7　グラフの基本概念

7.1　同じグラフ (グラフの同形)

グラフ G_1 と G_2 が、同じ個数の頂点を持ち、頂点と辺のつながり方が同じときに、G_1 と G_2 を**同じグラフ**または**同形なグラフ**という．図 7.1 の 2 つのグラフは同じグラフです．

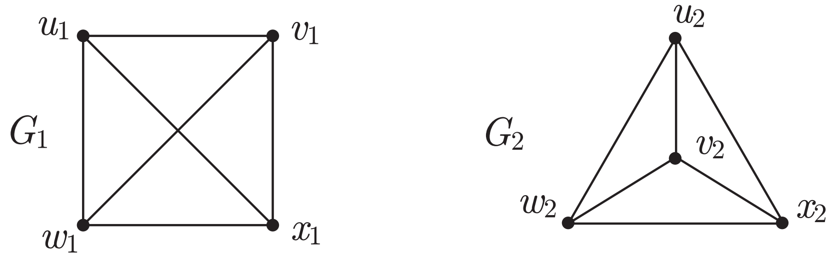


図 7.1　同じ (同形な) グラフ

図 7.1 の G_1 と G_2 が同じグラフであるのは、G_1 の頂点 $\{u_1, v_1, w_1, x_1\}$ に対して G_2 の頂点 $\{u_2, v_2, w_2, x_2\}$ をこの順序で対応させると辺は (辺 u_1v_1 は 頂点 u_1 と頂点 v_1 を結ぶ辺)

u_1v_1	$\leftrightarrow$	u_2v_2	u_1w_1	$\leftrightarrow$	u_2w_2	u_1x_1	$\leftrightarrow$	u_2x_2
v_1w_1	$\leftrightarrow$	v_2w_2	v_1x_1	$\leftrightarrow$	v_2x_2	w_1x_1	$\leftrightarrow$	w_2x_2

と対応するので同じグラフです[*1]．

図 7.2 のように頂点を移動させています．この操作はゲーム planarity[*2]をするとわかる．

また、同じグラフに対して頂点の個数[*3]と辺の個数[*4]は一致します．

例題 図 7.3 の 2 つのグラフは同じグラフです．

---

*1 ここで、頂点の並び方を見て欲しい．規則的に並べてありますね．物事を考えるときにはこのようにある順序で考えた方が効率が良いのです．

*2 http://planarity.net/

*3 グラフの頂点の個数を**位数**といいます．

*4 グラフの辺の個数をグラフの**サイズ**といいます．

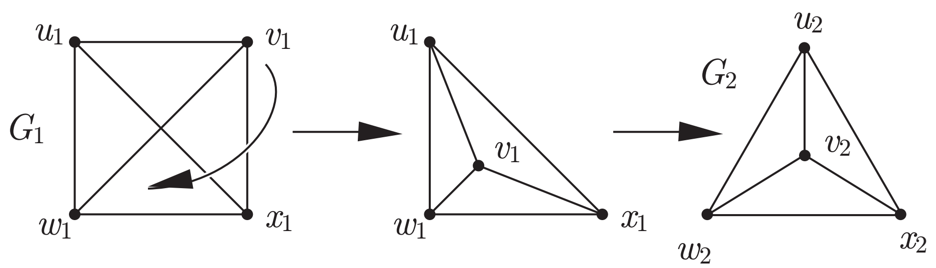


図 7.2　頂点の移動

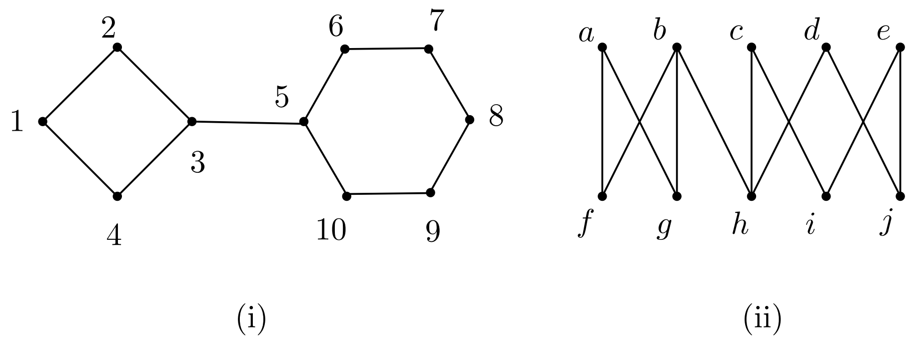


図 7.3　同じグラフの例

(1) (i) のグラフと (ii) のグラフの頂点と辺の集合を求めよ．

(2) 次に頂点の対応を考えよ．
頂点 $1, \cdots, 10$ が 右のグラフの頂点 $a, b, \ldots, j$ のどれに対応しているか.

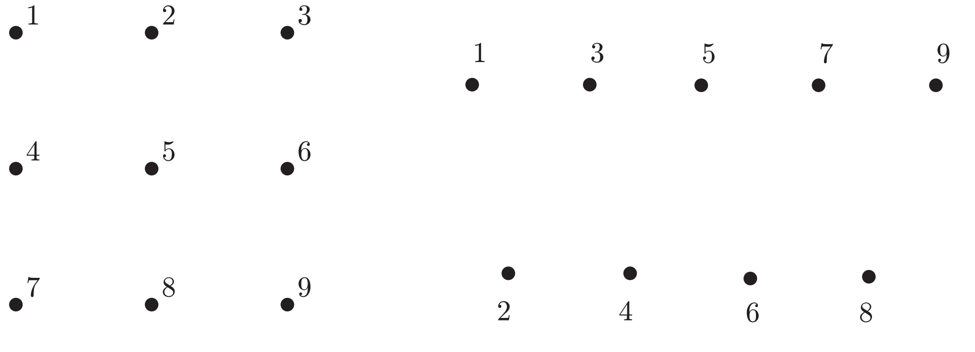
(3) 上の頂点の対応で辺もうまく対応していることを確めよ．

グラフが与えられれば頂点と辺の集合がえられる．逆に、頂点の集合と辺の集合が与えられれば、グラフを復元できる．コンピューターにグラフのデーターを入れるときなどに使われる．

練習 頂点 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$、辺 $\{12,23,14,25,36,45,56,47,58,69,78,89\}$ を持つグラフを描きたい．頂点が描かれている図 7.4(i) と (ii) の各々に辺を書き入れなさい．ただし、辺 ij は頂点 i と j を結ぶ.

レポート 14 図 7.5 の 3 つのグラフが同じグラフであることを示せ.

レポート 15 カタカナを，端点と交差点を頂点とみなしたグラフとしてグラフの同形で分類せよ.



(i) (ii)

図 7.4　同じグラフを描こう

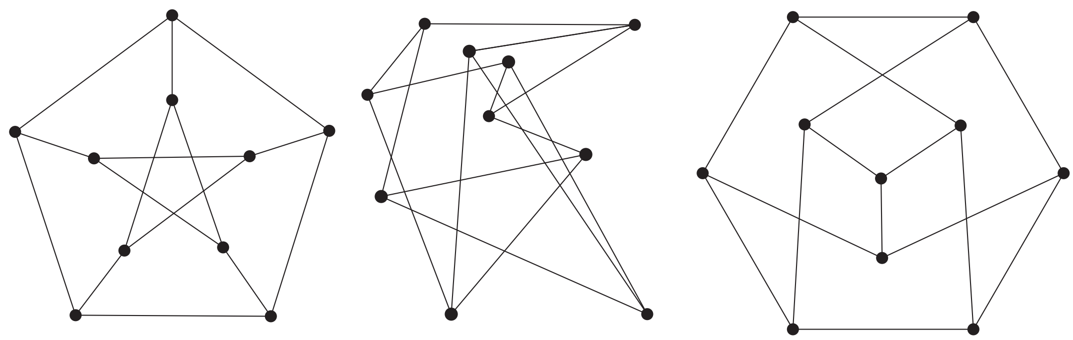


図 7.5　さまざまなペテルセン・グラフ

7.2　グラフの頂点の個数と辺の個数

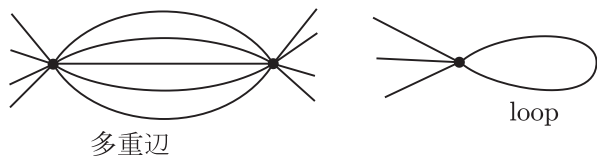


図 7.6　多重辺とループ (loop)

図 7.6 のように 2 つの頂点を 2 本以上の辺でつなぐ辺を**多重辺**といい、両端の頂点が一致する辺を**ループ** (loop) という．

図 7.7 は、多重辺とループを含まない 3 つの頂点のグラフのすべてです．ただし、頂点の移動で移るグラフは同じグラフと考えている．

また、図 7.7 の右 2 つのグラフを連結なグラフといい、左 2 つを非連結なグラフとい

う．すなわち、連結なグラフとはどの 2 つの頂点も辺をたどっていくことで結ぶことのできるグラフです．

図 7.7　3 つの頂点グラフ

問題 4 つの頂点のグラフすべてを図 7.8 に描け (連結でないものも考える)．

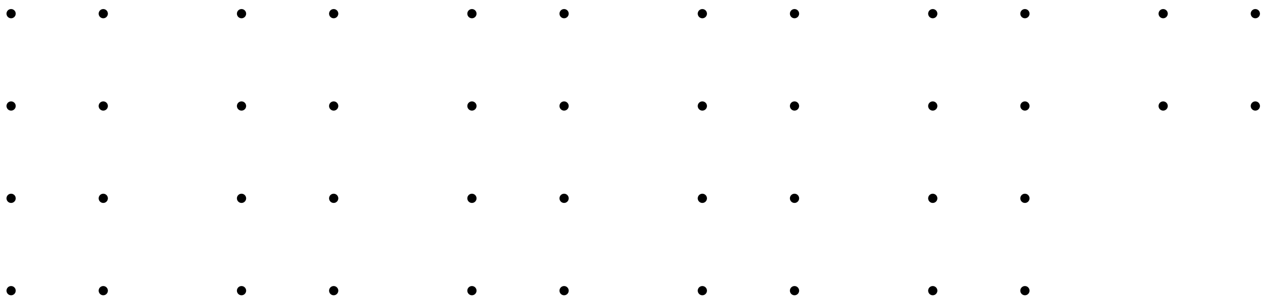
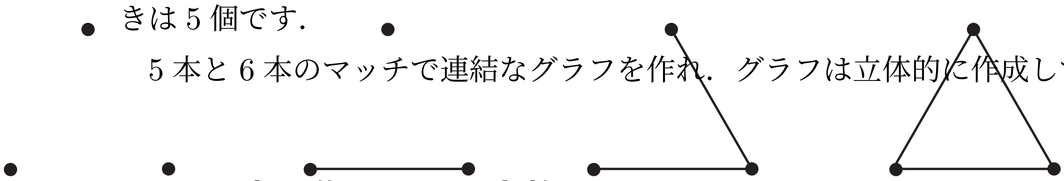


図 7.8　4 つの頂点のグラフ

レポート 16 マッチ棒の頭と端をグラフの頂点と思う．図 7.9 で示されているように、マッチ棒 1 本と 2 本のときの連結なグラフは 1 個で 3 本のときは 3 個、そして 4 本のときは 5 個です．

5 本と 6 本のマッチで連結なグラフを作れ．グラフは立体的に作成してよい．



7.3　頂点に集まる辺の本数

この節ではグラフの頂点の個数と辺の本数を考えよう．

問題 図 7.10 のグラフの頂点の個数と辺の本数を下の表に書き込め．

図 7.11 のグラフ G の頂点の数字は意味していますか．

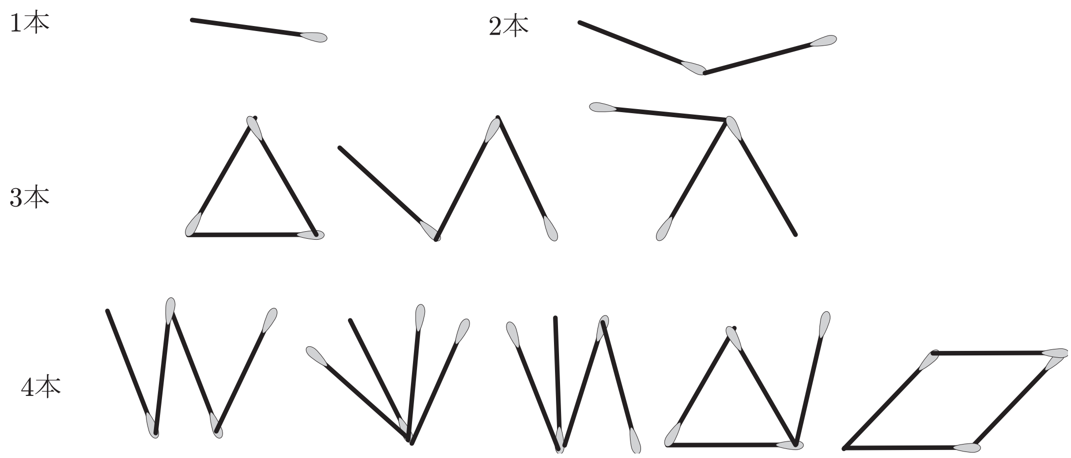


図 7.9　マッチ棒のグラフ

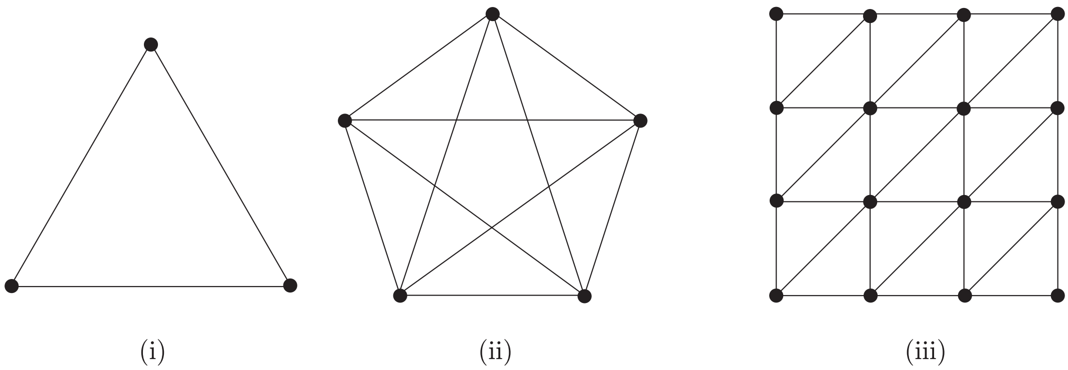


図 7.10　グラフの頂点の個数と辺の本数

図 7.10 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)
頂点の個数			
辺の本数			

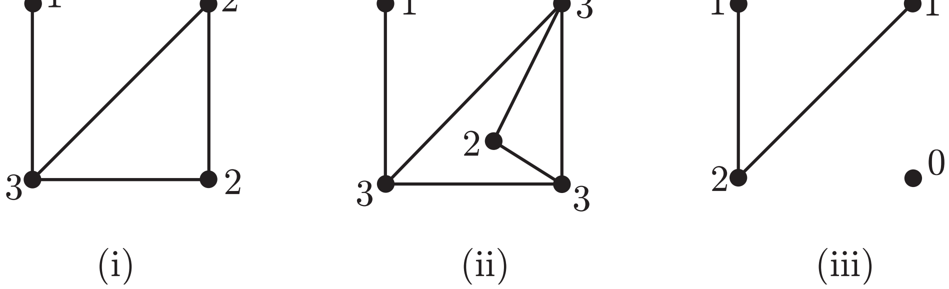


図 7.11　グラフとある数

これは、グラフの頂点に集まる辺の本数[*5]を表しています.

練習 図 7.10 のグラフについて，頂点に集まる辺の本数を求めよ.

グラフの辺の本数を求めて，頂点に集まる辺の本数との関係を考えよう.

図 7.10 の 3 つのグラフに対してつぎの表を埋めなさい.

図 7.10 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)
グラフの辺の本数			
頂点に集まる辺の本数の総和			

上の表から次のことがわかります.

補題 7.3.1 (握手の補題) 頂点に集まる辺の本数の総和はグラフの辺の本数の 2 倍になる.

図 7.12 のように辺の両端に手が付いていて頂点で握手していると思うと、頂点に集まる辺の本数の総和は手の個数になります. 1 つの辺に手は 2 つあるのでこの補題が得られます.

図 7.12　握手の補題

練習 図 7.11 のグラフで握手の補題が成り立つことを確かめよ. また、マッチ棒で作ったグラフに対しても確めよ.

図 7.11 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)
グラフの辺の本数			
頂点に集まる辺の本数の総和			

[*5] これを頂点の**次数**という.

簡単な補題ですが、さまざまな所で使います.

グラフ G において、すべての頂点に集まる辺の本数が r であるとき G を r-**正規グラフ** (r**-regular graph**)[*6] という.

正規グラフは綺麗な形になるものが多い. 例えば、自動車のアウディやメルセデス・ベンツのエンブレム、オリンピックの五輪などである. 図 7.13 は 3-正規グラフと 4-正規グラフの例である.

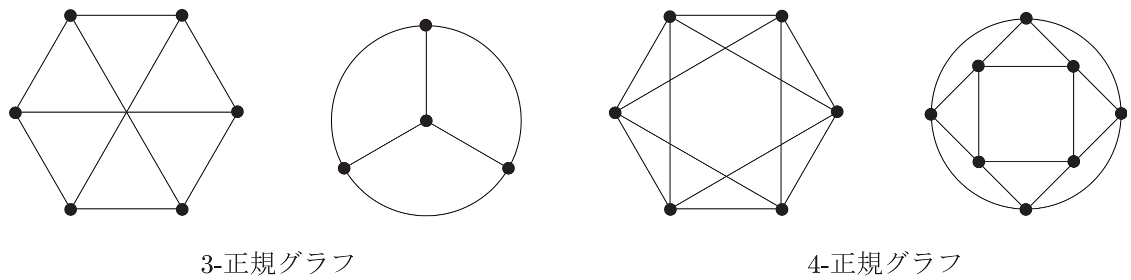


図 7.13　正規グラフの例

レポート 17 2-正規グラフ、3-正規グラフ、4-正規グラフ、5-正規グラフをたくさん作れ.

問題 5 つの頂点で 3-正規グラフは作ることができるか.

5 つの頂点の 3-正規グラフは存在しないことが次の系からわかります.

系 7.3.1 グラフで、頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点は偶数個ある.

握手の補題から、頂点に集まる辺の本数の総和は辺の本数の 2 倍より偶数になります. 頂点に集まる辺の本数が奇数の頂点は偶数個あることになります.

これは、偶数足す偶数は偶数、奇数足す奇数は偶数、偶数足す奇数は奇数を使っています[*7].

[*6] なるべく数学用語を使わないようにしてきたが、これくらいは大丈夫だろう.

[*7] (1) 握手の補題から頂点に集まる辺の本数の総和は偶数である. (2) 頂点には偶数本辺が集まるものと、奇数本集まるものがある. (3) 偶数本集まる頂点の辺の本数の総和は常に偶数である. (4) 奇数本集まる頂点の個数が奇数ならば総和は奇数になり、偶数ならば総和は偶数になる. (5) したがって、奇数本集まる頂点の個数は偶数個になる.

練習 (1) 2.2 節で出てきたグラフに対して頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点の個数は偶数であることを確めよ．
(2) 頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点をもつグラフを 3 つ描き，それらの頂点に集まる辺の本数が奇数の頂点が偶数であることを確かめよ

完全グラフという正規グラフを考える．**完全グラフ**とはどの 2 つの頂点も 1 本の辺で結ばれているようなグラフである．頂点の個数が n のとき K_n で表わす．この K はポーランドの数学者クラトウスキー (Kuratowski) の頭文字です．

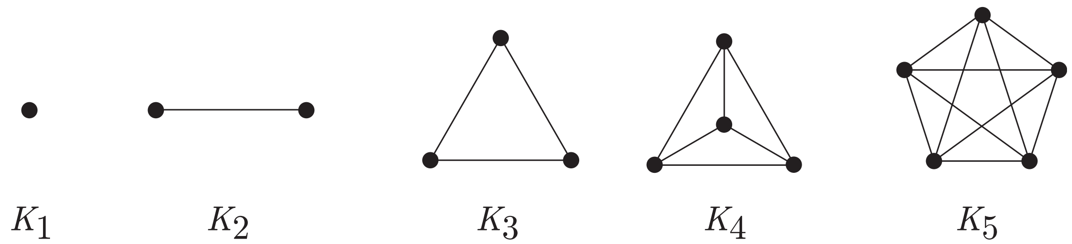


図 7.14　完全グラフ

図 7.14 に K_1 から K_5 までを描いておく．(K_4 だけ描き方を変えています．)

練習 完全グラフ K_6, K_7, K_8 を描け．

問題 完全グラフ K_n の頂点の個数と辺の本数を求めよ．
問題 コンピュータができる学生は K_n を作図するプログラムを作れ．

7.4　部分グラフ (subgraph)

グラフ G に含まれるグラフを G の**部分グラフ**という．

図 7.15　部分グラフ

図 7.15 の太線のグラフは G の部分グラフになっています．なにもない集合 (空集合) と G も G の部分グラフと考えることがあります．

K_3 **の部分グラフ** 図 7.16 は K_3 のすべての部分グラフを表しています.

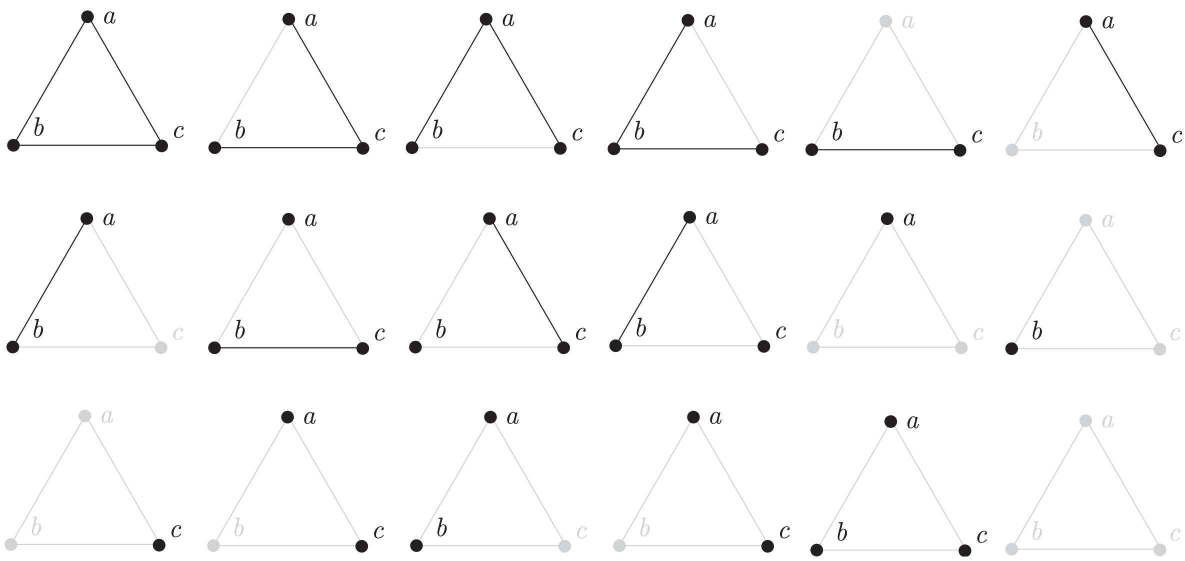


図 7.16　K_3 の部分グラフ

図 7.17 で神戸から東京に行くルートを考える場合は、部分グラフを考えています.

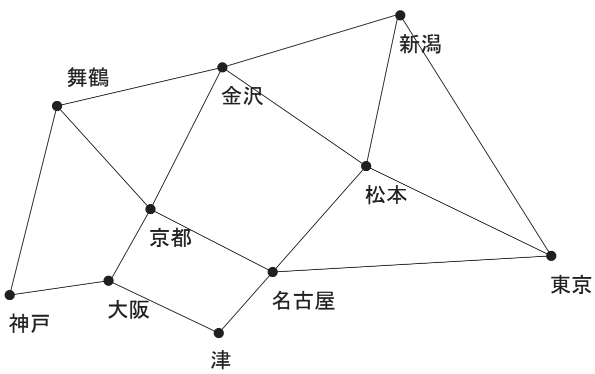


図 7.17　地図の部分グラフ

問題 図 7.18 のグラフの連結な部分グラフをすべて求めよ．連結でない場合は、部分グラフの個数がかなり多くなる.

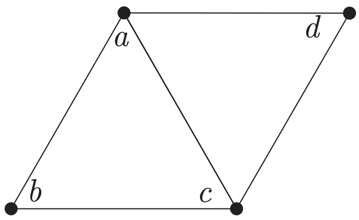
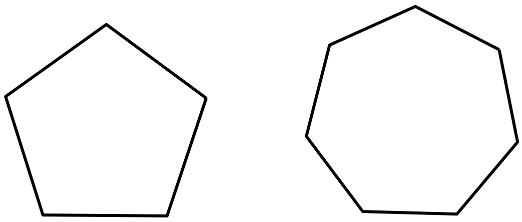


図 7.18　連結な部分グラフを求めよ

7.5　五角形

五角形はコンパスと定規だけで描くことができます．正三角形、正方形、正六角形も作図可能です．さらにもう少し角を増やして、正十七角形も作図可能です．しかし、正七角形、正九角形は作図（コンパスと定規だけでは）できません．特別な製図道具を使えば可能です.

レポート 18 正三角形、正方形、正五角形、正六角形をコンパスと定規で作図する方法を調べて作図せよ.

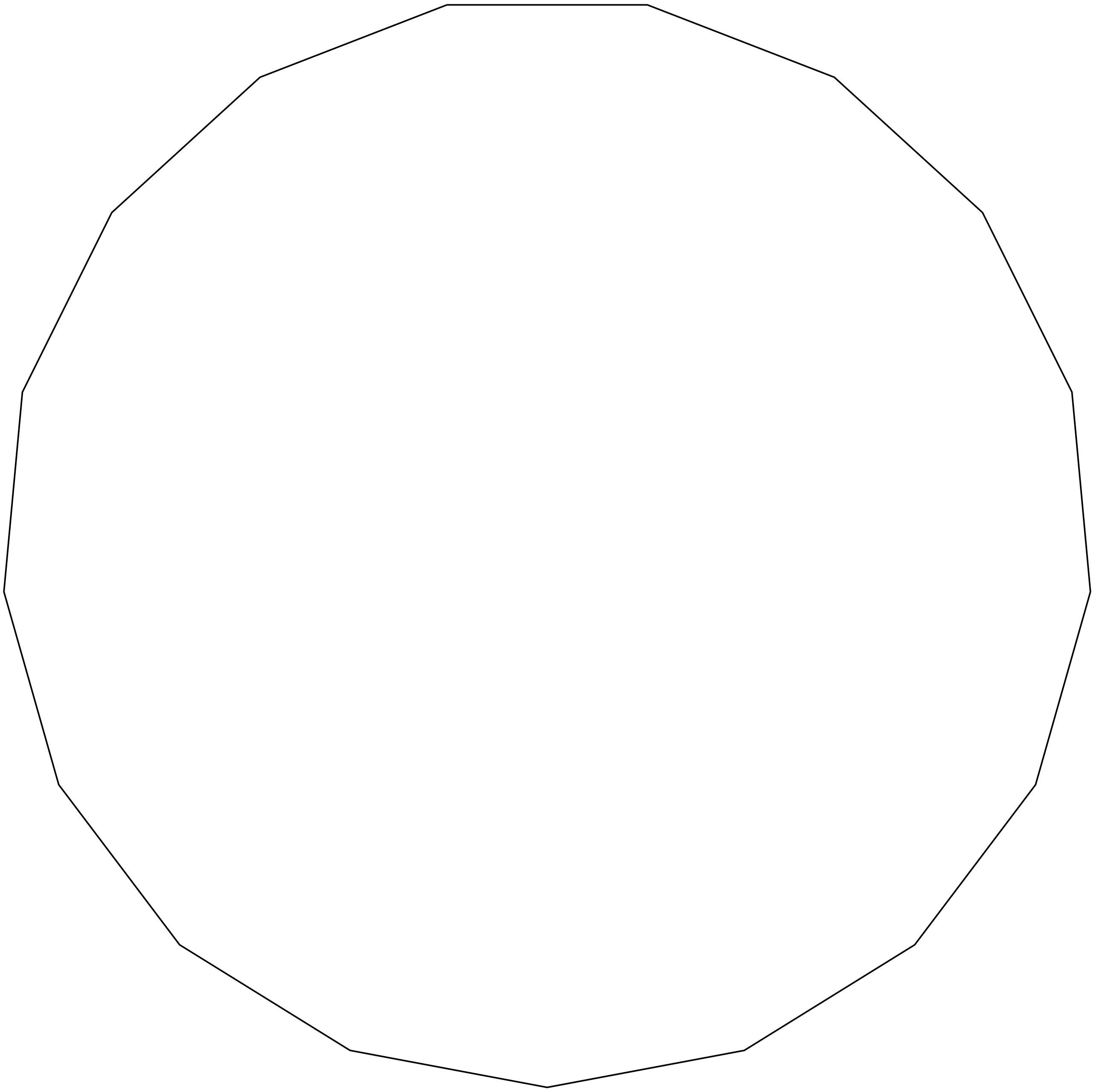


正五角形と正七角形

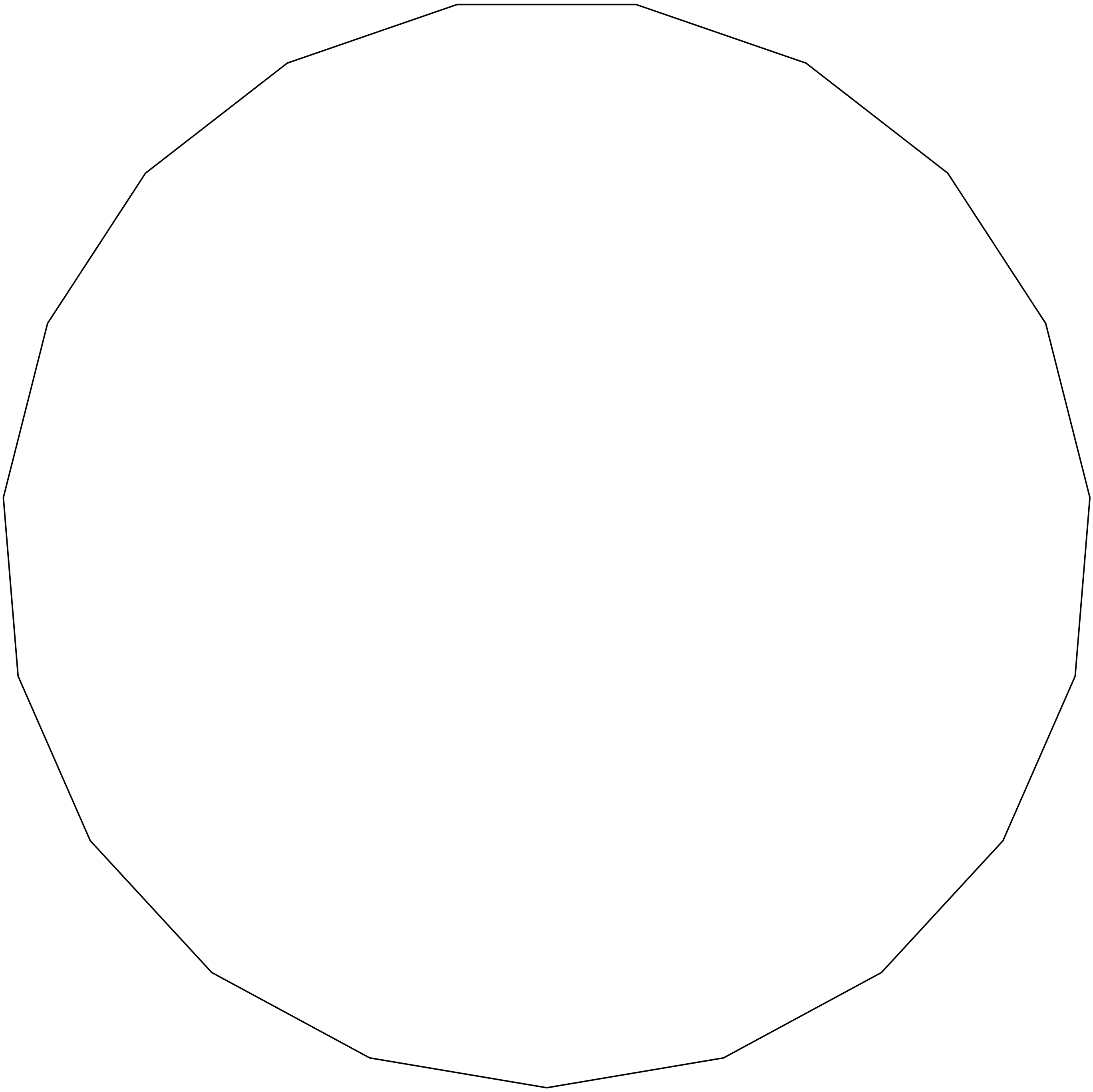
正五角形と正七角形を描いてみました．変わった方法として折り紙で正五角形の作り方があります．正十七角形と正十九角形をがんばって描いてみました．あまり小さいと円と区別つかなくなります.

正多角形はたくさんありますが，正多面体は有限個しかありません.

レポート 19「多面体の折紙ー正多面体・準正多面体およびその双対」川村 みゆき (著) 単行本日本評論社 に正多面体を折り紙で作成する方法が載っています．折り紙で作成してください.



正十七角形



正十九角形

2014-11-06