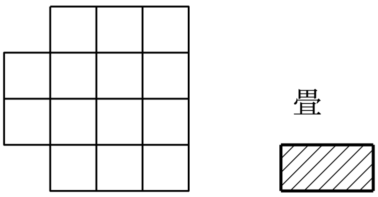
# 4　畳を敷きましょう

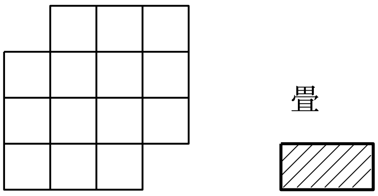
## 4.1　7 畳敷

**問題 1** 下図の 7 畳の部屋がある．この部屋に 7 枚の畳を敷いてください．

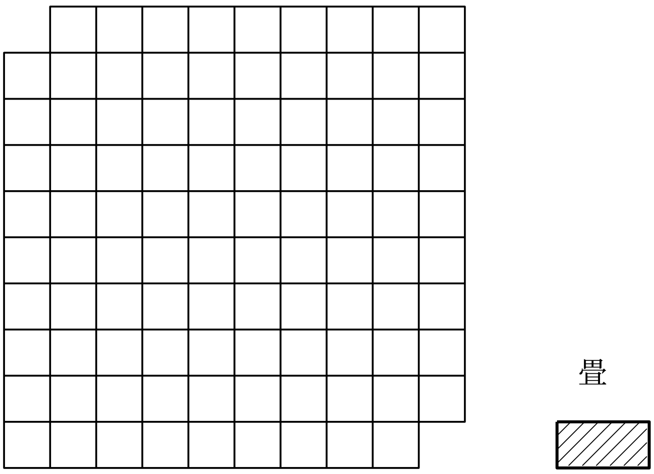



簡単に畳を敷くことができましたね．

**問題 2** 下図の 7 畳の部屋に 7 枚の畳を敷いてください．




**問題 3** 次の 49 畳の部屋に 49 枚の畳を敷いてください．




実は，問題 2 と問題 3 は畳を敷くことができません．

畳を敷くことができることの証明は，実際に敷き詰めればよい．しかし，できないことの証明は，**どのような敷き詰め方をしても不可能だ**ということを示す必要があります．

問題 2 の部屋では畳を敷くことがなぜできないのかを考えましょう．

**【7 畳敷きの部屋の普通の解法】**

1 枚目の畳を部屋の真中に畳を敷くのはよくありません．畳を縦向きと横向きに敷くことができるので，2 通りの方法を考えないといけなくなります．

一枚目は左下の角から敷き始めよう．部屋の対称性から，図 4.1 の様に，畳の置き方は 1 通りしかありません．そこに畳を置いてみましょう．

次にどこに畳を敷くのが良いでしょうか．$X$ で示した所は畳の置き方が 1 つしかありません．そこに畳を置くと，また，置き方が 1 つしかない場所が出てきます．

この操作を順次行っていきます．すると，図 4.1 の最後のグラフのように, 最後のところで 1 畳分が半畳 2 枚に別れてしまうので敷くことができません．

7 畳の場合は最初に畳を敷く場所をうまく選べば, 簡単な議論で畳を敷くことができないことを示せます．

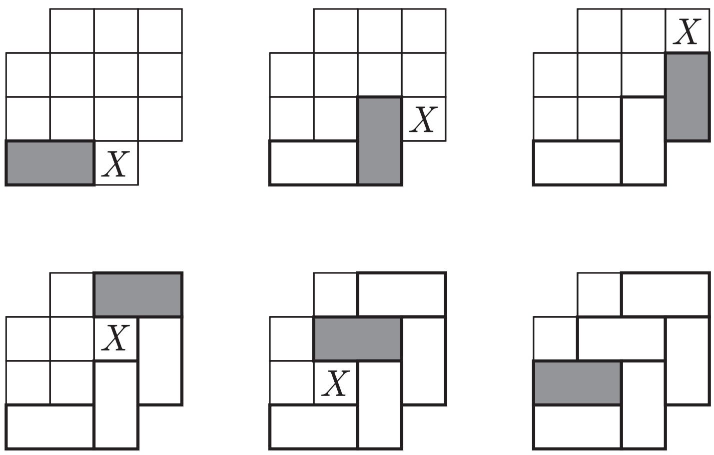



図 4.1　7 畳敷きの答え

では，**問題 3** の 49 畳の部屋で同じことを考えるとどうなりますか．7 畳のときと同じようにはできません．1 枚目を左下の角に畳を置いても，2 番目に置く畳の位置が 1 つに決まらないので場合わけが多くて証明することは大変です．

**新しい考え方** 図 4.2 のように白と黒で市松模様に塗ってみよう．

この色の塗られた部屋で畳の問題を考えてみます．

**問題** 図 4.2 の部屋に畳を敷くことはできるでしょうか？

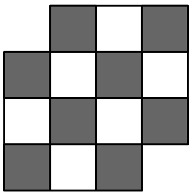
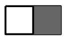


図 4.2　7 畳の部屋に色を塗る

問題が変わっていないと思うかもしれません．しかし，色を塗ったことで畳を敷くことができるかどうかすぐにわかります．

この部屋に 1 枚の畳をどのように敷いても， のようになり黒と白を 1 つずつ覆います．すると**畳を敷くことができたとすると白と黒の数はともに 7 枚となります**．

**対偶**をとると，**白と黒の数がともに 7 枚でなければ，畳を敷くことができない**となります．この部屋は黒が 8 枚・白が 6 枚なので畳を敷くことができないことがわかりました．このように考え方を変えることで簡単に示すことができる場合があります．

**練習** 図 4.3 の部屋に畳を敷くことができないことを同じようにして示してください．(色々なアイデアを出すためにグラフを 3 個用意してあります．)

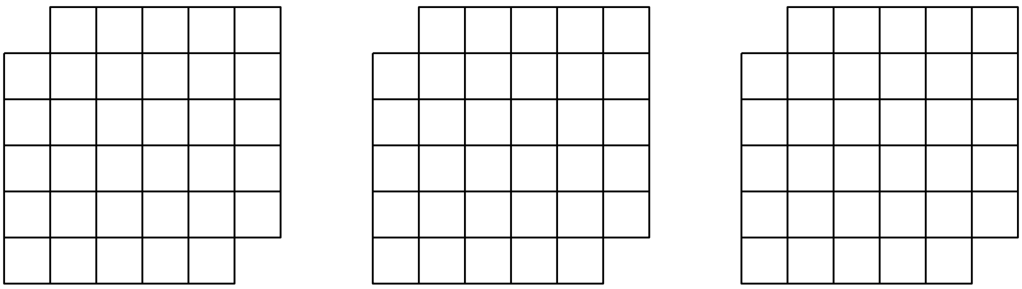


図 4.3　畳敷きの答え

できない理由を自分の言葉でわかりやすくノートに書きましょう．**この記録を残す作業は大事にしましょう**．

問題 3 はどのようにすれば解けるかもうわかったと思います．

## 4.2　畳敷きの更なる拡張

**【1 × 4 問題】** 図 4.4 のグラフを $1 \times 4$ のタイルで敷くことは出来るでしょうか？

図 4.5 に考察ようのグラフを用意しました．

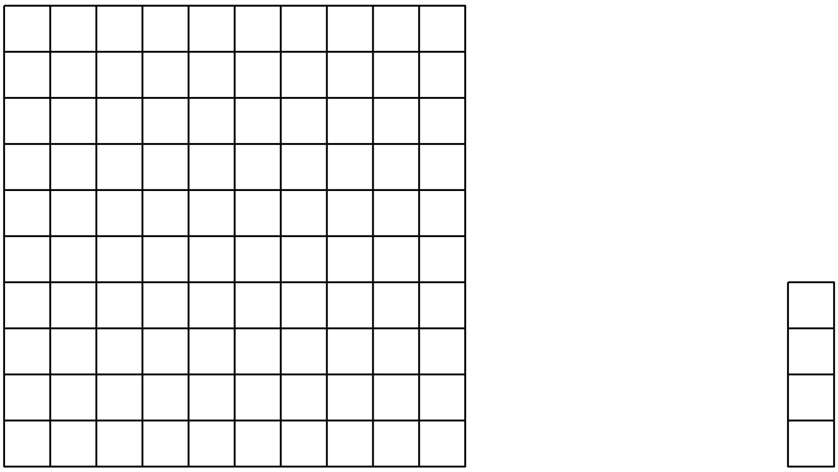


図 4.4　$1 \times 4$ のタイルで敷き詰めて

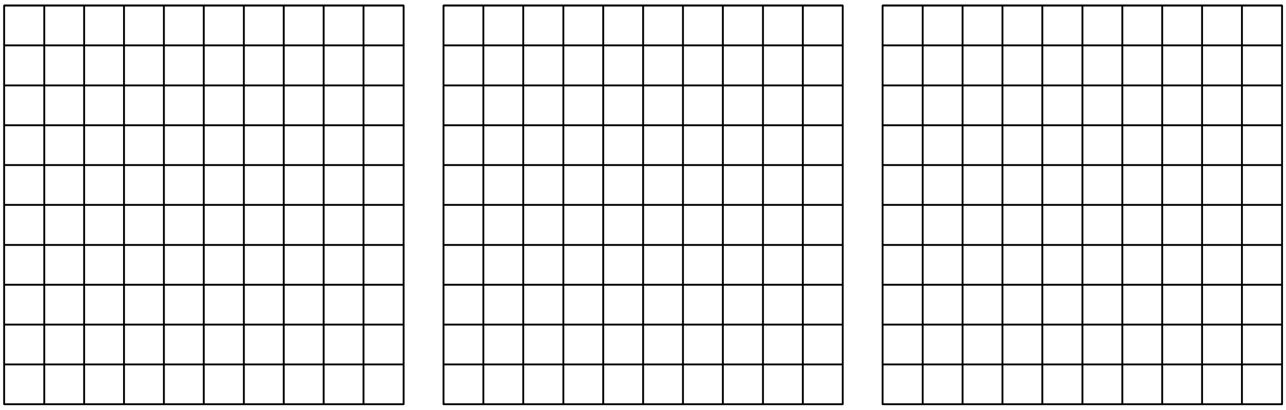


図 4.5　$1 \times 4$ のタイルで敷き詰めて，練習用

この問題もタイルを敷くことはできません.
図 4.6 のグラフを図 4.2 のように白と黒で市松模様に塗ってみましょう.

グラフを市松模様に塗ると, $1 \times 4$ のタイルはどのように置いても白と黒を各々 2 枚覆います，白と黒の個数が異なれば，敷くことができません．そこで，色を塗ったグラフの白と黒の個数を数えると,

残念ながら白黒ともに 50 枚になるのでこの方法ではうまくいきません.

しかし，7 畳の部屋の問題で考えたように，考え方を工夫すれば，問題が解けることがあります．色の塗り方を変えてみましょう.

図 4.6 のグラフの塗り方を変えて不可能だと示そう.

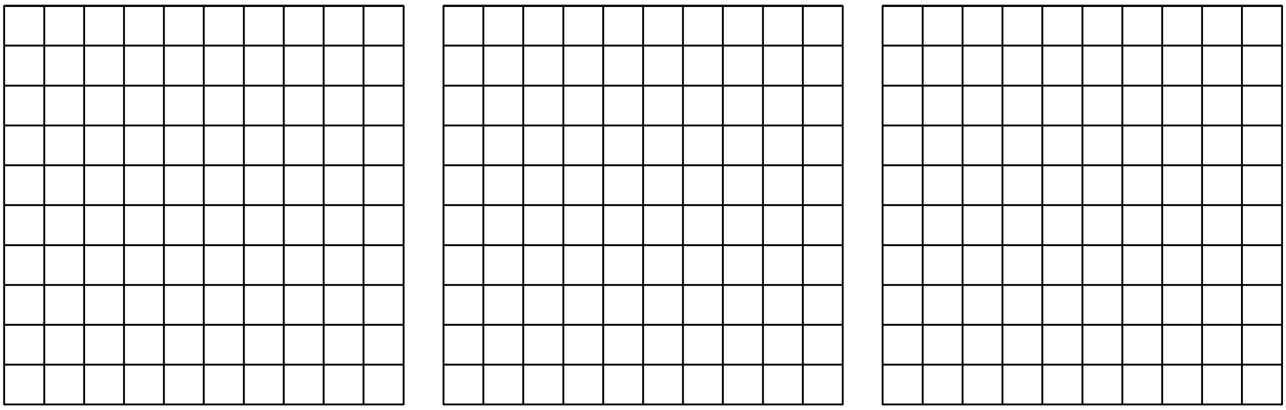


図 4.6　タイルを白黒で塗って

本当は，解答を見ずに考えるのが一番良い方法だと思うのですが，大学入学して 1 年目なので，解法の 1 つを次で示します．これ以外に良い解答がある可能性があるので考えてください．たまに，僕の考えている解答よりもいいのを考えてレポートにしてくれる学生がいます．

**【$1 \times 4$ 問題】の解法**

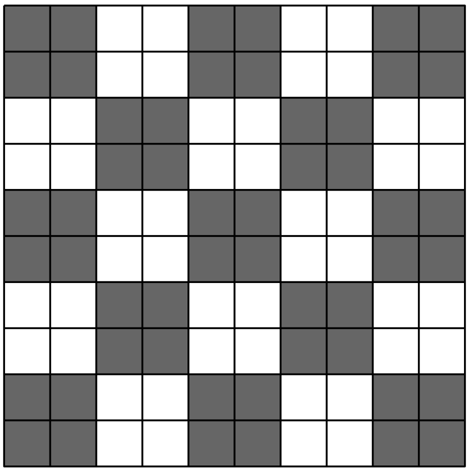


図 4.7　$1 \times 4$ のタイルを白黒に塗って

図 4.7 のように白と黒に塗ります．この場合も，$1 \times 4$ のタイルをどのように置いても白 2 枚と黒 2 枚を覆うことがわかります．したがって，敷くことができれば白と黒の枚数は同数です．

図 4.7 の白と黒の枚数を数えてみましょう．白 48 枚・黒 52 枚になりました．白と黒の枚数が異なるので敷くことはできません．

**レポート 6** [$\mathbf{1 \times 4}$ 問題] を別の塗り方で解け.

**拡張された問題** 図 4.8 を $1 \times 3$ のタイルで敷くことが出来ますか？

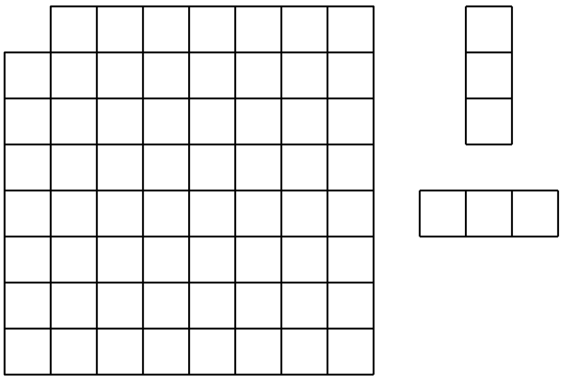


図 4.8　$1 \times 3$ のタイルで敷き詰めて

図 4.9 のグラフで, 敷くことができるかどうか実験してみなさい.

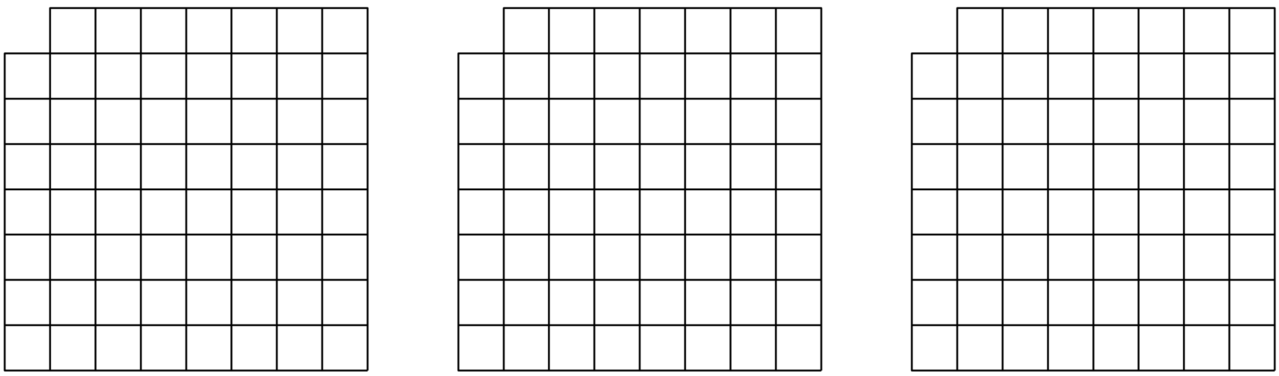


図 4.9　$1 \times 3$ のタイルで敷き詰めて (実験用)

実際にタイルを敷くと，不可能だとわかります.

前の問題では白と黒の色の塗り方を変えました. しかし，$1 \times 3$ のタイルなので，白と黒の個数で考えてもうまくいきそうにありません*1.

**レポート 7** p.30 の [拡張された問題] を解け.

*1 白と黒の色塗りではこの問題は解けないと思っていました. しかし，山形大学の授業で白と黒の色塗りで解答した学生がいました. 非常に上手な方法でした. その解法をこの章の最後に載せておきます.

**ヒント**この問題ではタイルの枚数が多いので，少ない場合を考えて見ます．図 4.10 の太い線で囲まれたところに $1 \times 3$ のタイルを敷き詰めたい．できるだろうか？ $1 \times 3$ のタイルなので白と黒の 2 色で塗ってもうまくいきません．そこで，色の数を増やして 3 色にして塗ってみました．

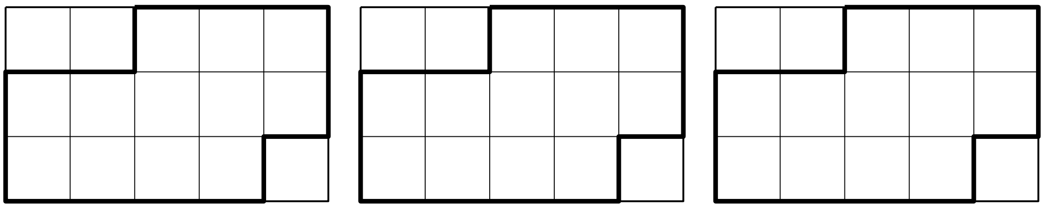


図 4.10　$1 \times 3$ のタイルで敷き詰めて (ヒント)

図 4.11 がその図です．そこで，各々の色の個数を数えると…

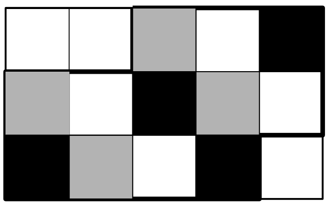


図 4.11　$1 \times 3$ のタイルで敷き詰めて (3 色塗り)

## 4.3　すべての頂点をまわって

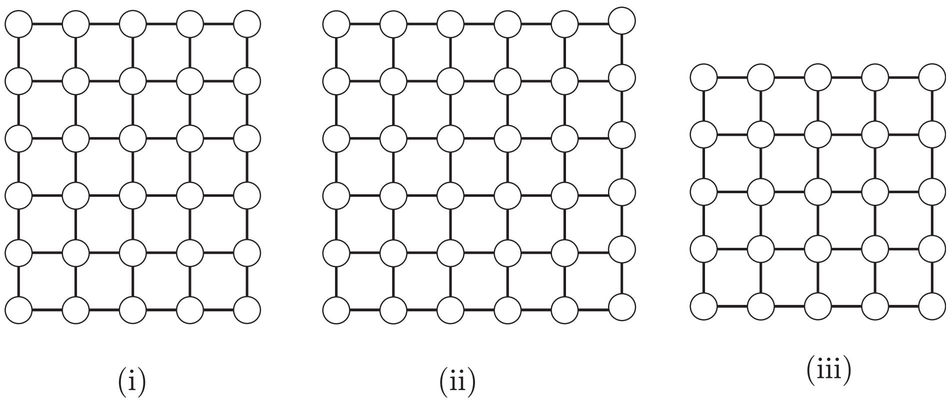



図 4.12　頂点をまわって

**問題**　ある頂点から出発して，辺に沿って移動してすべての頂点を 1 度だけ通ってもとの

頂点に戻ってくることを考える．ただし，通らない辺があってもかまいません．

図 4.12 の 3 つのグラフで可能かどうか考えてください．

【実験】図 4.13 のグラフで実験しよう．

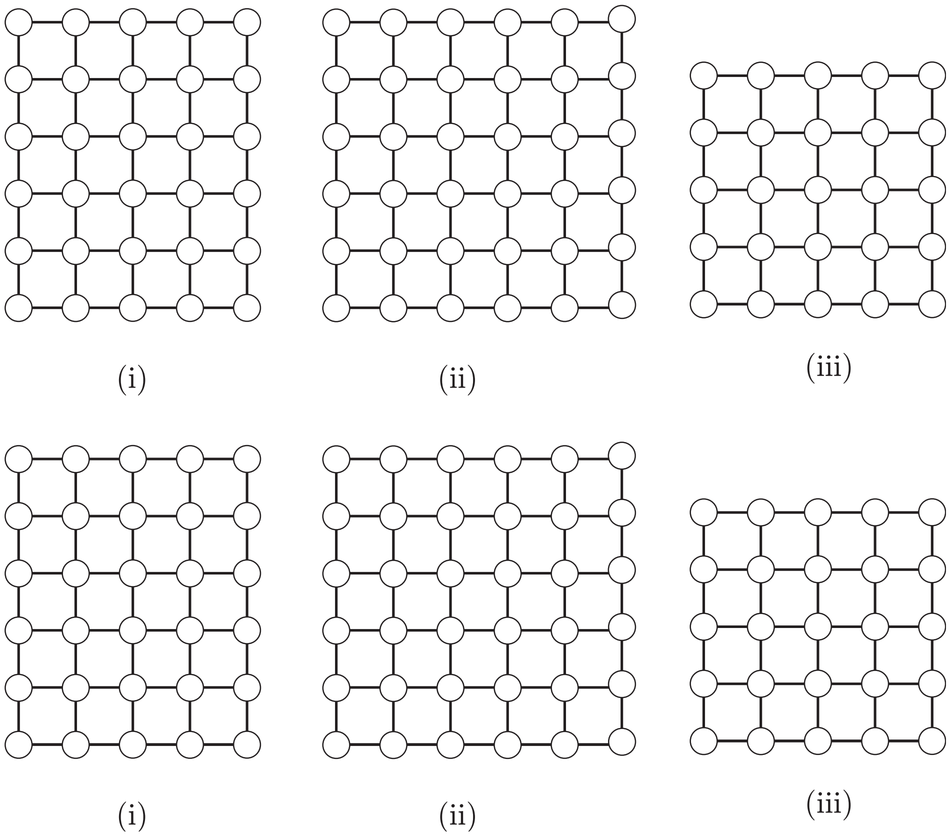



図 4.13　頂点をまわって (練習用)

不可能なグラフはどれですか．また，なぜ不可能なのかの理由を考えましょう．ただし，「頂点の個数が奇数のとき，不可能」というのは理由になりません．奇数のとき，な**ぜ不可能かの理由を示す必要があります**．

**ヒント** 畳の問題と同じように今度は頂点に色を塗ってみましょう．

この問題も頂点を白と黒で塗ることにより，解くことができます．

図 4.14 のように，頂点を白と黒で塗ります．注意してほしいのは辺でつながっている 2 つの頂点の色は異なっていることです．出発する頂点はどこでも良いので，$X$ から出発す

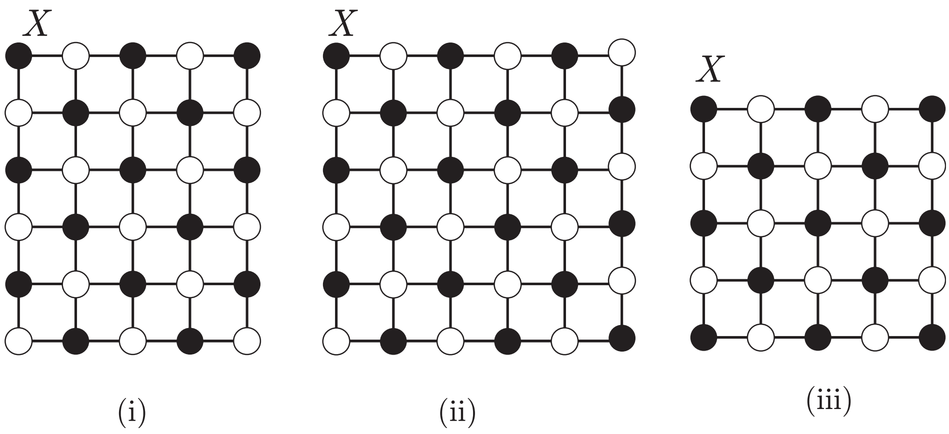



図 4.14　頂点をまわって (解答)

ることにします．$X$ の黒で塗られているので，辺でつながっている頂点はすべて白色です．すると，辺に沿って進むと，頂点の色は黒と白が交互に出てくることになります．

問題の条件から，もとの頂点に戻ってくるので，色を見れば，$X =$ 黒 $\Rightarrow$ 白 $\Rightarrow$ 黒 $\Rightarrow$ 白 $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ 白 $\Rightarrow$ 黒 $= X$ となります．両端点は $X$ であることに注意すれば，黒と白の個数は等しくなります．したがって，頂点の個数は黒と白の個数の合計になるので，偶数になります．

よって，「もとの頂点に戻ってくることができる」ならば「頂点の個数は偶数」ということがわかりました．

すなわち,「頂点の個数が奇数」ならば「戻ってくることができない」ことがわかります．

今回は，頂点の個数が偶数のときにはもとの頂点に戻ってくることができます．頂点の個数が偶数であっても, もとに戻ってくることのできないグラフもあります．

一筆書きはすべての辺を 1 度だけ通ることができるかという問題でした．そして，一筆書きの場合にはどのグラフが一筆書き可能かまた一筆書きの仕方もわかっていました．ここでは，すべての頂点を 1 度だけ通って戻ってくることができるグラフは，どのようなグラフかという問題です．残念ながら，どのようなグラフが可能かという完全な答えはまだ見つかっていません．さらに，始点と終点が異なる場合を考えることもあります．

## 4.4　博物館見学

図 4.15 の博物館がありました．入り口は固定されているのですが，出口は A，B，C，D，E の 5 箇所あります．

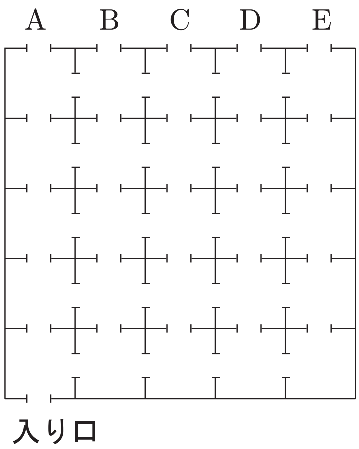



図 4.15　博物館

**問題** 入り口から入りすべての部屋を 1 度だけ通って出口 A から出る道順を求めよ．また，そのような道順を 3 つ以上見つけよ．ただし，一度出口から出ると戻ることはできません．

**レポート 8** この博物館では，出口によって可能なものと不可能なものがあります．可能な出口はその道順を示して，不可能な出口にはなぜ不可能かを示しなさい．

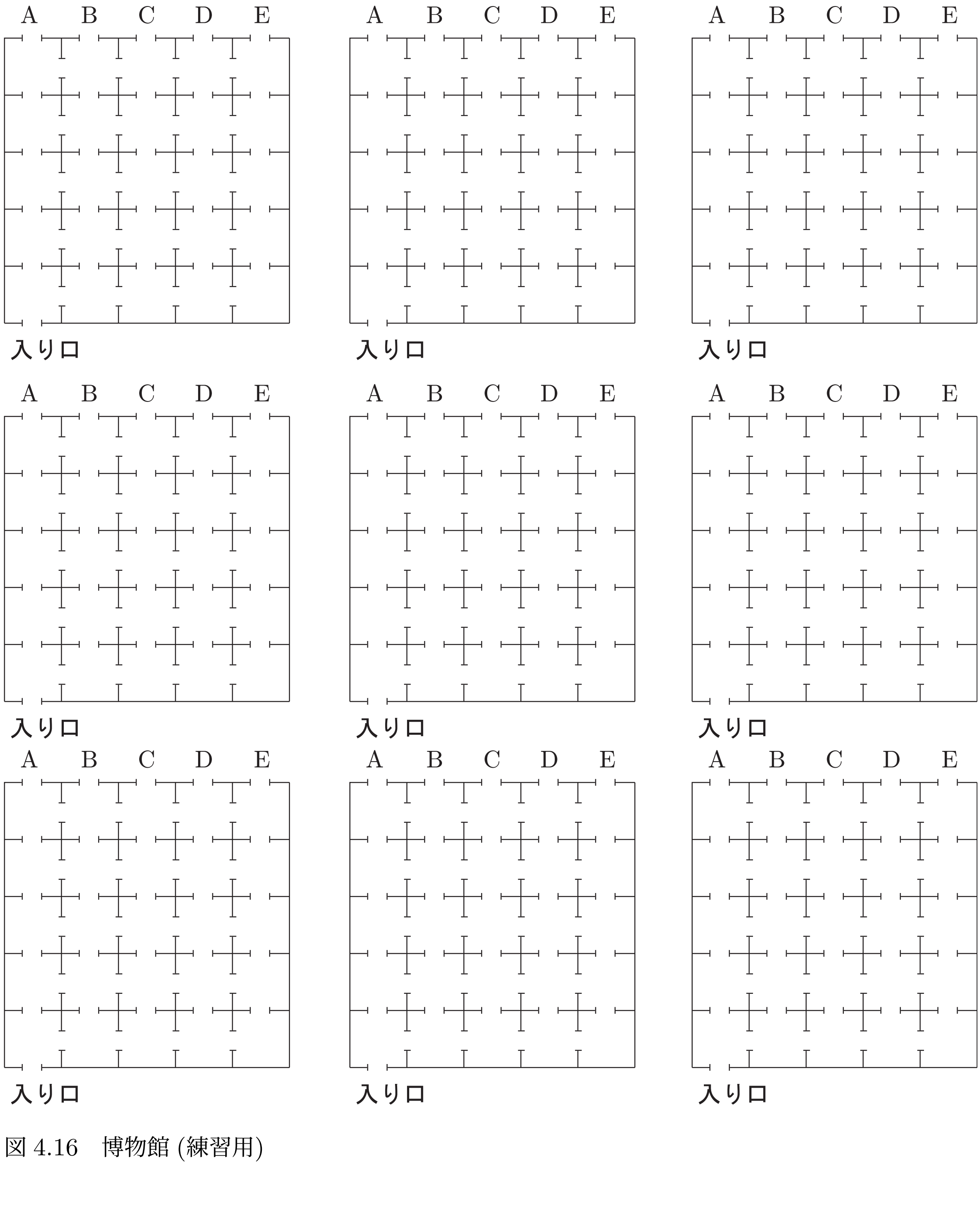

A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口

図 4.16　博物館 (練習用)

**2014-10-16**