極限の計算 2 **2014-05-23**

$\dfrac{0}{0}$	分数式では約分・無理式では有理化
$\dfrac{\infty}{\infty}$	分数式では分母の最高次の項で分母・分子を割る
$\infty-\infty$	無理式のとき有理化

❶ 無限大に発散

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty \qquad \lim_{x\to 0}-\frac{1}{x^2}=-\infty$$

注意 p. 4 のグラフ参照

練習 1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2}$

❷ $x\to\infty$ の場合

練習 2 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(1-x^3)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\cos\frac{1}{x}$

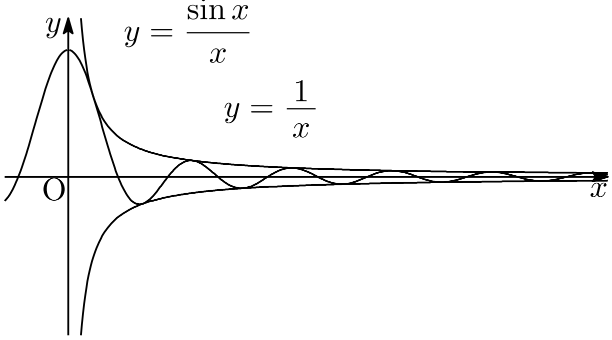
(4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^4+2x^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3+x^2+1}{x^4-x^3}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}$

はさみうちの原理 $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ で $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ ならば

$$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha.$$

上からと下から挟まれると極限が求まる.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \quad \text{を求めよ}$$



$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0$ より, $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ を使って極限を求める.

$x \to \infty$ より, $x > 0$ と考えてよい.

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ を x で割って ($x > 0$ より不等号の向きは変わらない)

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$x \to \infty$ のとき

$$-\frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

練習 3 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$ (2) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

右極限・左極限

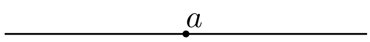
x が a に限りなく近づくとき

　a より小さい値をとりながら近づくとき　　$x \to a-0$

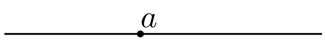
　a より大きい値をとりながら近づくとき　　$x \to a+0$

と表す.

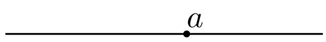
　$a=0$ のときには, $x \to -0$, $x \to 0$ と表す.



$x \to a$



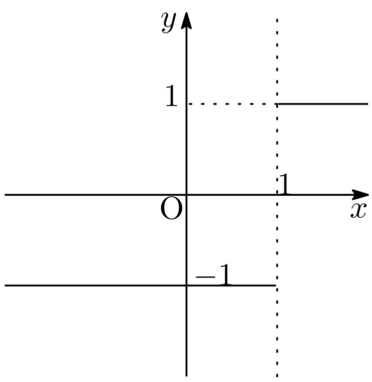
$x \to a+0$



$x \to a-0$

例題

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{|x-1|}$ と $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{|x-1|}$



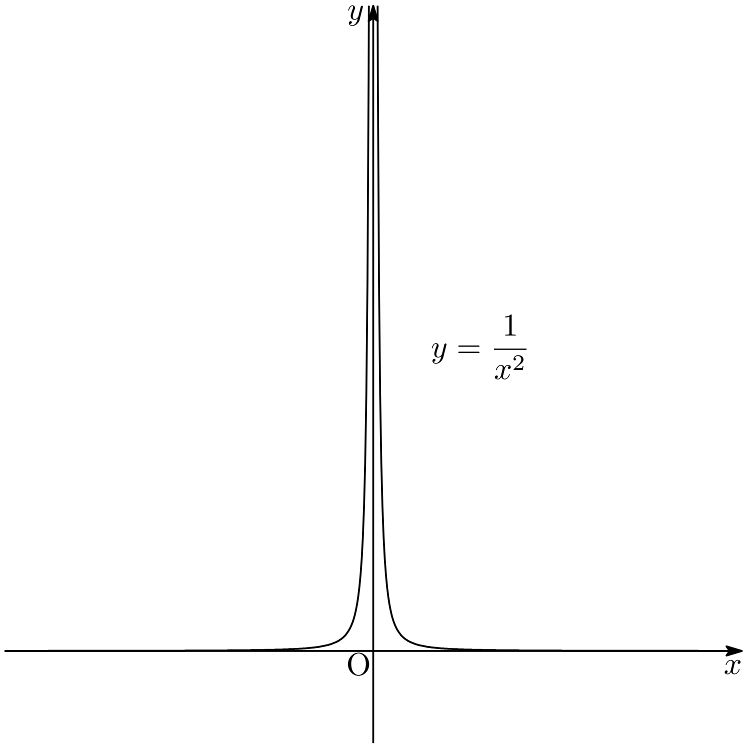
$$y = \frac{x-1}{|x-1|}$$

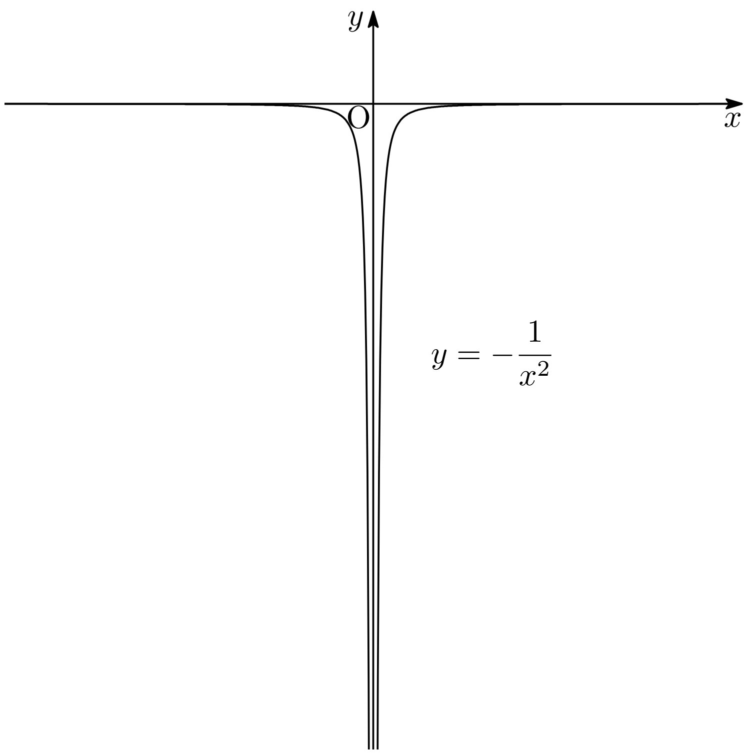
$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x-1}{|x-1|} =$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{|x-1|} =$$

練習問題 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -2+0} \frac{x+2}{|2x+4|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3}$

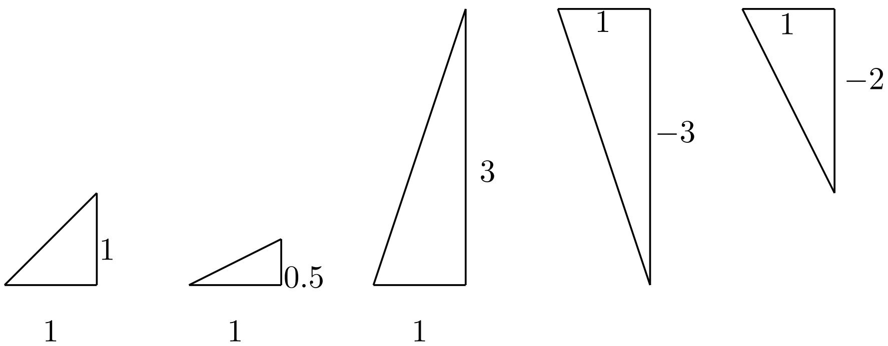

y
$y = \frac{1}{x^2}$
O
x


y
O
x
$y = -\frac{1}{x^2}$

5 導関数

❶微分とは

直線の傾きとは x 軸方向に 1 進む時の y 軸方向の増分 Δy である.



傾き 1　傾き 0.5　傾き 3　傾き -3　傾き -2

Q1. x 軸方向に 1.5 進んだ時の y の増分が 3 であるとき, 傾きはいくらか.

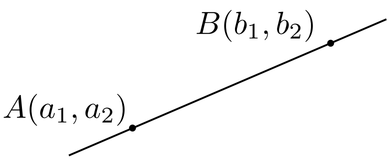
A.____________________

x の増分が Δx で y の増分が Δy のとき, 傾き m は

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

である.

Q2. $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ を通る直線の傾きを求めよ.



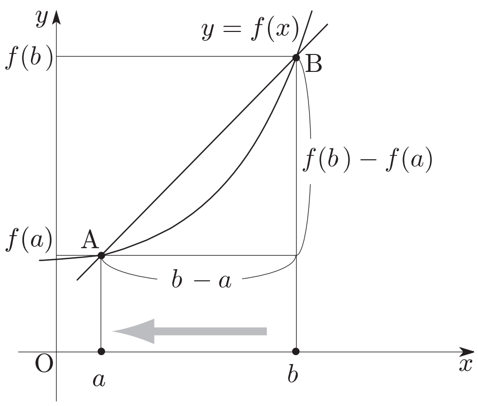
A.____________________

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a,f(a))$ の接線の傾き

曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ を通る直線の傾きは

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

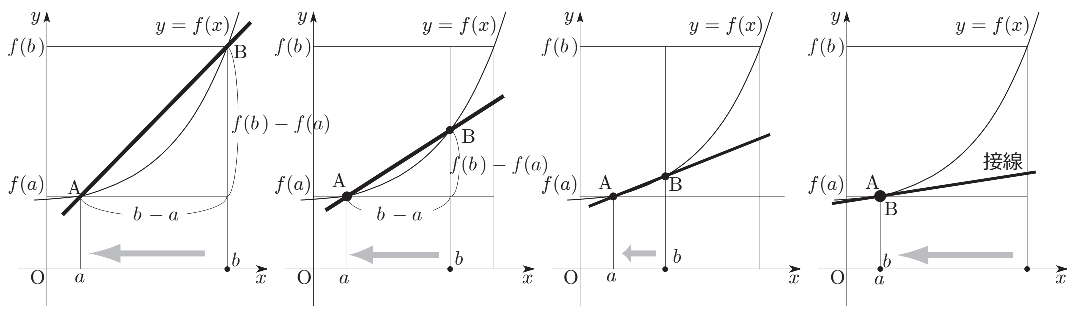
である.



$b \to a$ とすると, この傾きは曲線上の点 A での接線の傾きになる[*1]. 接線の傾きは

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる. この値を $y=f(x)$ の点 $x=a$ における <u>微分係数</u> という[*2].



☞ x の増分を強調して b の代わりに $a+h$ を使う時もある. この時, 接線の傾きは, h や Δx と Δy を使って,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{または} \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

となる.

[*1] $b=a$ とすると, 分母が 0 となり計算できないことに注意.

[*2] 接線の式の x の係数だから.

練習 1 曲線 $y = x^3$ に対して

(1) $x = 2$ での接線の傾きを求めよ.

(2) 点 x での接線の傾きを求めよ.

解答

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{b \to 2} \frac{b^3 - 2^3}{b - 2} &= \lim_{b \to 2} \frac{(b-2)(b^2 + 2b + 2^2)}{b - 2} \\ &= \lim_{b \to 2} (b^2 + 2b + 2^2) \\ &= 3 \cdot 2^2\end{aligned}$$

したがって, $y = x^3$ の点 $(2, 8)$ での接線の傾きは 12 である.

(2) $x = 2$ の代わりに x を使って計算すれば良い.

$$\begin{aligned}\lim_{b \to x} \frac{b^3 - x^3}{b - x} &= \lim_{b \to x} \frac{(b-x)(b^2 + xb + x^2)}{b - x} \\ &= \lim_{b \to x} (b^2 + xb + x^2) \\ &= 3 \cdot x^2\end{aligned}$$

(2) は点 x での接線の傾きが $3 \cdot x^2$ であることを表している. そこで, $f(x)$ の点 x に接線の傾きを対応させる. この関数を $f'(x)$ で表し, $f(x)$ の <u>導関数</u> という. 導関数を求めることを微分するという. 練習 1 では $f'(x) = 3x^2$ である. 導関数は接線の傾きを対応させていることに注意する.

導関数 $\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \left(\frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{などでも表す} \right)$

練習 2 曲線 $y = x^2$ に対して

(1) $x = 2$ での接線の傾きを求めよ.

(2) $x = a$ での接線の傾きを求めよ.

(3) 導関数を求めよ.

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad a: \text{実数} \qquad\qquad c' = 0 \quad c: \text{定数}$$

x の a 乗の導関数 (微分) は ax^{a-1} である. 定数を微分すると 0 になる. $y = c$ の傾きは 0 である.

公式 1　$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x)$　c は定数

$$(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = \boxed{}$$

公式 2　$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$((x^4 + 3x^2 + 1)(x^3 + 2))'$$
$$= \boxed{}$$
$$= \boxed{}$$

公式 3　$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \boxed{}$$
$$= \boxed{}$$

教科書 p. 60 例題 25 と練習問題 22 をやってみよう.