極限の計算 **2013-05-24**

❶ $\lim_{x \to a} f(x)$ において, $f(a)$ が決まる場合はこの値が極限値である[*1].

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 \quad (x = 3 \text{ を代入で OK})$$

❷ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$ の場合

$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ を求めよ.}}$$

Step 1. $x = 2$ のとき分母 $x - 2 = 0$ より, 分子 $x^2 - 4$ の中にも $x - 2$ が隠れている.

分子を因数分解すると $x^2 - 4 = \boxed{}$

Step 2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{}$

Step 3. $x - 2$ で約分して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x = 2$ を代入して, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \boxed{}$

注意

$x \neq 2$ で x が 2 に近づくと $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ の値は 4 になる.

$\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, ただし $x \neq 2$ となる.

$\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ と $x + 2$ の違いは**定義域**に $x = 2$ が含まれるか含まれないかである.

---

*1 $f(x)$ が連続という条件が必要だが, 初めての授業なのであまり気にしないことにする

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $x-2=0$ より, 分子 x^3-8 の中にも $x-2$ が隠れている.

分子を因数分解する.

$x^3 - a^3 = \boxed{}$ であるから,

$x^3 - 8 = \boxed{}$

Step 2. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \boxed{}$

Step 3. $x-2$ で約分して, $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \boxed{}$

計算用紙

有理化

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \text{ を求めよ.}$$

Step 1. $x=2$ のとき分母 $x-2=0$ より, 分子 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分子 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ より

$\sqrt{x+7}-3=$ $\boxed{}$

Step 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} \times \boxed{} \right)$

Step 3. $x-2$ で約分して,

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \boxed{} \cdots (1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して,

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \boxed{}$$

計算用紙

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ を求めよ.

Step 1. $x=2$ のとき分母 $\sqrt{x+7}-3=0$ より, 分母 $\sqrt{x+7}-3$ の中にも $x-2$ が隠れている.

分母 $\sqrt{x+7}-3$ を有理化する.

$\sqrt{x+7}-3=$ $\boxed{}$

Step 2. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x\to 2}$ $\boxed{}$

Step 3. $x-2$ で約分して, $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}$ $\boxed{}$ $\cdots(1)$

Step 4. (1) に $x=2$ を代入して, $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} =$ $\boxed{}$

☞ 極限を求める問題で無理式があればまずは有理化をしてみる

次の無理式を有理化せよ.

(1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$ (2) $\sqrt{x^2+3}-5$ (3) $\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x+7}$

(4) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x^2+1}$

(4) は $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ に注意

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} \text{ を求めよ.}$$

Step 1. $t=1$ のとき分子・分母ともに 0 になるので, 分子・分母に $t-1$ が隠れている.

分子・分母を因数分解する.

$t^2+4t-5 = \boxed{}$ $2t^2+t-3 = \boxed{}$

Step 2. $\displaystyle \lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \lim_{t \to 1} \boxed{}$

Step 3. 約分して $\displaystyle \lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \lim_{t \to 1} \boxed{} \cdots (1)$

(1) に $t=1$ を代入して, $\displaystyle \lim_{t \to 1} \frac{t^2+4t-5}{2t^2+t-3} = \boxed{}$

計算用紙

次の極限を求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2+x-12}$ (3) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}$

解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2+x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{x+4}=\frac{3}{7}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}=\lim_{t\to 2}\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}=\lim_{t\to 2}\left(\frac{t-\sqrt{3t-2}}{\sqrt{t-2}}\times\frac{(t+\sqrt{3t-2})\sqrt{t-2}}{(t+\sqrt{3t-2})\sqrt{t-2}}\right)=$

$\displaystyle\lim_{t\to 2}\frac{(t^2-(3t-2))\sqrt{t-2}}{(t-2)(t+\sqrt{3t-2})}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t-1)\sqrt{t-2}}{(t-2)(t+\sqrt{3t-2})}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-1)\sqrt{t-2}}{t+\sqrt{3t-2}}=0$

☞ 分子・分母に 0 となる因子を見つければよい. (1) は x, (2) は $x-3$, (3) は $t-2$ である. 分子・分母ともに隠れているので注意すること.

☞ 無理式はまずは有理化

■ [無限大の場合] $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ を求めよ.

x	1	10	100	1,000	10,000	100,000	$\cdots$	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$								

したがって, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \boxed{}$

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^5}\right)$ を求めよ.

Step 1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0\ (n=1,2,3,\ldots)$ は証明なしに使ってよい.

Step 2. したがって, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^5}\right)=1$

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+x+1}$ を求めよ.

Step 1. 分子・分母の x で指数が一番大きい物に注目する. 今は 2 より, 分子・分母を x^2 で割る.

Step 2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+2x)\times\frac{1}{x^2}}{(x^2+x+1)\times\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$$

分子・分母ともに無限大になる場合である. $x\to\infty$ のとき, x^2 と x を比べると, x の値はほぼ無視できるはど小さくなる. $3x^2+2x \fallingdotseq 3x^3$, $x^2+x+1 \fallingdotseq x^2$ と考える事ができる.

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$$ を求めよ.

Step 1. 無理式で $(\infty - \infty)$ の場合は有理化を行う.

$$x - \sqrt{x^2 + 2x} = (x - \sqrt{x^2 + 2x}) \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$= \boxed{}$$

Step 2.

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \to +\infty} \boxed{}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \boxed{} = \boxed{}$$

計算用紙