

置換積分の計算

括弧の部分を t とおいて置換してみる.

【例題 53】

$$(1) \int (2x + 3)^5 dx$$

括弧の部分を t とおく.

$$t = \boxed{} \quad \dots \quad (1)$$

x で微分する (t で微分する方が楽ならば t で微分する)

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dx = \boxed{} dt \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int (2x + 3)^5 dx &= \int \boxed{}^5 \boxed{} dt \\ &= \int \boxed{}^5 \boxed{} dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

$$(2) \int \sin(3x - 7) dx$$

括弧の部分を t とおく.

$$t = \boxed{} \quad \dots \quad (1)$$

x で微分する (t で微分する方が楽ならば t で微分する)

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dx = \boxed{} dt \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int \sin(3x - 7) dx &= \int \sin \boxed{} \quad \boxed{} dt \\ &= \int \sin \boxed{} \quad \boxed{} dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

練習問題 46 (4) (5) は括弧がないが, $\sqrt{5x - 1} = (5x - 1)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{7x - 3} = (7x - 3)^{\frac{1}{5}}$ と変形すればよい.

【例題 54】

$$(1) \int \sin^2 x \cos x dx$$

$t = \sin x \dots (1)$ とおく. この置換は経験が必要である.

x で微分する (t で微分する方が楽ならば t で微分する)

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dt = \boxed{} dx \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int \boxed{}^2 \boxed{} \\ &= \int \boxed{}^2 dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

【練習問題】 $\int \cos^5 x \sin x dx$

$t = \cos x \dots (1)$ とおく. この置換は経験が必要である.

x で微分する (t で微分する方が楽ならば t で微分する)

$$\frac{dt}{dx} = \boxed{} \quad \text{よって,} \quad dt = \boxed{} dx \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin x dx &= \int \boxed{}^5 \boxed{} \\ &= \int \boxed{}^5 (-1) dt \\ &= \boxed{} \quad (1) \text{ を代入} \\ &= \boxed{} + C \end{aligned}$$

$\sin x dx, \cos x dx, e^x dx$ などの場合に使う.

【置換積分を使った公式 1】

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

$F'(ax + b)$ を $t = ax + b$ で合成関数の微分法を行うと $af(ax + b)$ と a が現れる。
したがって、積分を行うと逆に $\frac{1}{a}$ が現れる。

(1) $\int \sin(2x + 3) dx$

$$\int \sin x dx = -\cos x \text{ より}$$

$$\int \sin(2x + 3) dx = \frac{1}{\boxed{\quad}} \times (-1) \cos \left(\boxed{\quad} \right)$$

(2) $\int \cos(5x - 2) dx$

$$\int \cos x dx = \boxed{\quad} \text{ より}$$

$$\int \cos(5x - 2) dx = \frac{1}{\boxed{\quad}} \times \boxed{\quad}$$

以下の問題を同様にして解け。

(3) $\int (2x - 3)^7 dx$ (4) $\int \sqrt{3x + 4} dx$ (5) $\int (3x + 2)^{\frac{2}{3}} dx$