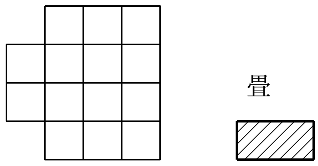
4　畳を敷きましょう

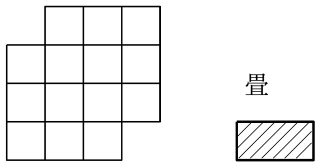
4.1　7 畳敷

問題 1 下図のような 7 畳の部屋があった．ここに畳を敷き詰めたい．畳を敷いてください．

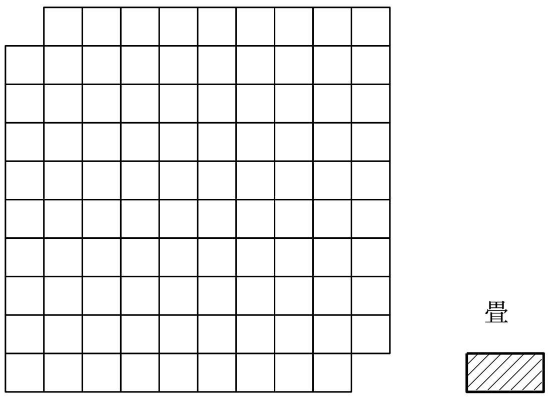


簡単に畳を敷くことができましたね.

問題 2 下図のような 7 畳の部屋があった．ここに畳敷き詰めたい．畳を敷いてください．



問題 3 もう少し複雑にして次の部屋に畳を敷き詰める事ができるでしょうか.



問題 2 も問題 3 もどちらも畳を敷き詰める事ができません.

畳を敷き詰める事ができる事の証明は, 実際に敷き詰めればよいのですが, できない場合は, **どのような敷き詰め方をしても不可能だ**ということを示さないといけません.

問題 2 の部屋では畳を敷き詰める事がなぜできないのかを考えましょう.

【7 畳敷きの部屋の普通の解法】

いきなり, 部屋の真中に畳を敷くのは良くありません．なぜなら, 畳を縦向きと横向きに敷くことができるので, 2 通りの方法を考えないといけなくなり, 敷き方の場合わけが大変になります．左下の角から敷き始めよう．部屋の対称性から, 図 4.1 の様に, 畳の置き方は 1 通りしかありません．そこに畳を置いてみましょう.

次にどこに畳を敷くのが良いでしょうか. X で示した所は畳の置き方が 1 つしかありません. そこに畳を置くと, また, 置き方が 1 つしかない場所が出てきます.

この操作を順次行っていきます. すると, 図 4.1 の最後のグラフのように, 最後のところで 1 畳分が半畳 2 枚に別れてしまうので敷く事ができません.

7 畳の場合は最初に畳を敷く場所をうまく選べば, 簡単な議論で畳を敷き詰める事ができない事を示せます.

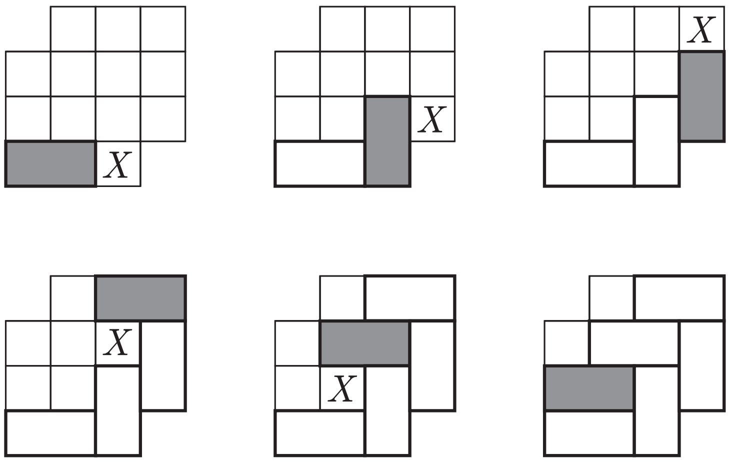


図 4.1　7 畳敷きの答え

では, **問題 3** の大きな部屋で同じことを考えるとどうなりますか. 7 畳の時のようにはできません. 同じように, 左下の角に畳を置いても, 2 番目に置く畳の位置が, 1 つに決まらないので場合わけが多くて証明する事は大変です.

新しい考え方 図 4.2 のように白と黒で市松模様に塗ってみよう.

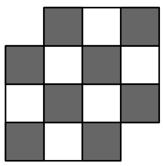


図 4.2　7 畳の部屋に色を塗る

この色の塗られた部屋で畳の問題を考えてみます.

問題 図 4.2 の部屋に畳を敷き詰める事はできるでしょうか？

ぜんぜん問題が変わっていないと思うかもしれません. しかし, 色を塗ったことで畳を敷き詰める事ができるかどうかすぐにわかります.

この部屋に 1 枚の畳をどのように敷いても,  のようになり黒と白を 1 つずつ覆います. すると**畳を敷き詰めることができたとすると白と黒の数は同じでないといけません**.

対偶をとると, **白と黒の個数が異なれば, 畳を敷くことができない**ことがわかります. この部屋は黒が 8 個・白が 6 個なので畳を敷くことができない事がわかりました. 考え方を変えることで簡単に示す事ができる場合

があります.

練習 図 4.3 の部屋に畳を敷き詰める事ができない事を同じようにして示してください. (色々なアイデアを出すためにグラフを 3 個用意してあります.)

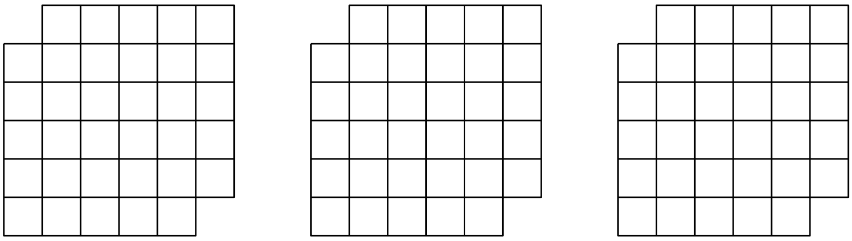


図 4.3　畳敷きの答え

できない理由を自分の言葉でわかりやすくノートに書きましょう. **この記録を残す作業は大事にしましょう**.

問題 3 はどのようにすれば解けるかもうわかったと思います.

4.2　畳敷きの更なる拡張

【1 × 4 問題】図 4.4 のグラフを 1×4 のタイルで敷き詰める事は出来るでしょうか？

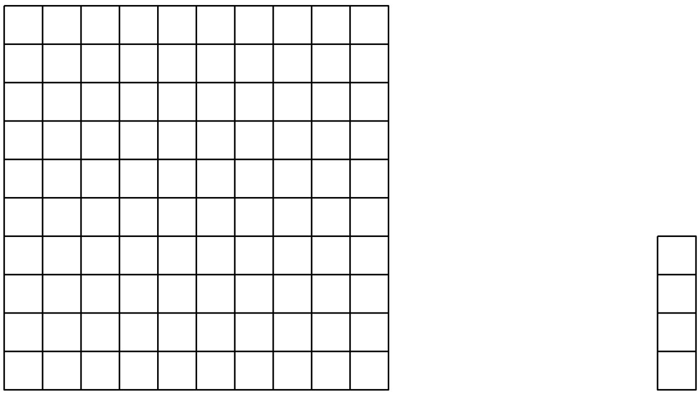


図 4.4　1×4 のタイルで敷き詰めて

図 4.5 にグラフを用意しておいたので, できるかどうか考えましょう.

この問題もタイルを敷き詰めつことはできません. できないことを示すために, 図 4.6 のグラフを図 4.2 のように白と黒で市松模様に塗ってみましょう.

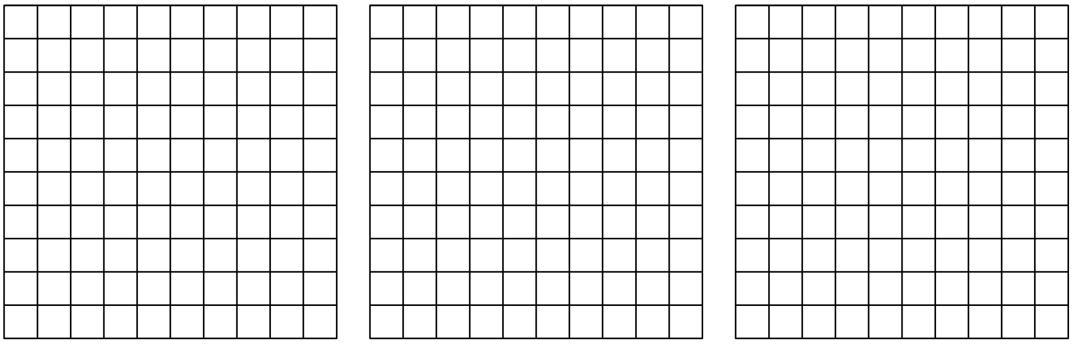


図 4.5　1×4 のタイルで敷き詰めて, 練習用

グラフを市松模様に塗ると, 1×4 のタイルはどのように置いても白と黒を各々 2 枚覆います, 白と黒の個数が異なれば, 敷き詰める事ができません. そこで, 色を塗ったグラフの白と黒の個数を数えると, 残念ながらともに 50 個になるのでこの方法では駄目でした.

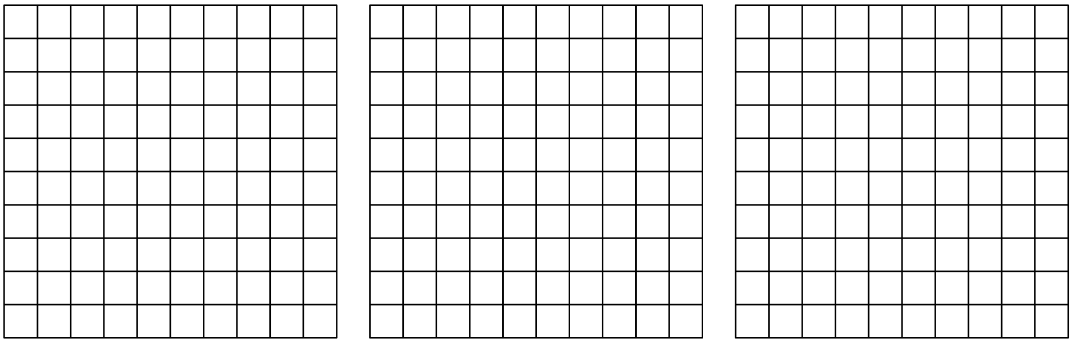


図 4.6　タイルを白黒で塗って

しかし, 7 畳の部屋の問題で考えたように, 考え方を工夫すれば, 問題が解けることがあります. 色の塗り方を変えてみましょう.

図 4.6 のグラフの塗り方を変えて不可能だと示そう.

本当は, 解答を見ずに考えるのが一番良い方法だと思うのですが, 大学入学して 1 年目なので, 解法の 1 つを次で示します. これ以外に良い解答がある可能性があるので考えてください. たまに, 僕の考えている解答よりもいいのを考えてレポートにしてくれる学生がいます.

【1×4 問題】の解法

図 4.7 のように白と黒に塗ります. この場合も, 1×4 のタイルをどのように置いても白 2 枚と黒 2 枚を覆う事がわかります. したがって, 敷き詰めることができれば白と黒の個数は同数です.

図 4.7 の白と黒の数を数えてみましょう. 白 48 個・黒 52 個になりました. 白と黒の個数が異なるので敷き詰めることはできません.

レポート 6 [**1×4** 問題] を別の塗り方で解け.

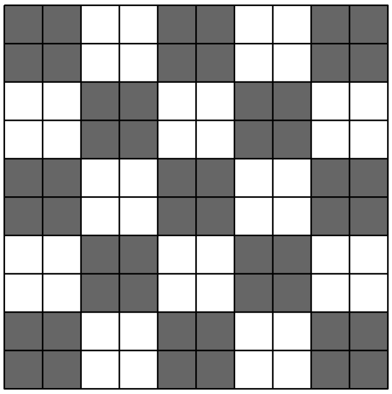


図 4.7　1×4 のタイルを白黒に塗って

拡張された問題 図 4.8 を 1×3 のタイルで敷き詰める事が出来ますか？

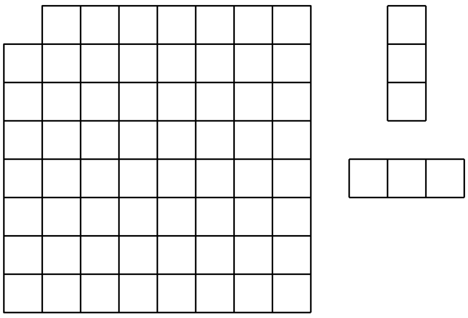


図 4.8　1×3 のタイルで敷き詰めて

図 4.9 のグラフで, 敷き詰める事ができるかどうか実験してみなさい.

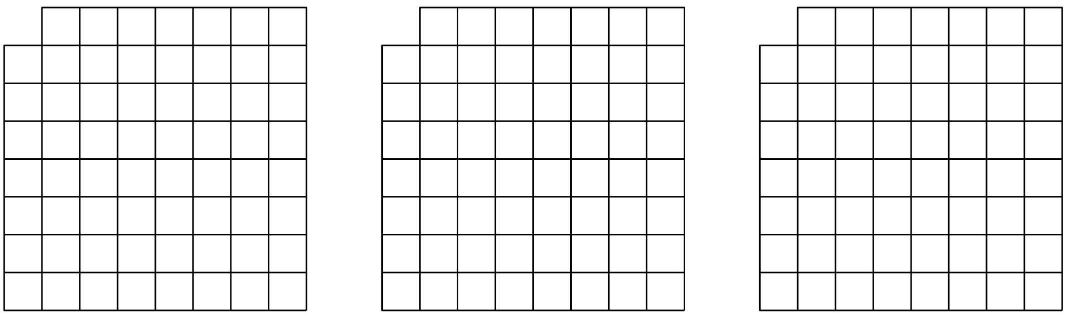


図 4.9　1×3 のタイルで敷き詰めて (実験用)

実際にタイルを敷くと, 不可能だとわかります.

前の問題では白と黒の色の塗り方を変えました. しかし, 1×3 のタイルなので, 白と黒の個数で考えてもうまくいきそうにありません[*1].

[*1] 白と黒の色塗りではこの問題は解けないと思っていました. しかし, 山形大学の授業で白と黒の色塗りで解答した学生がいました. 非常に上手な方法でした. その解法をこの章の最後に載せておきます.

レポート 7 p.29 の [拡張された問題] を解け.

ヒント この問題ではタイルの枚数が多いので, 少ない場合を考えて見ます. 図 4.10 の太い線で囲まれたところに 1×3 のタイルを敷き詰めたい. できるだろうか？ 1×3 のタイルなので白と黒の 2 色で塗ってもうまくいきません. そこで, 色の数を増やして 3 色にして塗ってみました.

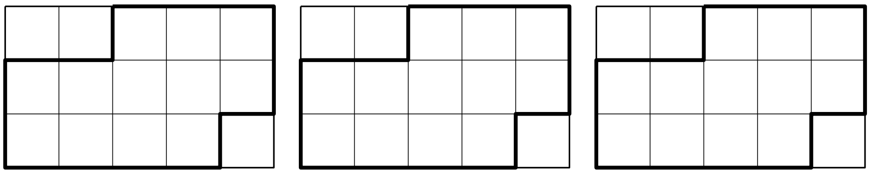


図 4.10　1×3 のタイルで敷き詰めて (ヒント)

図 4.11 がその図です. そこで, 各々の色の個数を数えると…

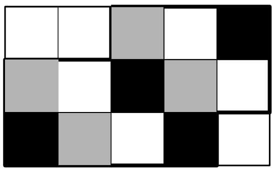


図 4.11　1×3 のタイルで敷き詰めて (三色塗り)

4.3　すべての頂点をまわって

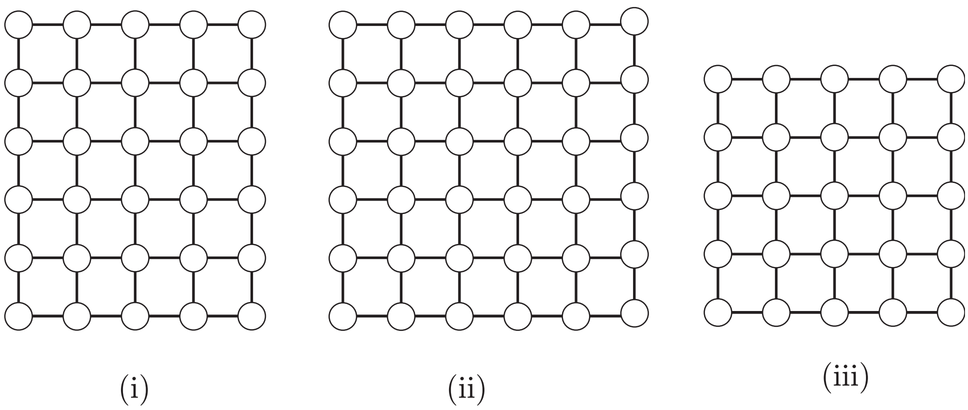
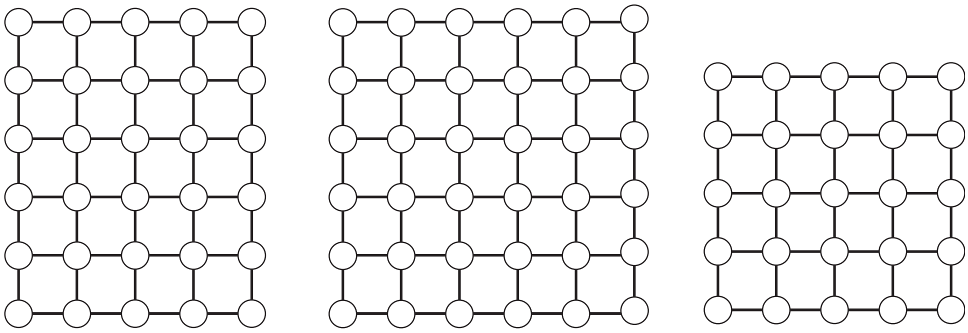


図 4.12　頂点をまわって

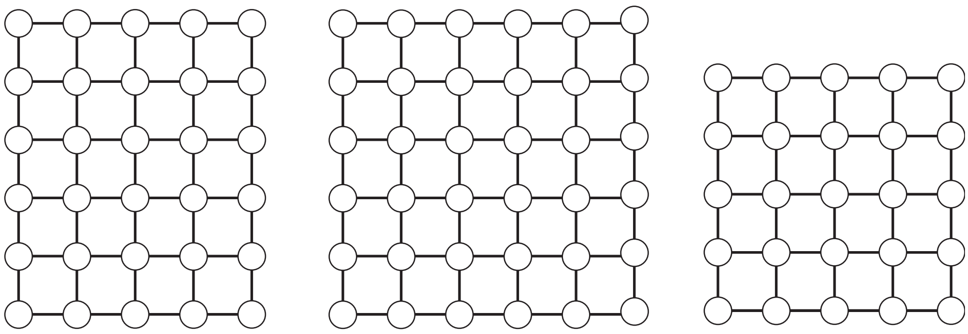
問題 ある頂点から出発して, 辺に沿って移動してすべての頂点を 1 度だけ通ってもとの頂点に戻ってくることを考える. ただし, 通らない辺があってもかまいません. 図 4.12 の 3 つのグラフで可能かどうか考えてください.

【実験】図 4.13 のグラフで実験しよう.

不可能なグラフはどれですか. また, なぜ不可能なのかの理由を考えましょう. ただし, 「頂点の個数が奇数の時, 不可能」というのは理由になりません. 奇数の時, なぜ不可能かの理由を示す必要があります.



(i) (ii) (iii)



(i) (ii) (iii)

図 4.13　頂点をまわって (練習用)

ヒント 畳の問題と同じように今度は頂点に色を塗ってみましょう.

この問題も頂点を白と黒で塗ることにより, 解くことができます.

図 4.14 のように, 頂点を白と黒で塗ります. 注意してほしいのは辺でつながっている 2 つの頂点の色は異なっている事です. 出発する頂点はどこでも良いので, X から出発する事にします. X の黒で塗られているので, 辺でつながっている頂点はすべて白色です. すると, 辺に沿って進むと, 頂点の色は黒と白が交互に出てくることになります.

問題の条件から, もとの頂点に戻ってくるので, 色を見れば, $X =$ 黒 $\Rightarrow$ 白 $\Rightarrow$ 黒 $\Rightarrow$ 白 $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ 白 $\Rightarrow$ 黒 $= X$ となります. 両端点は X であることに注意すれば, 黒と白の個数は等しくなります. したがって, 頂点の個数は黒と白の個数の合計になるので, 偶数になります.

よって, 「もとの頂点に戻ってくる事ができる」ならば「頂点の個数は偶数」という事がわかりました.
すなわち, 「頂点の個数が奇数」ならば「戻ってくる事ができない」事がわかります.
今回は, 頂点の個数が偶数の時にはもとの頂点に戻ってくる事ができます. 頂点の個数が偶数であっても, もとに戻ってくることのできないグラフもあります.
一筆書きはすべての辺を 1 度だけ通ることができるかという問題でした. そして, 一筆書きの場合にはどのグラフが一筆書き可能かまた一筆書きの仕方もわかっていました. ここでは, すべての頂点を 1 度だけ通って

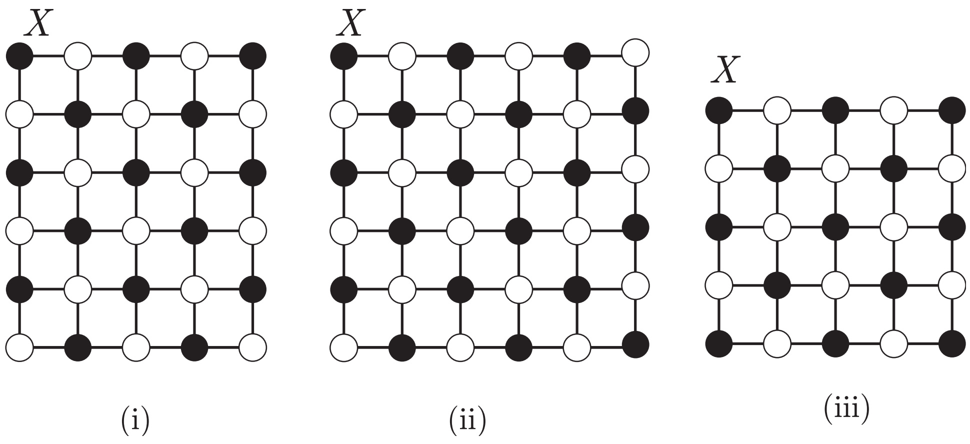


図 4.14　頂点をまわって (解答)

戻ってくる事ができるグラフは, どのようなグラフかという問題です. 残念ながら, どのようなグラフが可能かという完全な答えはまだ見つかっていません. さらに, 始点と終点が異なる場合を考える事もあります.

4.4　博物館見学

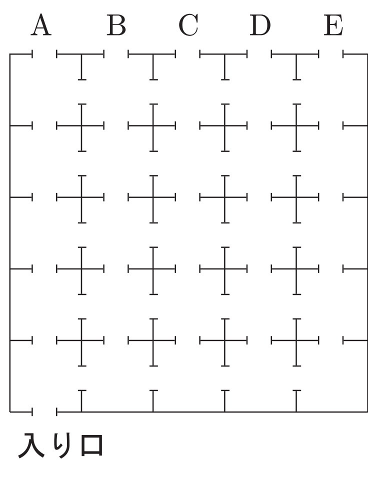


図 4.15　博物館

図 4.15 のような博物館がありました. 入り口は固定されているのですが, 出口は A, B, C, D, E の 5 箇所あります.

問題 入り口から入りすべての部屋を 1 度だけ通って出口 A から出る道順を求めよ. また, そのような道順を 3 つ以上見つけよ. ただし, 一度出口から出ると戻ることはできません.

レポート 8 この博物館では, 出口によって可能なものと不可能なものがあります. 可能な出口はその道順を示して, 不可能な出口にはなぜ不可能かを示しなさい.

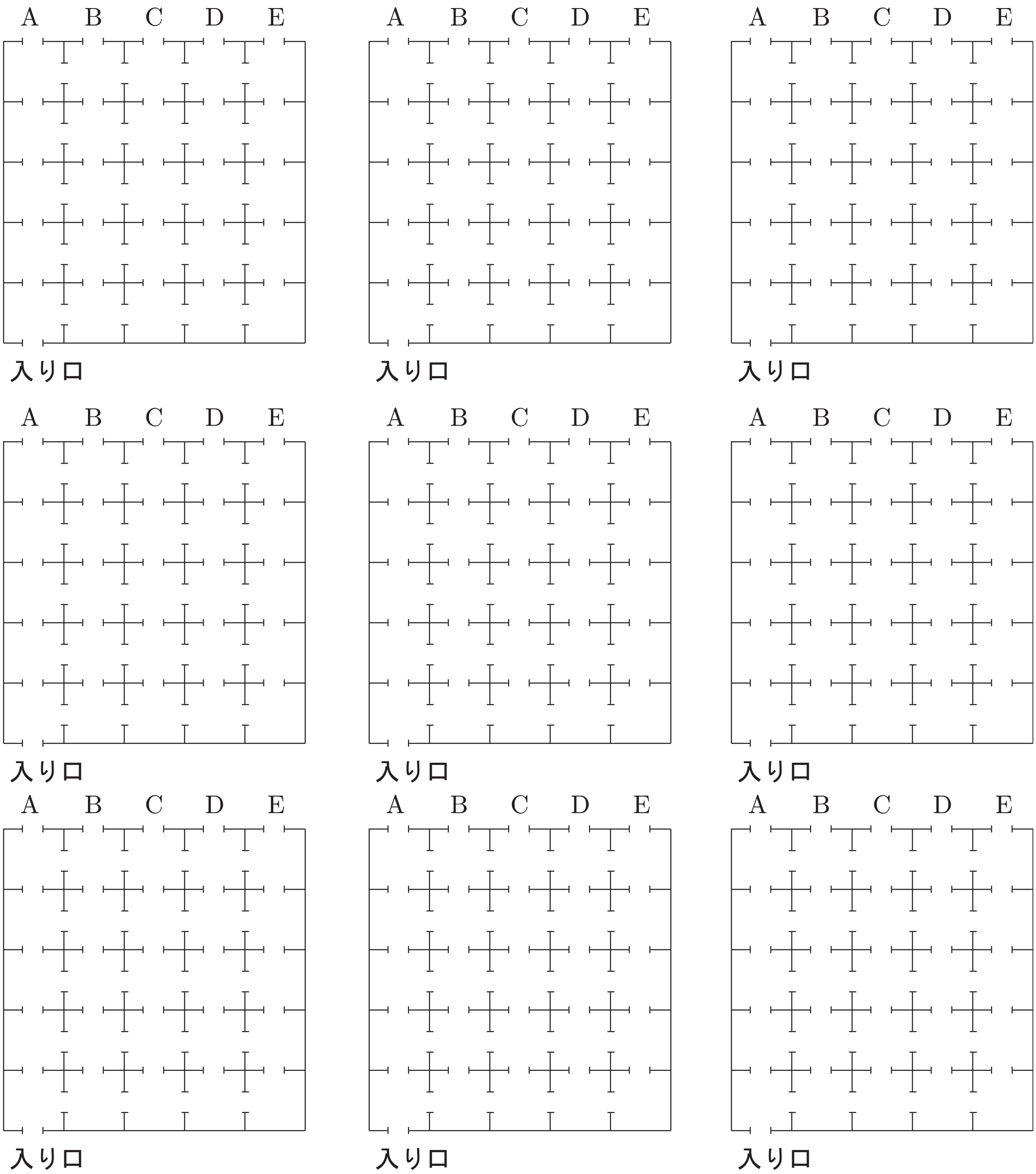

A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口
A B C D E
入り口

図 4.16　博物館 (練習用)

p.29 の [拡張された問題] の別解.

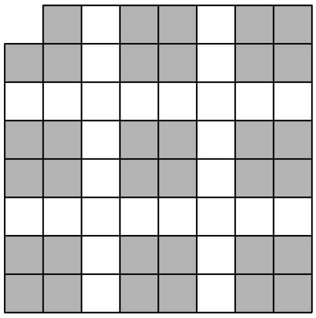


図 4.17　1×3 のタイルで敷き詰めて

図 4.17 のように白と黒でグラフに色を塗ります. すると, どのようにタイルを並べてもタイルは白を 1 個か 3 個, 黒を 0 個か 2 個覆う事になる. したがってタイルで敷き詰める事ができれば, 黒は全部あわせて偶数個になります. しかし, 黒は 35 個で奇数なので敷き詰められません.

この問題は 3 色で色を塗れば可能だという問題です. ただし, 図 4.11 のような塗り方では, 個数が等しくなり, 示すことができませんが少し工夫すれば示すことができます. そして, 漠然と 2 色では無理だと思っていました. しかし, ある学生が 2 色でも可能だという事を示しました. ちょっと, 学生の頭に柔軟性と僕の頭の固さを思い知らされたような気になる面白いレポートでした.