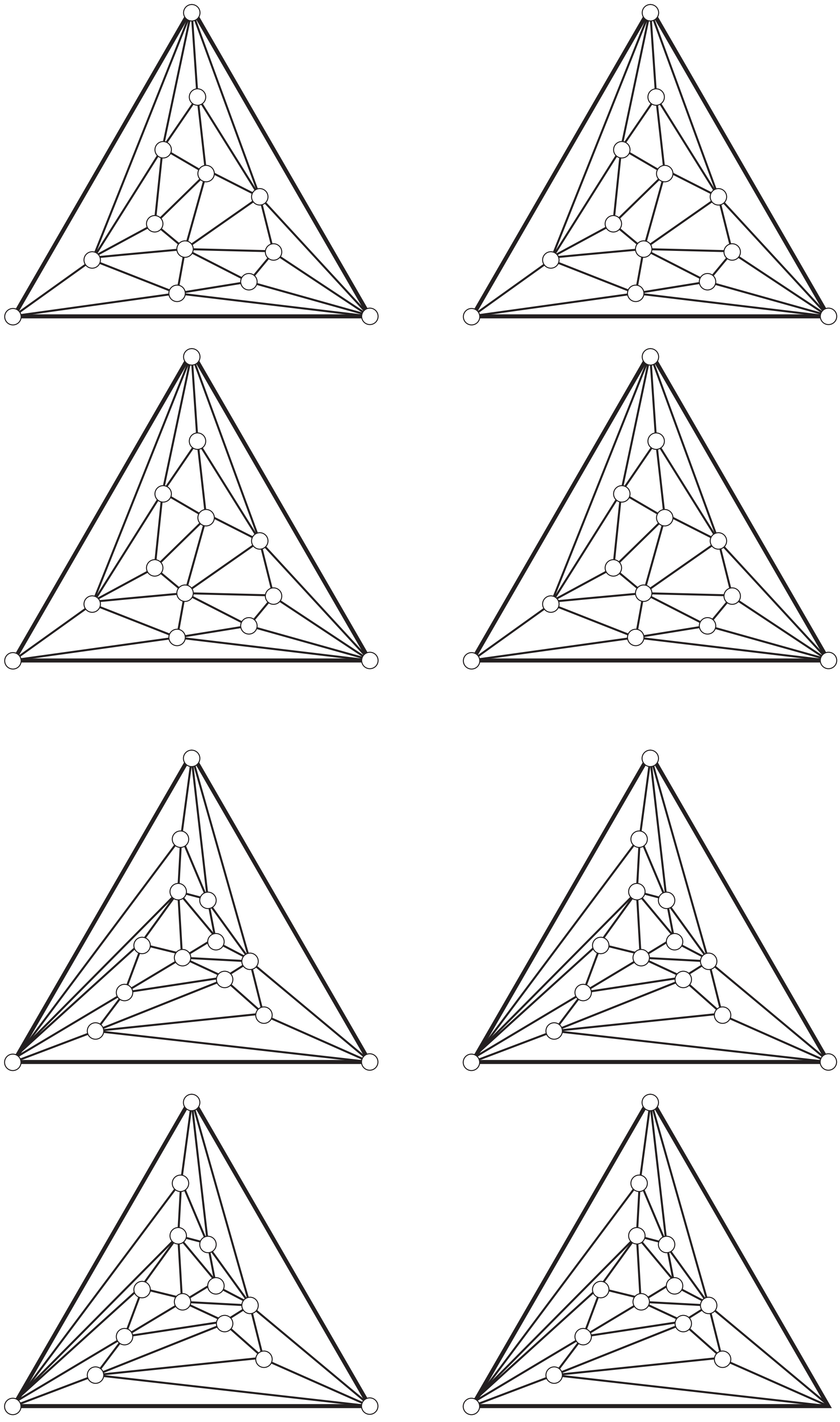

図 8.5　赤・青・黄色の三角形 4

すべての三角形の分割で，赤・青・黄色の三角形ができます.

定理 8.1.1 (赤・青・黄色の三角形) 三角形のどのような分割に対しても，また，どのように色を塗っても赤・青・黄色の三角形ができる.

三角形の分割が 1 つ与えらると証明できるでしょう.

しかし，どんな分割でも赤・青・黄色の三角形ができることの証明はどうすればよいのでしょうか.

8.2　平面グラフから作る新しいグラフ (双対グラフ)

証明の準備のために，平面上のグラフ (**平面グラフ**) を考えます.

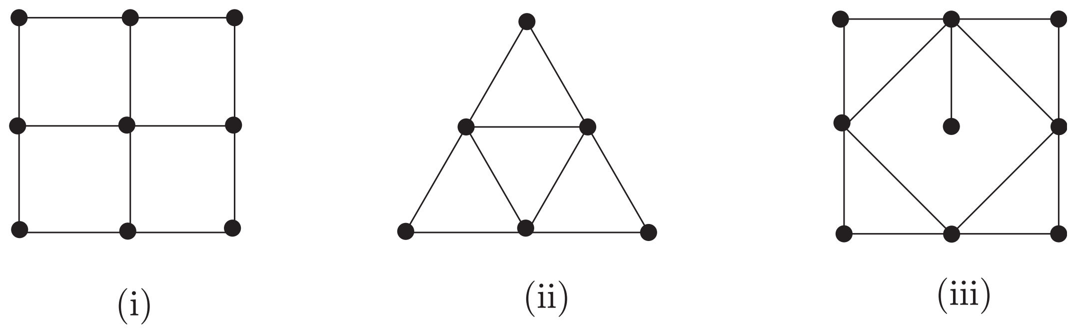

図 8.6　平面上のグラフ

■ 双対グラフ

❶ 図 8.6 の平面グラフで，図 8.7 のように, グラフの各々の面の中に頂点を 1 つとります. グラフの外側にも頂点をとります. 図 8.7 では新しい頂点は白抜きでとってあります.

❷ 辺をはさんで隣り合っている 2 つの頂点を辺で結びます (図 8.8).

新しいグラフが得られます (図 8.9).

図 8.9 (iii) のように，辺をはさんで自分自身と接している頂点では, ループができます.

新しいグラフをもとのグラフの**双対グラフ** (dual graph) という.

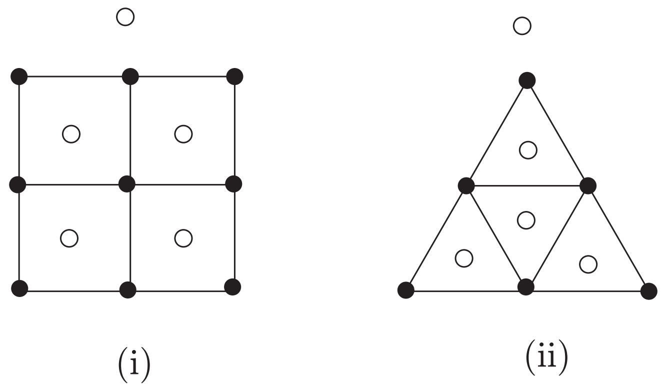

図 8.7　面に頂点をとって

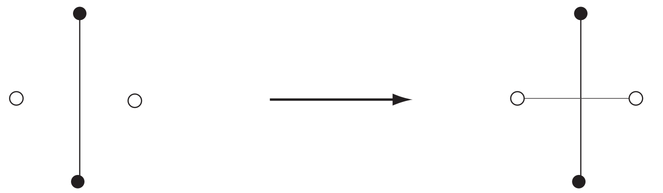

図 8.8　辺を描き入れて

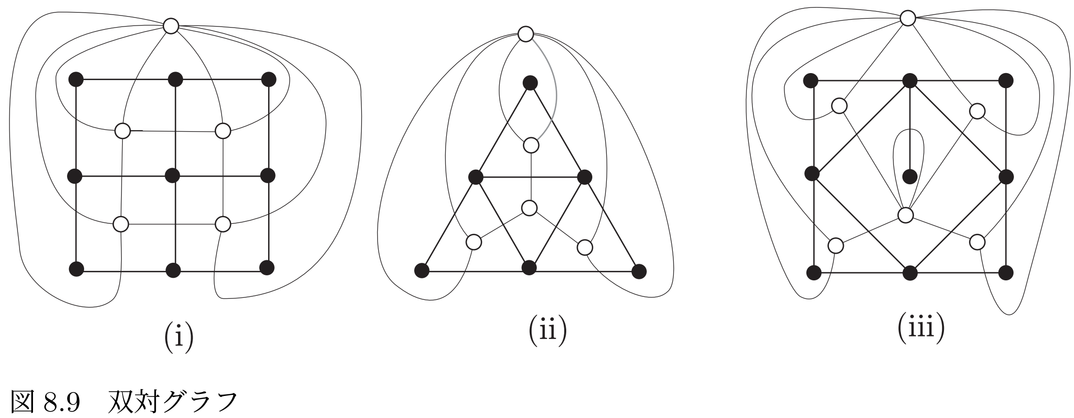

図 8.9　双対グラフ

練習 図 8.10 のグラフに対して双対グラフを求めよ.

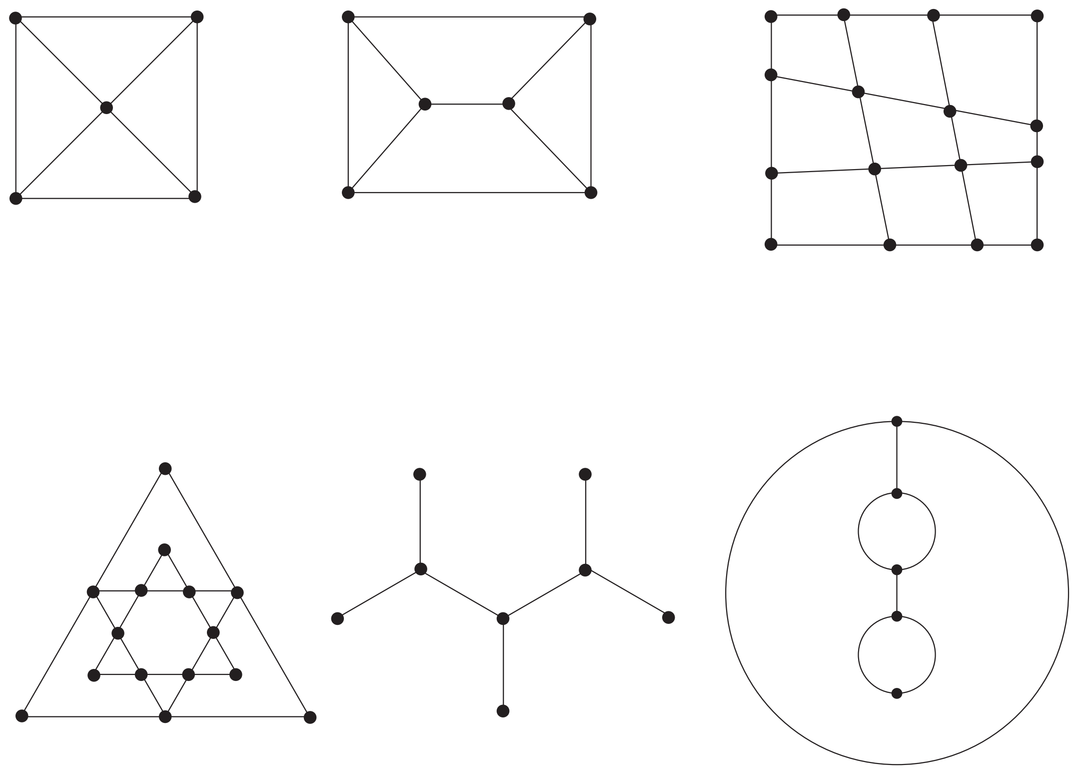

図 8.10　双対グラフ

8.3　赤・青・黄色の三角形の証明

小さい三角形で分割された三角形のグラフの双対グラフの部分グラフを構成します.

(1) 大きな三角形の外側に 1 つ頂点をとる.
(2) 小さな三角形の中心に 1 つ頂点をとる.
(3) 辺で隣り合う 2 つの頂点に対して，**辺の両端が異なる色**のときに頂点を辺で結ぶ.

実験 図 8.11 に対して，頂点に色を塗り上の方法で新しいグラフを描きなさい.

この新しいグラフの特徴を考えよう.

問題 図 8.12 の三角形の頂点に対して上の条件 (1)-(3) と合うように色を塗りなさい.

頂点に集まる辺の本数が 1 本のときは頂点にどのように色を塗ってもできないことがわかります. したがって, 頂点に集まる辺の本数が 1 本のときは存在しません.

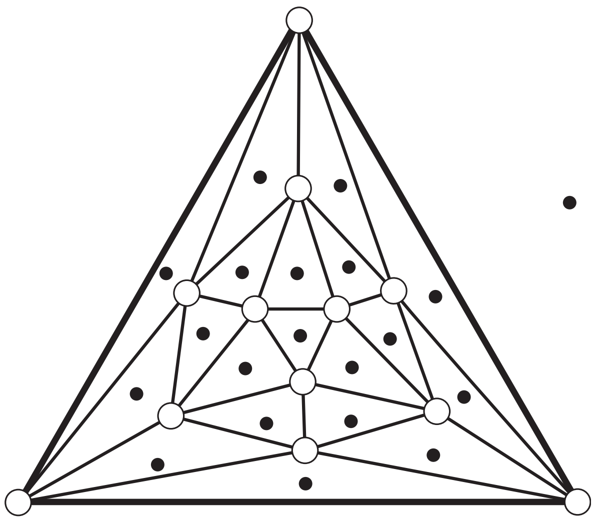

図 8.11　双対グラフを描き入れて 2

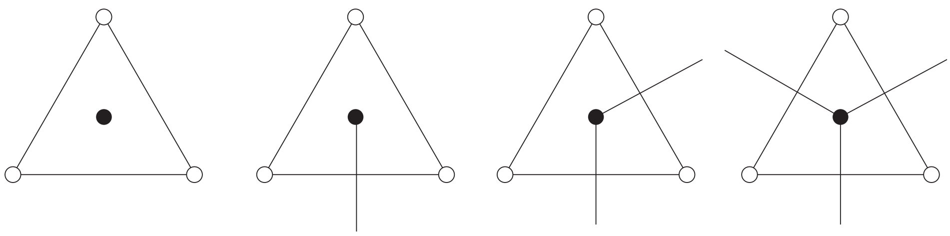

図 8.12　辺の周りは

頂点に集まる辺の本数は「0, 2, 3」のどれかです.

外側の頂点に集まる辺の本数は 3（大きな三角形に対応）です.

p. 63 の系 7.3.1 より，頂点に集まる辺の個数が奇数となる頂点は偶数個なので，頂点に集まる辺の個数が 3 の頂点が大きな三角形の内部に少なくとも**もうひとつある**ことがわかります.

3 本の辺が集まる頂点に対応する小さな三角形は 3 つの頂点の色がすべて異なっています. よって, この三角形が赤・青・黄色の三角形になります. [証明終]

レポート 20 大きい三角形の辺も分割して小さな三角形にわける (図 8.13).

(1) 大きい三角形の辺にある小さい三角形の頂点は, 両端の頂点の 2 色の色で塗る.
たとえば, 両端の色が青と赤ならば青と赤だけで塗る.

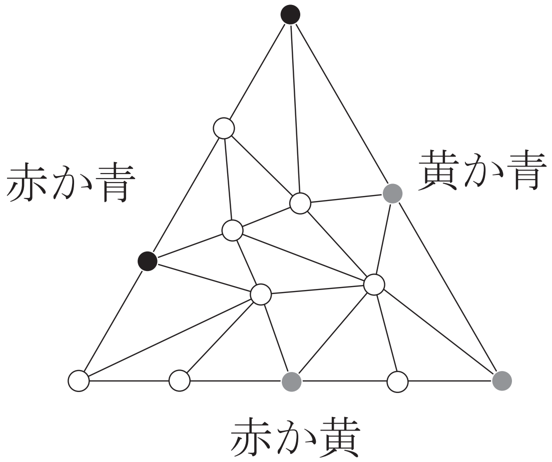

図 8.13　赤・青・黄色の三角形の拡張

(2) 大きい三角形の内部の頂点は, 自由に色を塗る.

すると, 赤・青・黄色の三角形がどこかにできることを示せ. 図 8.14 は考察用のグラフです.

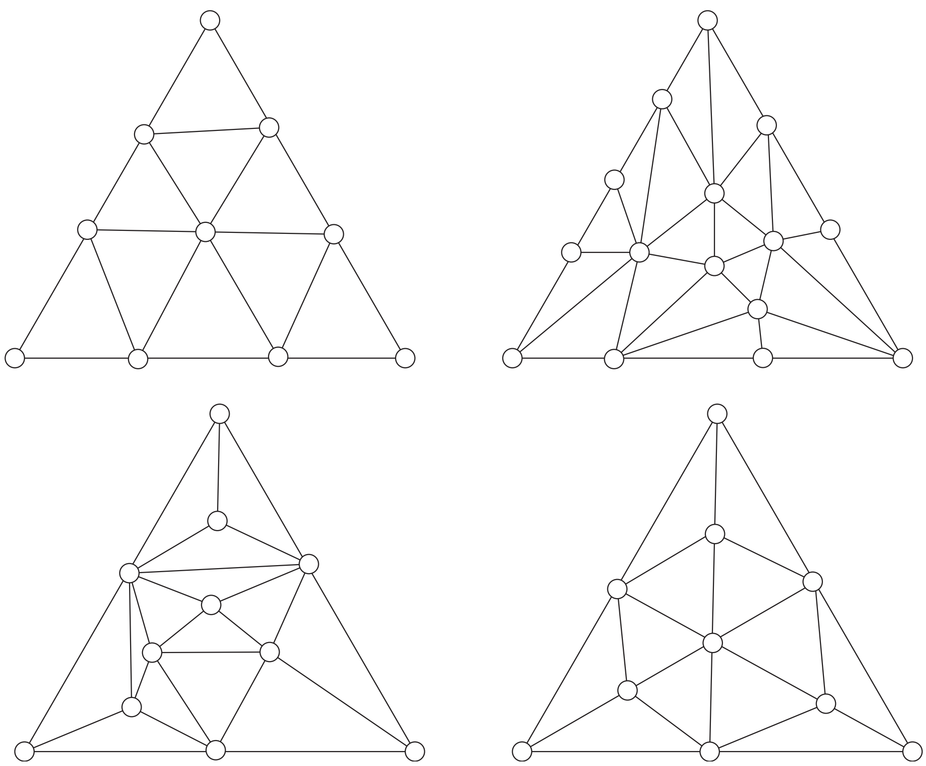

図 8.14　考察用

2002 年の東京大学の文系の入試問題 数学 (A) の問題はこの考え方で解くことができます.

レポート 21 [2002 年東京大学文系入試問題 数学 (A)] 円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意に並べる. これらの点により, 円周は $m+n$ 個の弧に分けられる. このとき, これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ. ただし, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるものとする. 図 8.15 参照.

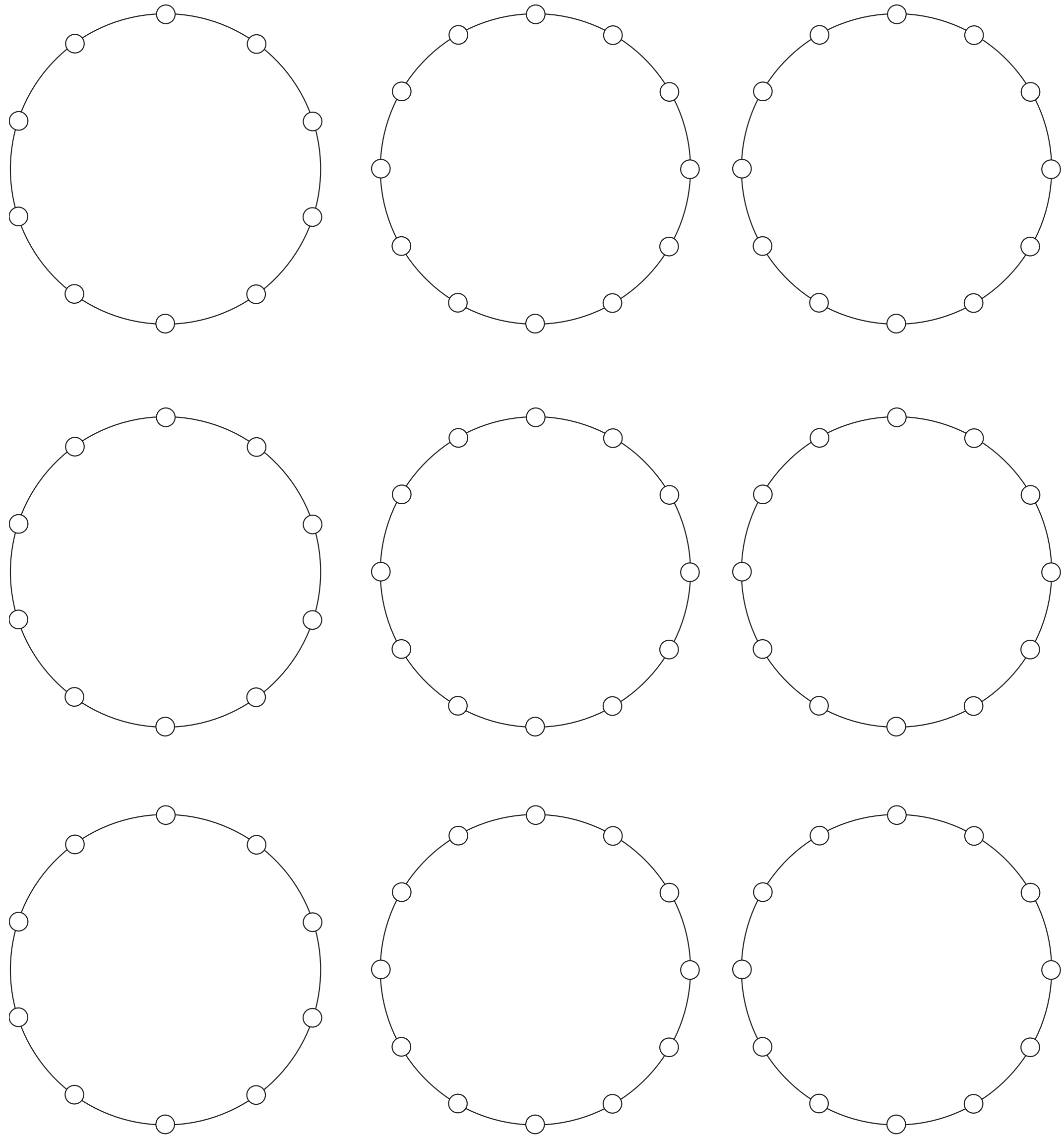

図 8.15　円周で考えて

注意 色々な方法で解けます．自由に考えてください．

2014-11-13