極限の計算 2 **2013-05-31**

$\dfrac{0}{0}$	分数式では約分・無理式では有理化
$\dfrac{\infty}{\infty}$	分数式では分母の最高次の項で分母・分子を割る
$\infty-\infty$	無理式では有理化

❶ 無限大に発散

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty \quad \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$

注意 $x=\pm 1, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \ldots$ として $\frac{1}{x^2}$ の値を計算してみること.

練習 1 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ (2) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2}$

❷ $x\to\infty$ の場合

練習 2 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}$ (2) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty}(1-x^3)$ (3) $\displaystyle \lim_{x\to \infty}\cos\frac{1}{x}$

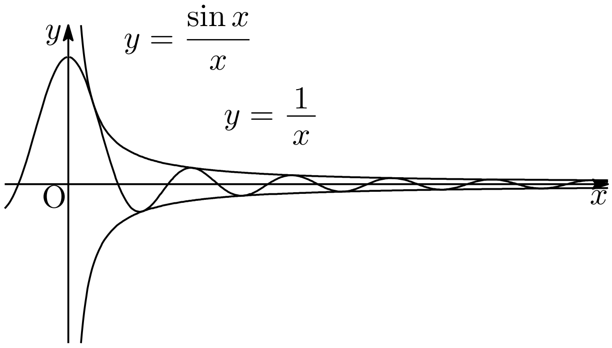
(4) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^4+2x^2}$ (5) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3+x^2+1}{x^4-x^3}$ (6) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}$

はさみうちの原理 $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ で $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ ならば

$$\lim_{x\to a} h(x) = \alpha.$$

上からと下から挟まれると極限が求まる.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \text{を求めよ}$$



$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ の値は直接計算するのは大変である.

しかし, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$ より, $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ を使って極限を求めよう.

$x \to \infty$ より, $x > 0$ と考えてよい.

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ を x で割って ($x > 0$ より不等号の向きは変わらない)

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$x \to \infty$ のとき

$$-\frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

よって, はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

練習 3 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

右極限・左極限

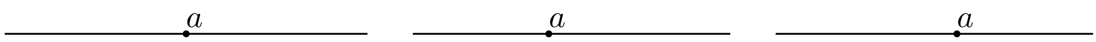
x が a に限りなく近づくとき

　a より小さい値をとりながら近づくとき　　$x \to a-0$

　a より大きい値をとりながら近づくとき　　$x \to a+0$

と表す.

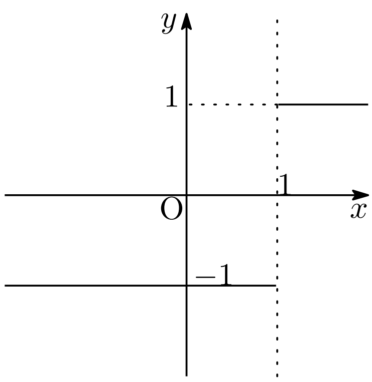
　$a=0$ のときには, $x \to -0$, $x \to 0$ と表す.



$x \to a$　　　　$x \to a+0$　　　　$x \to a-0$

例題

$\displaystyle \lim_{x \to 1+0} \frac{x-1}{|x-1|}$ と $\displaystyle \lim_{x \to 1-0} \frac{x-1}{|x-1|}$



$$y = \frac{x-1}{|x-1|}$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x-1}{|x-1|} = \boxed{\qquad\qquad}$$

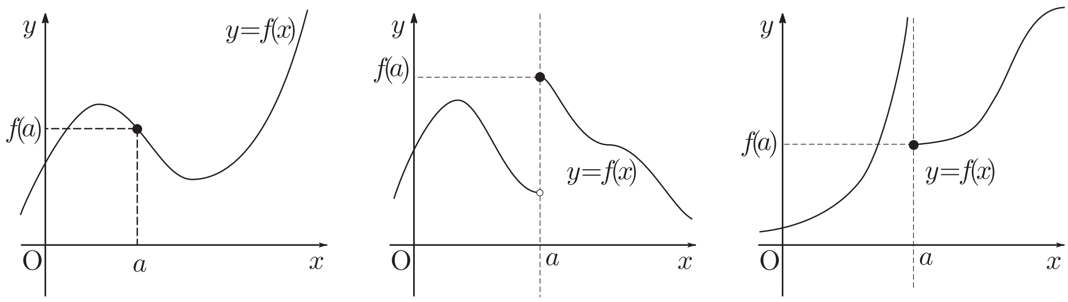
$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x-1}{|x-1|} = \boxed{\qquad\qquad}$$

練習問題 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{x \to -2+0} \frac{x+2}{|2x+4|}$　　(2) $\displaystyle \lim_{x \to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3}$

連続

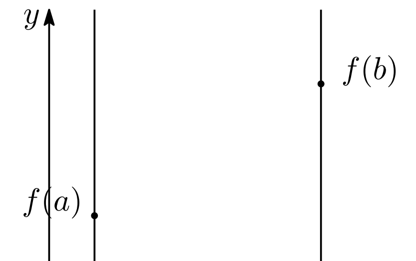
一番左のグラフは $x = a$ で連続であり, 残りのグラフは $x = a$ で連続でない.



1. $x = a$ **で連続**　$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるとき $f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという.
2. **区間で連続**　ある区間のすべての点で $f(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ はその区間で連続であるという.

薬学部では上のように繋がっていれば連続, 繋がっていなければ連続でない (不連続) と考えても良い.

最大値・最小値 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は最大値 M と最小値 m を持つ.



中間値の定理 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ の最大値 M と最小値 m の中間の値 k $(m < k < M)$ に対して, $f(c) = k$ となる c $(a < c < b)$ が存在する.

中間値の定理を使うと関数の解の存在等が示せるが, C クラスでは省略する.