

6 彩色グラフ

6.1 グラフに色を塗って

頂点から出ている辺の本数が 1 の頂点 $\text{---}\bullet$ を持たない平面上の (辺と辺が交差し
ない*1) グラフを考えます。

面に色を塗りたい。辺で隣り合う面は異なる色で塗ることにします。面が頂点だけで接
していれば区別できるので同じ色で塗ってよいことにします。

たとえば図 6.1 のように塗ります。このようにグラフの面に色を塗ることを彩色という。

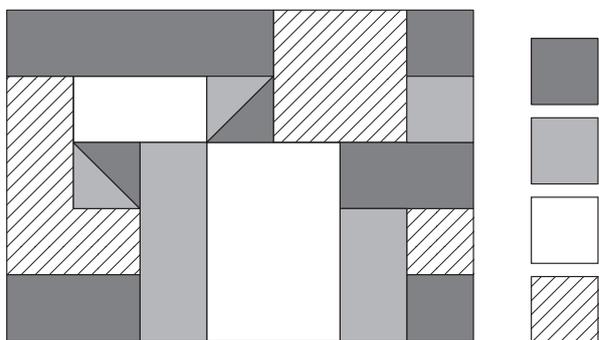


図 6.1 グラフの塗り分け

何色必要か 平面上にあるグラフが与えられたとき、彩色するためには何色必要でしょう
か。面の数だけ色を用意しておけばすべての面を異なる色で彩色できます。しかし、色が
多すぎて経済的ではありません。

そこでグラフが与えられた時に、彩色するために必要な色の最小数を考えます。

[考えましょう]

以下を満たすグラフをノートに描きましょう。

- (1) ちょうど 2 色必要なグラフを考えましょう。
- (2) ちょうど 3 色必要なグラフを考えましょう。
- (3) ちょうど 4 色必要なグラフを考えましょう。
- (4) 5 色ではどうでしょうか。

考察 図 6.2 のグラフを彩色しよう。

*1 厳密には「辺と辺が交わるならば頂点のみ」

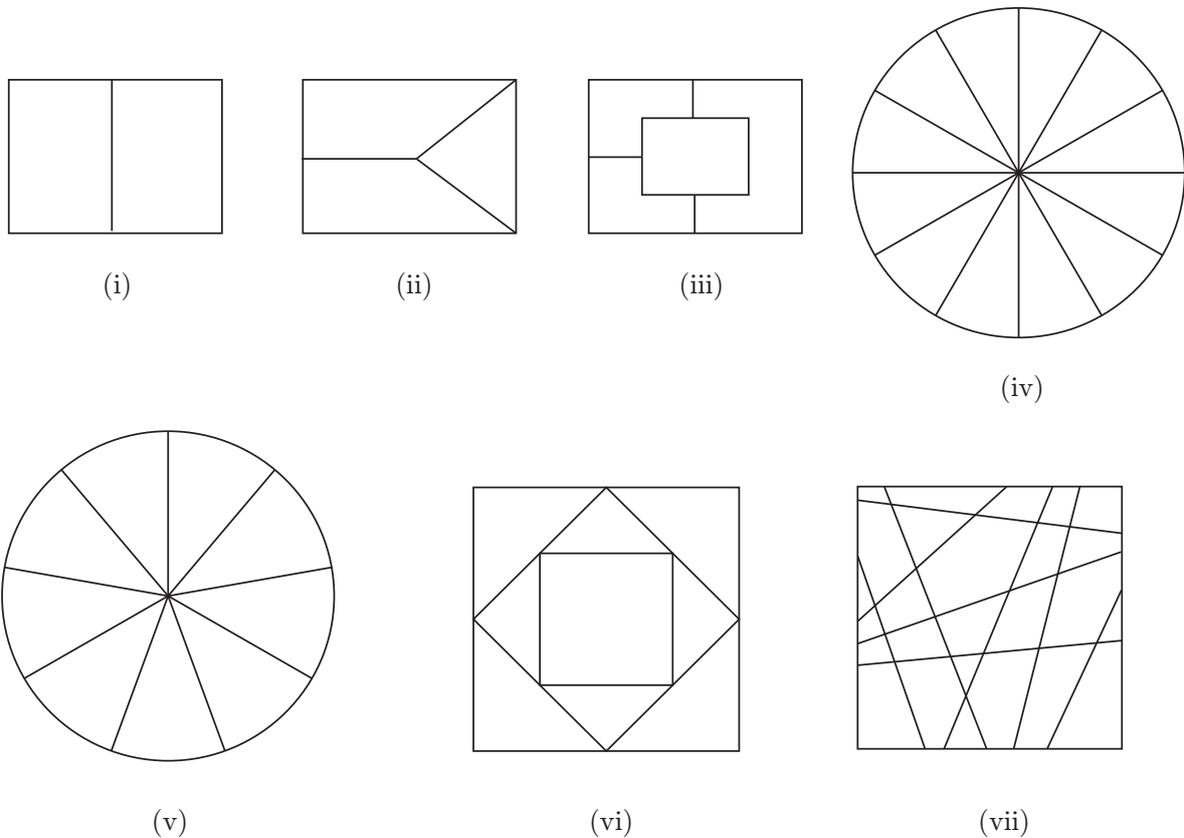


図 6.2 色を塗ってみよう枚

(i) のグラフは 2 色必要です. (ii) のグラフは 3 色必要です.

(iii) のグラフは 4 色必要です.

残りのグラフは, (v) を除き 2 色で色を塗ることができます. (v) は 3 色で彩色できます.

問 5 色必要なグラフはありますか .

これは 4 色問題とよばれて「どんな平面上のグラフも 4 色あれば彩色可能である」とことが示されています.

アベルとハーケンが, 1976 年にスーパーコンピューターを 1,200 時間ほど使って証明しました.

練習 図 6.3 のグラフに対して 4 色で塗ってみよう. 失敗してもよいように図 6.3 に同じグラフを 9 個準備してあります.

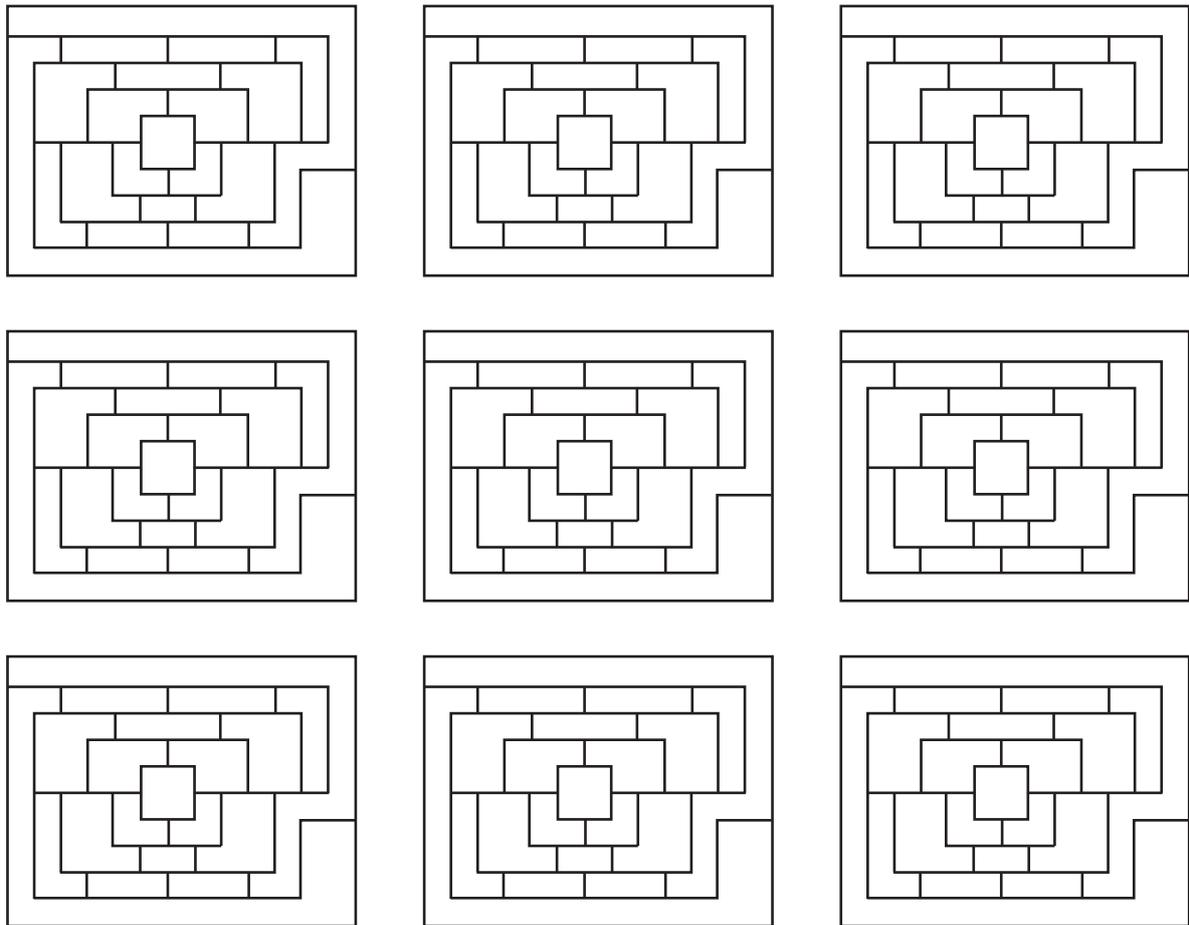


図 6.3 4色で塗り分け

失敗した場合は、よく考えてから新しいグラフに挑戦しましょう。

グラフを4色で塗る簡単な方法はまだ見つかっていません。

練習 図 6.4 のグラフに対して4色で彩色しなさい。簡単なアルゴリズムがないので、考えながら4色で彩色しよう。

5色での彩色は、アルフレッド・ブレイ・ケンプの論理を改良した簡単なアルゴリズムがあります。^{*2}

4色問題は、地図の色塗りの問題から派生してきました。印刷業者は経験則として4色あれば十分だとわかっていたみたいです。

^{*2} グラフ理論 : R. ディーステル著 根上生也・太田克弘訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 p.123

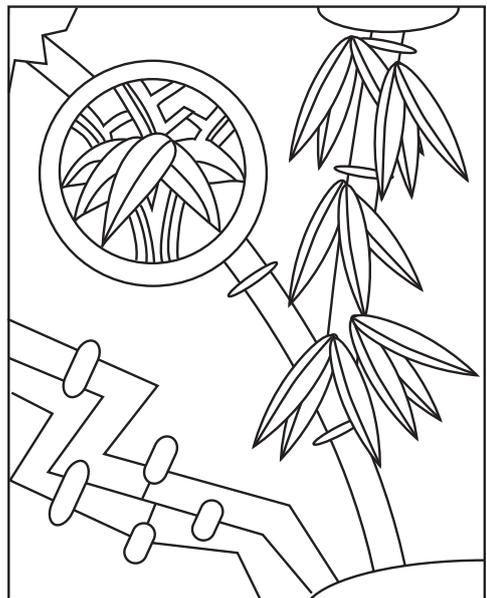
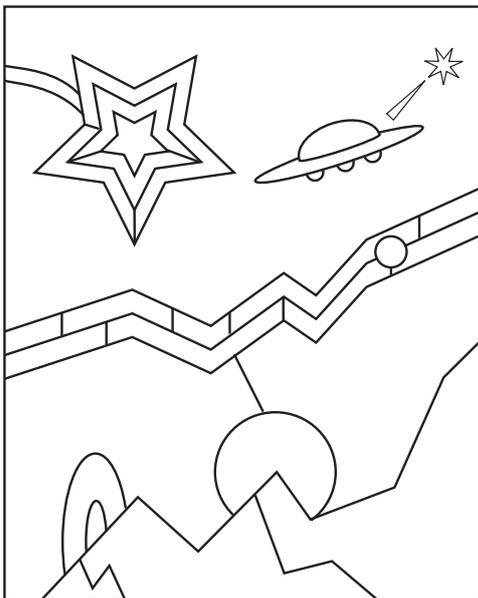
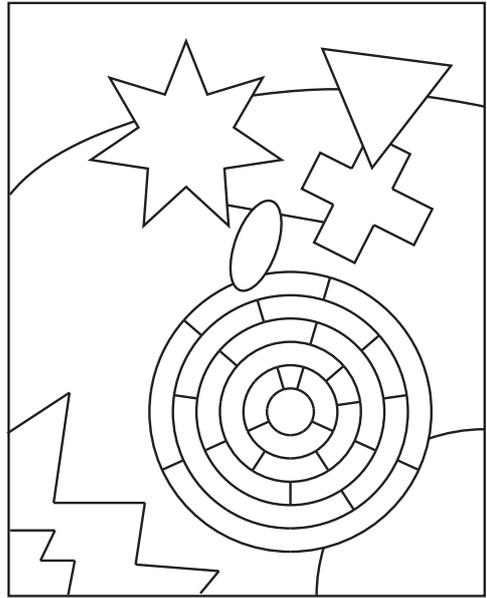
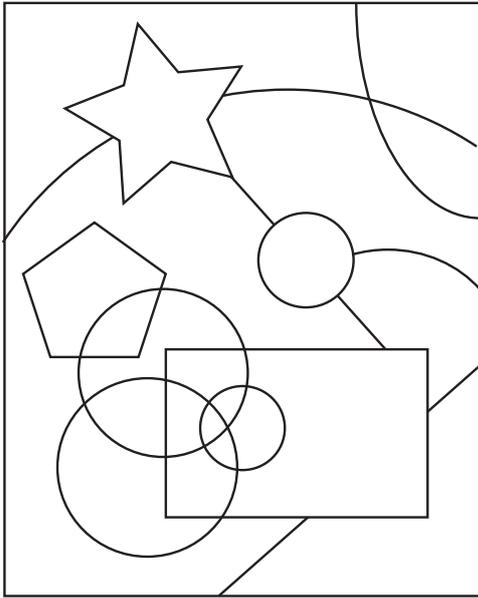


図 6.4 4 色問題

レポート 10 図 6.5 の近畿 2 府 5 県の地図^{*3}をグラフとみなして中からひとつの県を選び

^{*3} 最近の市町村合併には対応していません.

4色で彩色しなさい。(レポートには見やすいように拡大コピーして下さい.)
または, 好きな都道府県の白地図を用意して4色で彩色しなさい.

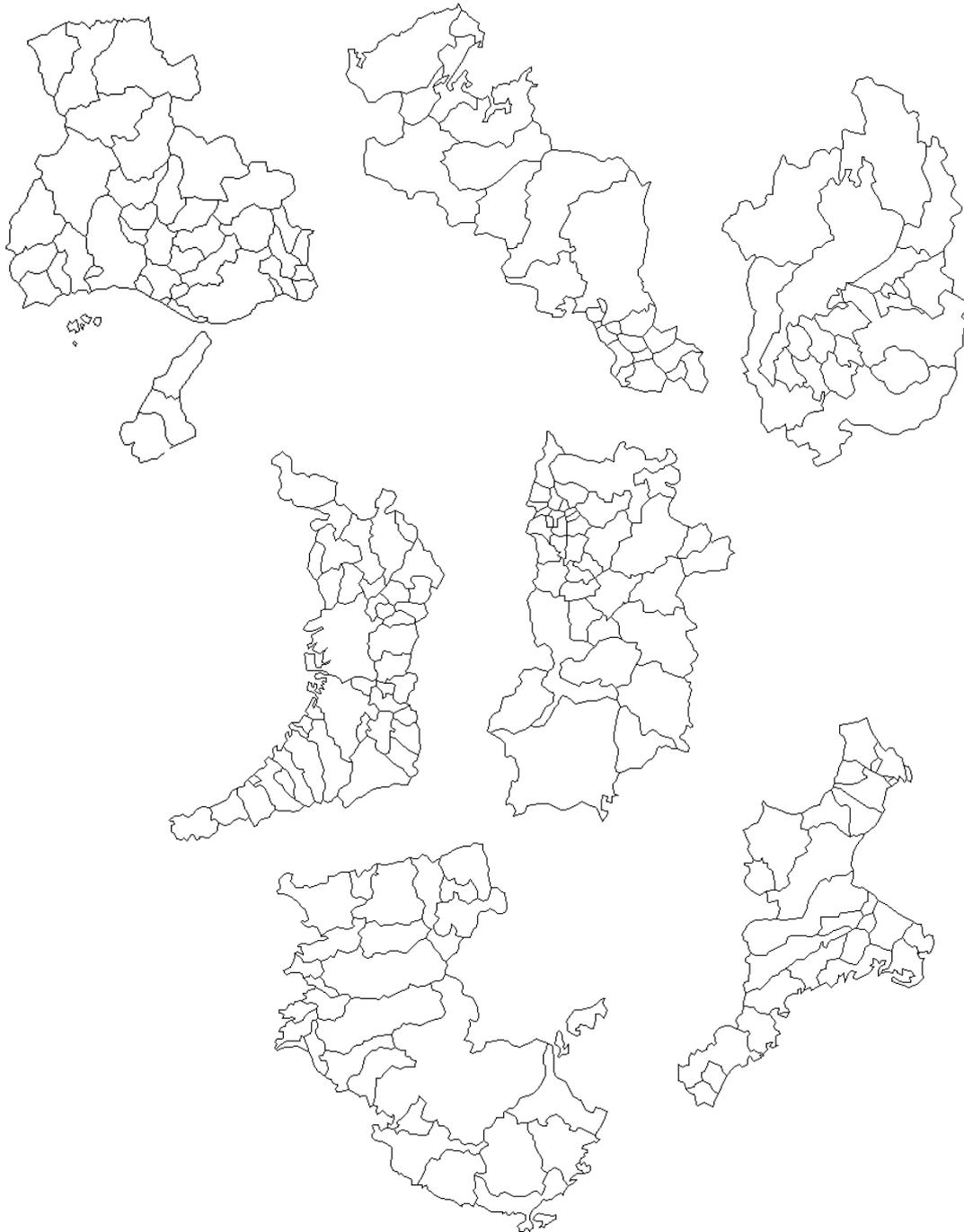


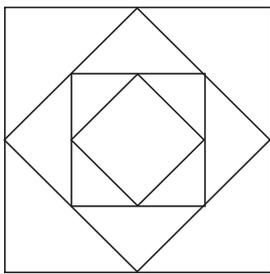
図 6.5 グラフに色を塗って

6.2 2色塗りと一筆書きのグラフ

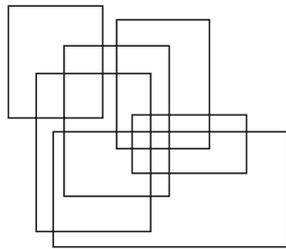
平面上のグラフは4色で色塗りが可能でした。それでは、3色で色塗りが可能なグラフとは、どのようなものでしょうか。また、2色で可能なグラフとはどのようなグラフでしょうか。

ここでは、簡単のために2色あれば彩色できるグラフを考えます。

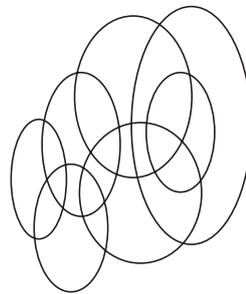
問題 図 6.6 のグラフを2色で彩色できるでしょうか。



(i)



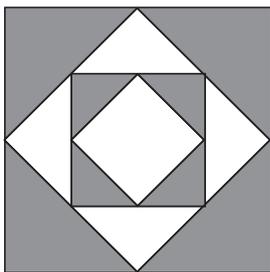
(ii)



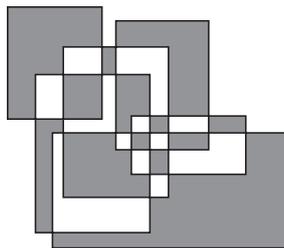
(iii)

図 6.6 2色あれば十分なグラフか？

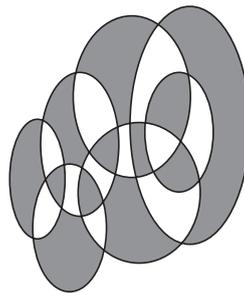
2色で彩色した図 6.7 のグラフ はどのような性質を持つグラフですか。



(i)



(ii)



(iii)

図 6.7 2色で彩色されたグラフ

連結な2色で彩色可能なグラフは、始点と終点が一致する一筆書きできるグラフです。

逆に一筆書きできるグラフで始点と終点が一致するグラフは2色で彩色可能です。

練習 図 6.8 のグラフを2色で彩色して下さい。

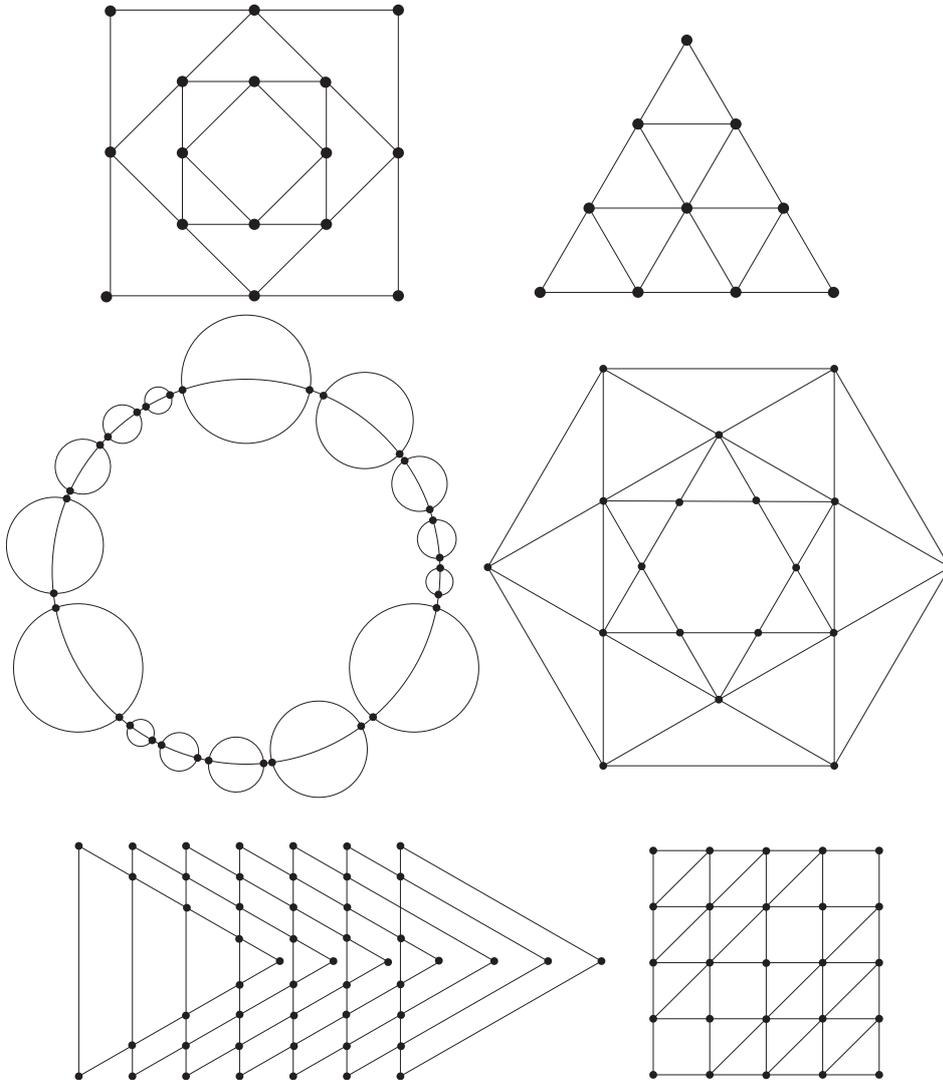


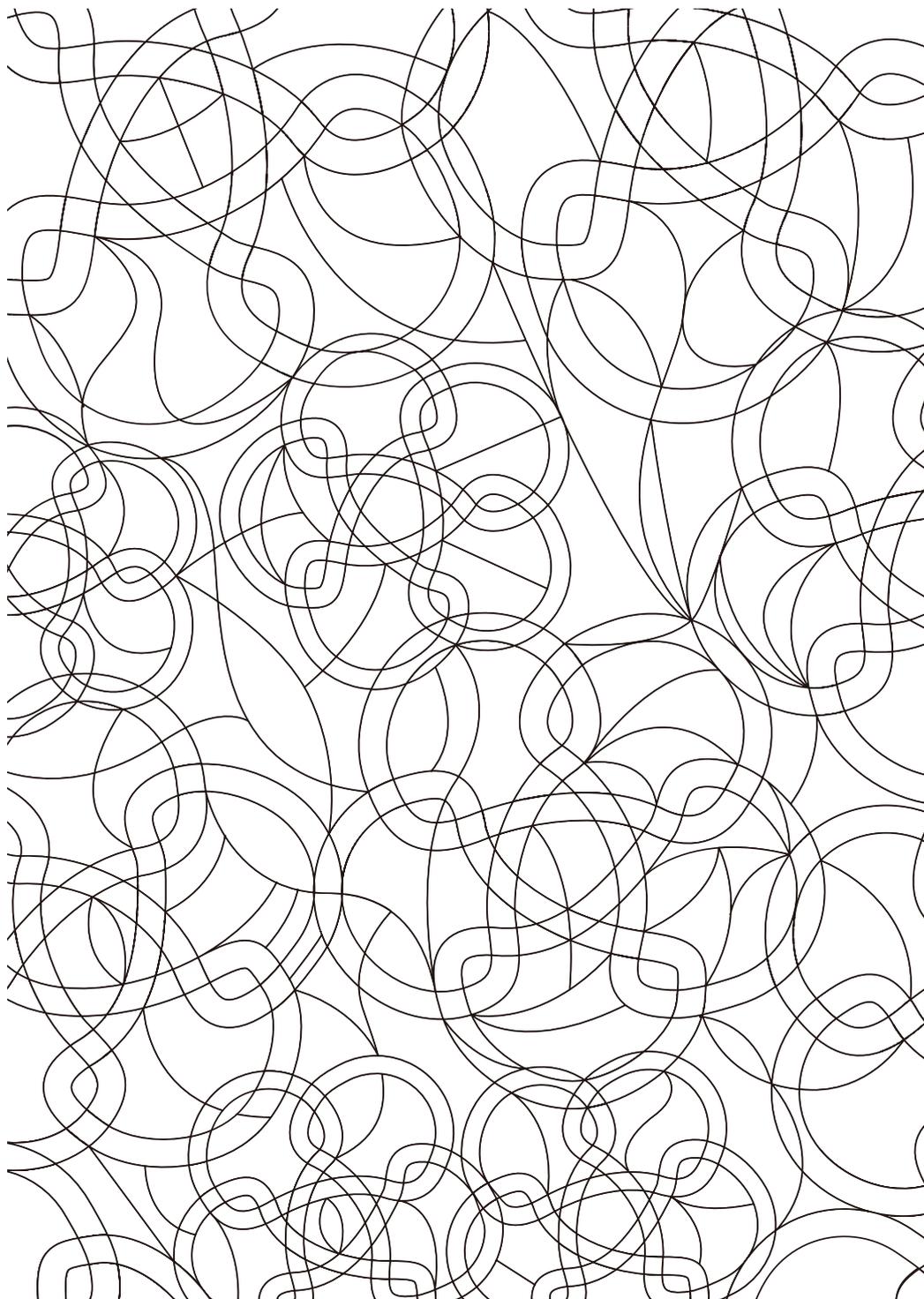
図 6.8 一筆書き可能なグラフと2色塗り

レポート 11 一筆書きできるグラフで、始点と終点が一致するグラフは、2色で彩色可能となることを示せ。

レポート 12 3色必要なグラフをたくさん作り、なぜ3色必要なのかを述べなさい。

6.3 塗り絵

国土館大学の新庄玲子先生に塗り絵を描いてもらいました。









6.4 レポート 1 題

レポート 13 次のマジックは Mr. マリックがやっていたマジックです*4.

図 6.9 で表された山手線と京浜東北線を考えます. 横浜駅がスタート地点で山手線には左回りを図のように決めておきます.

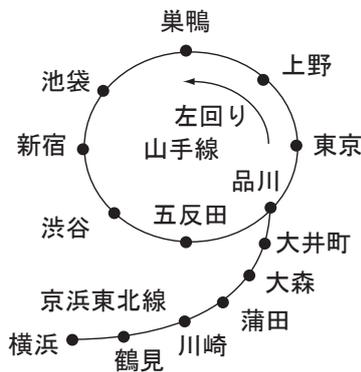


図 6.9 山手線

手順 1 さあ, 皆さん「7 以上の数を考えてください。」

手順 2 京浜東北線の横浜駅から順に数えていき, 1 番目は鶴見, 2 番目は川崎と進んでいきます. 品川駅からは左回りに山手線を回っていきます. 自分の考えた数のところが停車駅なのでそこで停まります.

手順 3 その駅から今度は考えた数だけ山手線を逆の方向に戻っていきます. ただし, 京浜東北線には入らないようにします.

手順 4 自分のいる駅をしっかりと見てください. たぶん, 巣鴨ではないですね. 新宿や品川でもないですね.

7 以上のどんな数を考えても必ずある駅になります. どの駅でしょうか? また理由を考えてください.

2014-10-30

*4 ナポレオンズもやっていました. 結構有名な手品みたいです