2　グラフの定義と応用

2.1　グラフの定義

グラフとは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形です.

1 章での一筆書きの図形や図 2.1 はグラフの例です.

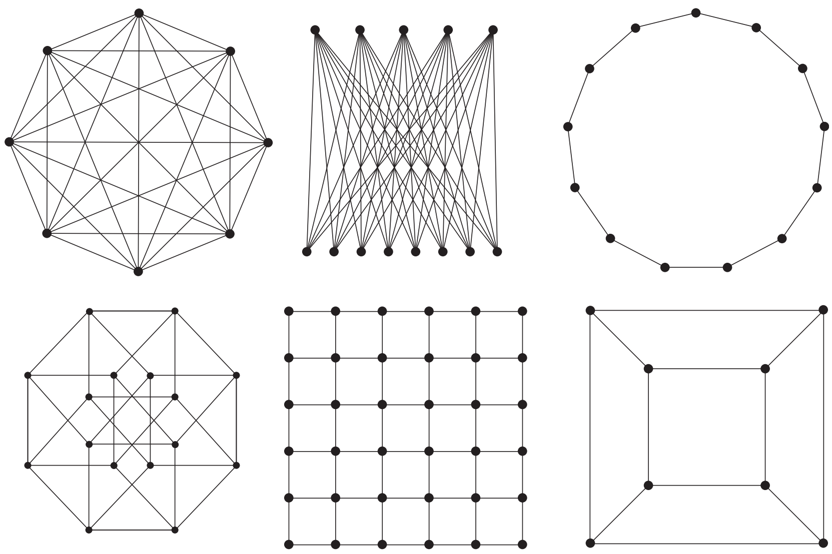


図 2.1　グラフ・グラフ・グラフ

この授業では頂点は太い点 ● で表します. 図 2.1 の最初の 8 角形のグラフを見てほしい. このグラフで頂点は 8 角形の 8 つの頂点だけであり、対角線が交わっているところは、頂点ではありません.

Planarity[*1] という頂点を動かしてグラフを平らにするゲームを知ってれば、頂点と辺と辺との交差との違いがわかりやすい.

練習 ノートにいくつかグラフを描いてみよう.

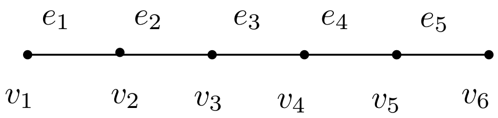
2.2　グラフと電線

グラフは色々なものに応用できます.

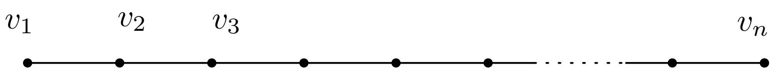
[*1] http://www.planarity.net/

たとえば、電柱と電線を考えてみよう．電柱を頂点、電線を辺とすればグラフができます.

6 本の電柱が直線上に立っている．電線は何本ありますか.



n 本の電柱が立っているとき，電線は何本あるでしょうか.



わからないときは、n が 1, 2, . . ., n と具体的に考えてよう.

電柱	1	2	3	4	5	. . .	n
電線						. . .	

では、ちょっと複雑になって図 2.2 の場合にはどうなりますか. (i) から (v) のグラフの電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください.

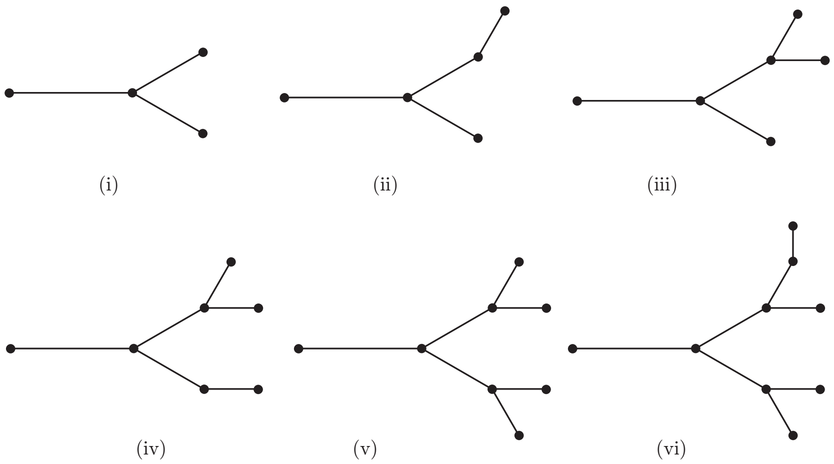


図 2.2　ちょっと複雑な電線

図 2.2	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
電柱						
電線						

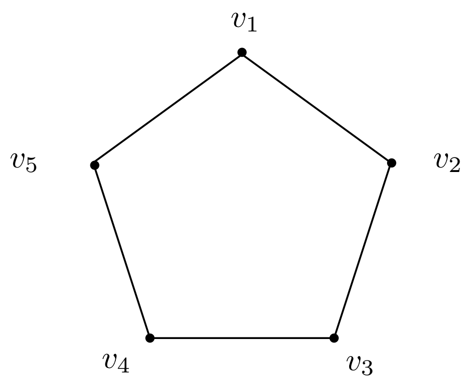
自分で図 2.2 の電線と電柱の例を拡張して電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．何か関係が見つかりませんか.

電柱	9	10	11	12	13	$\cdots$	n
電線						$\cdots$	

問題 電線の数と電柱の数の関係を求めて、なぜそうなるかを説明しなさい．また、その説明を友達などに見せてその説明を理解してくれるか確めてみなさい．理解できなければ、もっと良い説明になるようにしなさい.

2.3 輪のある電線

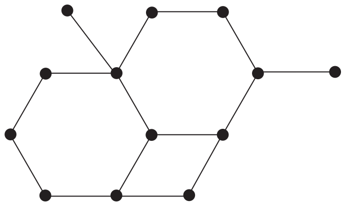
次の図のように輪になった電柱と電線の場合はどうなるでしょうか.



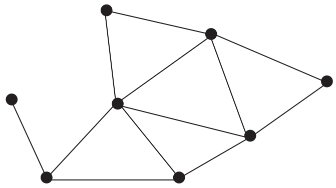
上の 5 本の電柱には電線は何本ありますか.

電柱が n 本のとき，電線は何本あるでしょうか．次の空欄を埋めてください.

電柱	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線					$\cdots$	



(A)



(B)

図 2.3　たくさんの電線

さらに、図 2.3 のように電柱と電線がありました．電柱と電線の関係はどうなるでしょうか．A と B の電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい．

	A	B
電柱		
電線		

この場合，電柱と電線の関係は他に条件が必要です．

レポート 1 どのような条件か考えましょう．ただし、考え方の一例を次の節でします．

レポート 2 好きな都道府県の国道からなるグラフを描け．国道を辺とみなして、いくつかの国道が交わっている点を頂点と考えよ．

名古屋地下鉄の路線図*2をグラフと考えて作成してみよ．ただし、すべての駅名を入れなくてよい．

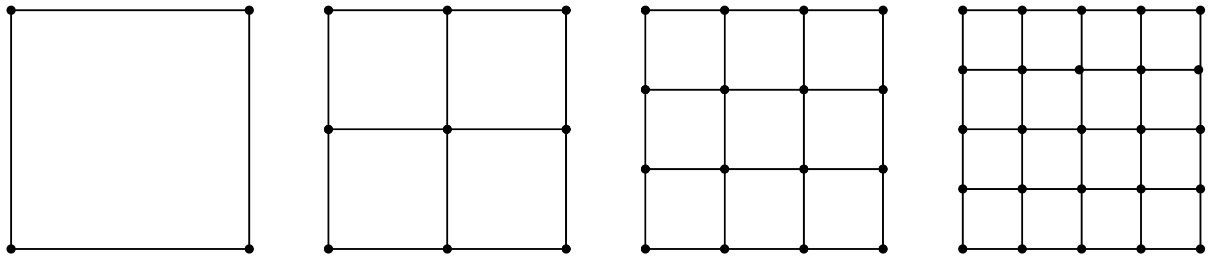
東京・パリ・ニューヨークなど、地下鉄が複雑に走っている都市の地下鉄の乗り換え図を作成してみよう．

2.4　さらに複雑な電線 (オイラーの公式を目指して)

前の節の最後で、複雑な電線を考えました．このような場合、どのように問題を考えていけば良いのかの一例を示すことにします．

初めに複雑なグラフを描いてもあまり手がかりは得られそうにありません．そこで、次の四角形からなるグラフで考えていきましょう．

*2 路線図は時刻表やインターネットで検索すれば出てきます．



(i) (ii) (iii) (iv)

図 2.4　正方形の電線

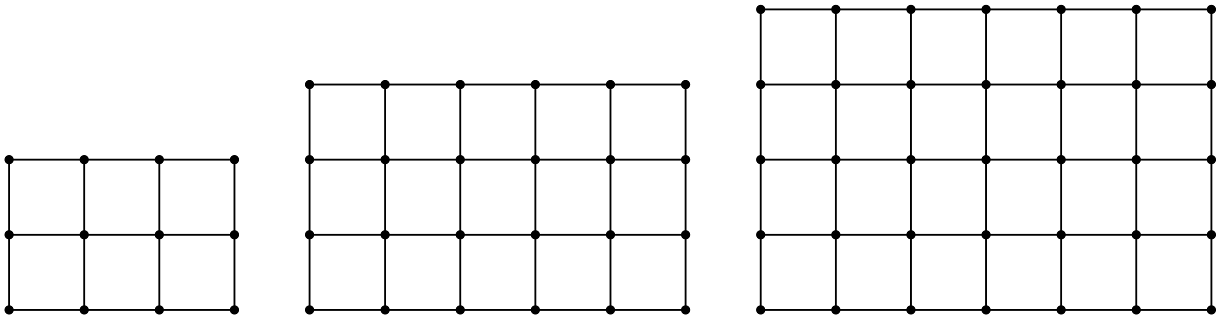
図 2.4 のグラフは格子状の形をしている正方形からなり正方形の一辺が 1 つ、2 つ、3 つと分割されています．各々のグラフで一番小さな正方形を最小の正方形ということにしよう．このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみよう．

グラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	$\cdots$
頂点数					$\cdots$
辺数					$\cdots$
面の数					$\cdots$

頂点数、辺数、面の数の間に関係がないだろうか．これらを足したり引いたり掛けたりして考えてほしい．

図 2.5 のグラフは最小の正方形の配置がちょっと複雑になったグラフです．このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形の数の間の関係はどのようになっていますか．また、縦に m 個、横に n 個最小の正方形が配置されているグラフを $m \times n$ のグラフということにする．$m \times n$ のグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみましょう．

図 2.5 のグラフ	(a)	(b)	(c)	$\cdots$	$m \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					

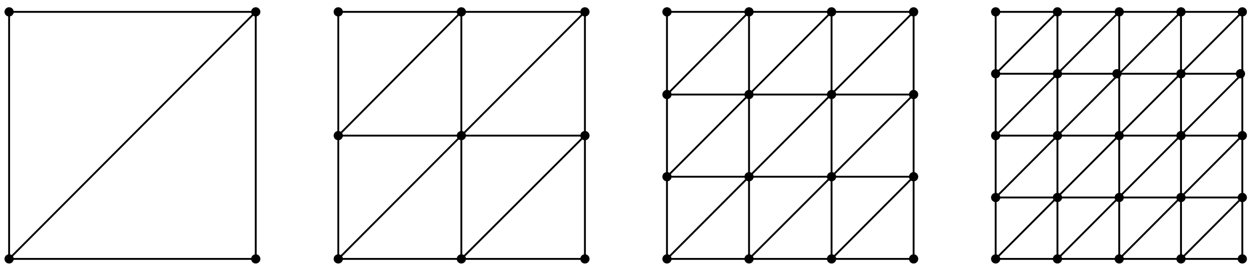


2 × 3 のグラフ　　3 × 5 のグラフ　　4 × 6 のグラフ

(a)　　(b)　　(c)

図 2.5　四角形の電線

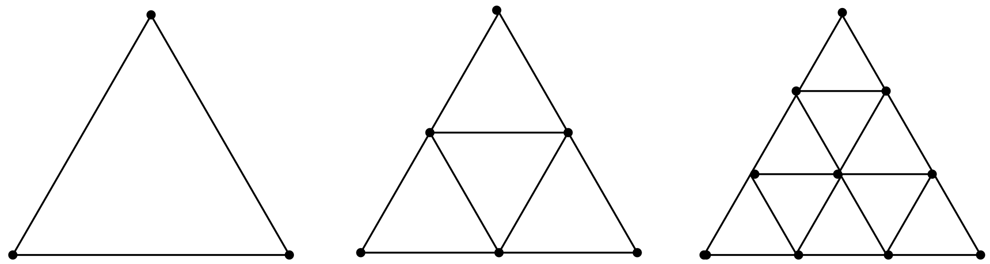
このグラフは図 2.6 図 2.7 ようにして 3 角形からなる複雑なグラフにすることができます．これらのグラフにも前と同じように $n \times n$ の (3 角形の) グラフと名前をつけて頂点数、辺数、最小の 3 角形で囲まれた面の数を求めてみましょう．



(i)　　(ii)　　(iii)　　(iv)

図 2.6　正方形の中の 3 角形の電線

図 2.6 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	$\cdots$	$n \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					



(i)　(ii)　(iii)

図 2.7　3 角形の中の 3 角形の電線

図 2.7 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	$\cdots$
頂点数				
辺数				
面の数				

正方形のときも 3 角形のときも頂点数 v、辺数 e、面の数 f の関係は (求めた関係が正しかったら) 同じ関係になっています．v、e、f の関係式を求めて、興味のある学生はなぜそうなるのか考えてください．この関係式がオイラー標数です.

2.5　向きの付いたグラフ

5 つのチーム a, b, c, d, e でリーグ戦（総当り戦）をした．その結果つぎの表のようになった.

	a	b	c	d	e
a		○	○	×	○
b	×		○	○	○
c	×	×		○	○
d	○	×	×		○
e	×	×	×	×	

これをグラフを使って表してみよう．図 2.8 のように矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね.

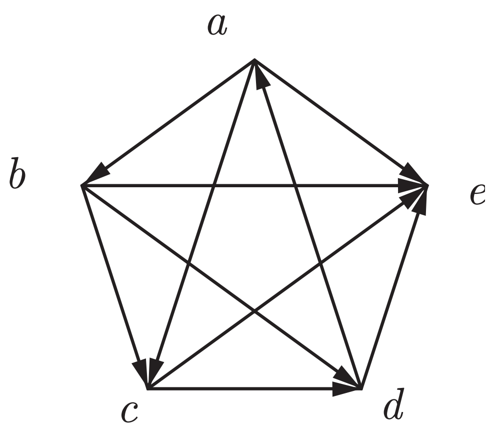


図 2.8　向きの付いたグラフ

この様に辺に向きをつけて考えることもあります.

問題 6 チーム A、B、C、D、E、F がリーグ戦（総当たり戦）をしました.

成績は A が四勝一敗、B が全勝、C が二勝三敗、D が三勝二敗でした. E は一度だけ勝っていますが、どのチームとの試合で勝ったのでしょうか.

この問題は、上のリーグ戦のグラフを使えば、簡単に解けます. 6 チームなので正 6 角形の各頂点に各チーム A、B、C、D、E、F を対応さよう.

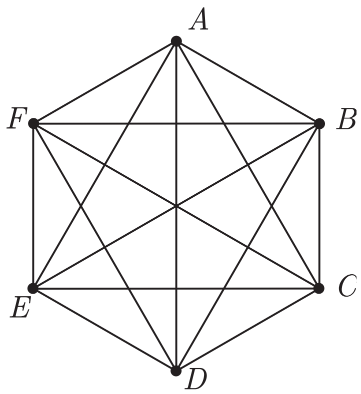


図 2.9　リーグ戦のグラフ

レポート 3 このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を考えよ.