2014-05-16

クラス・番号：__________ **氏名**（ふりがな）：____________________

グラフを描こう

❶ $y = \mathrm{Sin}^{-1}x$

❷ $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$

❸ $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$

❹ $y = \log_2 x$

❺ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

極限の計算

❶ $\lim_{x \to a} f(x)$ において, $f(a)$ が決まる場合はこの値が極限値である[*1].

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 \quad (x = 3 \text{ を代入で OK})$$

❷ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$ の場合

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \text{ を求めよ.}$$

Step 1. $x = 2$ のとき分母 $x - 2 = 0$ より, 分子 $x^3 - 8$ の中にも $x - 2$ が隠れている.

分子を因数分解する.

$x^3 - a^3 = \boxed{}$ であるから,

$x^3 - 8 = \boxed{}$

Step 2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{}$

Step 3. $x - 2$ で約分して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x = 2$ を代入して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \boxed{}$

[*1] $f(x)$ が連続という条件が必要だが, 初めての授業なのであまり気にしないことにする

有理化【例題 20】(3)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $x-2=0$ より, 分子 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分子 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ より

$$\sqrt{x+7}-3= \boxed{}$$

Step 2. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\times\boxed{}\right)$$

Step 3. $x-2$ で約分して,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\boxed{}\cdots(1)$$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \text{ を求めよ.}$$

Step 1. $x=1$ のとき分母 $\sqrt{x+3}-2=0$ より, 分母 $\sqrt{x+3}-2$ の中にも $x-1$ が隠れている.

分母 $\sqrt{x+3}-2$ を有理化する.

Step 2. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$$= \lim_{x \to 1} \boxed{}$$

Step 3. $x-1$ で約分して, $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \to 1} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x=1$ を代入して, $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \boxed{}$

☞ 極限を求める問題で無理式があればまずは有理化をしてみる

次の無理式を有理化せよ.

(1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$ (2) $\sqrt{x^2+3}-5$ (3) $\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x+7}$

次の極限を求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2+x-12}$ (3) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}$

解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2+x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{x+4}=\frac{3}{7}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}=\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}\times\frac{(t+\sqrt{3t-2})\sqrt{t-2}}{(t+\sqrt{3t-2})\sqrt{t-2}}\right)=$
$\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{(t^2-(3t-2))\sqrt{t-2}}{(t-2)(t+\sqrt{3t-2})}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t-1)\sqrt{t-2}}{(t-2)(t+\sqrt{3t-2})}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-1)\sqrt{t-2}}{t+\sqrt{3t-2}}=0$

☞ 分子・分母に 0 となる因子を見つければよい．(1) は x, (2) は $x-3$, (3) は $t-2$ である．分子・分母ともに隠れているので注意すること．

☞ 無理式はまずは有理化

■ [無限大の場合] $x \to \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^5}\right)$ を求めよ.

Step 1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ は証明なしに使ってよい.

Step 2. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^5}\right)=1$

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+x+1}$ を求めよ.

Step 1. 分母の x で指数が一番大きい物に注目する. 今は 2 より, 分子・分母を x^2 で割る.

Step 2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+x+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+2x)\times\frac{1}{x^2}}{(x^2+x+1)\times\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\\
&= \frac{3}{1}\\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})\text{ を求めよ.}$$

Step 1. 無理式で $(\infty-\infty)$ の場合は有理化を行う.

$$x-\sqrt{x^2+2x}=(x-\sqrt{x^2+2x})\times\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$=\boxed{}$$

Step 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})=\lim_{x\to+\infty}\boxed{}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\boxed{}=\boxed{}$$

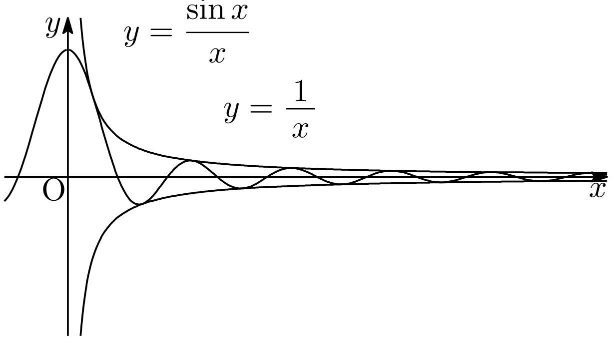
はさみうちの原理

$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ で $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ ならば

$$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha.$$

上からと下から挟まれると極限が求まる.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \text{を求めよ}$$



$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ の値は直接計算するのは大変である.

しかし, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$ より, $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ を使って極限を求めよう.

$x \to \infty$ より, $x > 0$ と考えてよい.

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ を x で割って ($x > 0$ より不等号の向きは変わらない)

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$x \to \infty$ のとき

$$-\frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

よって, はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

練習 3 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$