

## 2 グラフの定義と応用

### 2.1 グラフの定義

グラフとは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形です .

1章での一筆書きの図形や図 2.1 はグラフの例です . 図 2.1 の最初の 8 角形のグラフを見てほしい . このグラフで頂点は 8 角形の 8 つの頂点だけであり、対角線が交わっているところは、頂点ではありません . この授業では頂点は点で表します . Planarity<sup>\*1</sup> という頂点を動かしてグラフを平らにするゲームを知ってれば、頂点と辺と辺との交差との違いがわかりやすい .

練習 ノートにいくつかグラフを描いてみよう . また、図 2.1 の様に特徴を持ったグラフをいくつか作れ .

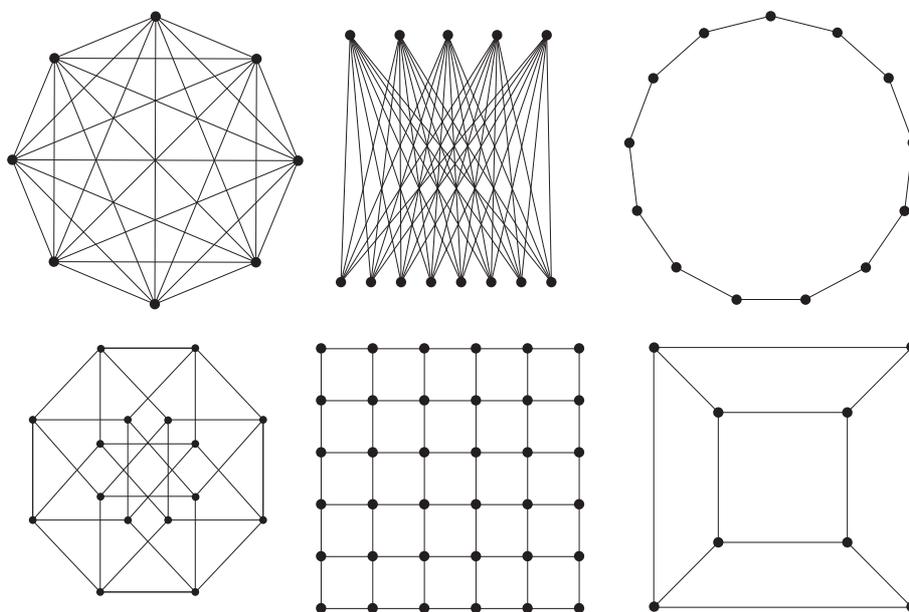


図 2.1 グラフ・グラフ・グラフ

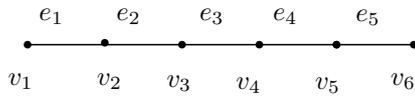
### 2.2 グラフと電線

グラフは色々なものに応用できます .

たとえば、電柱と電線を考えてみよう . 電柱を頂点、電線を辺とすればグラフができます .

下のように 6 本の電柱が直線上に並んで立っているときを考えよう . 電線は何本ありますか .

<sup>\*1</sup> <http://www.planarity.net/>



では、つぎのように  $n$  本の電柱が立っているとき電線は何本あるでしょうか.



わからない時は、 $n$  が  $1, 2, \dots, n$  というふうに考えていけばわかりますね .

電柱	1	2	3	4	5	...	$n$
電線						...	

では、ちょっと複雑になって図 2.2 の場合にはどうなりますか. (i) から (v) のグラフの電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください .

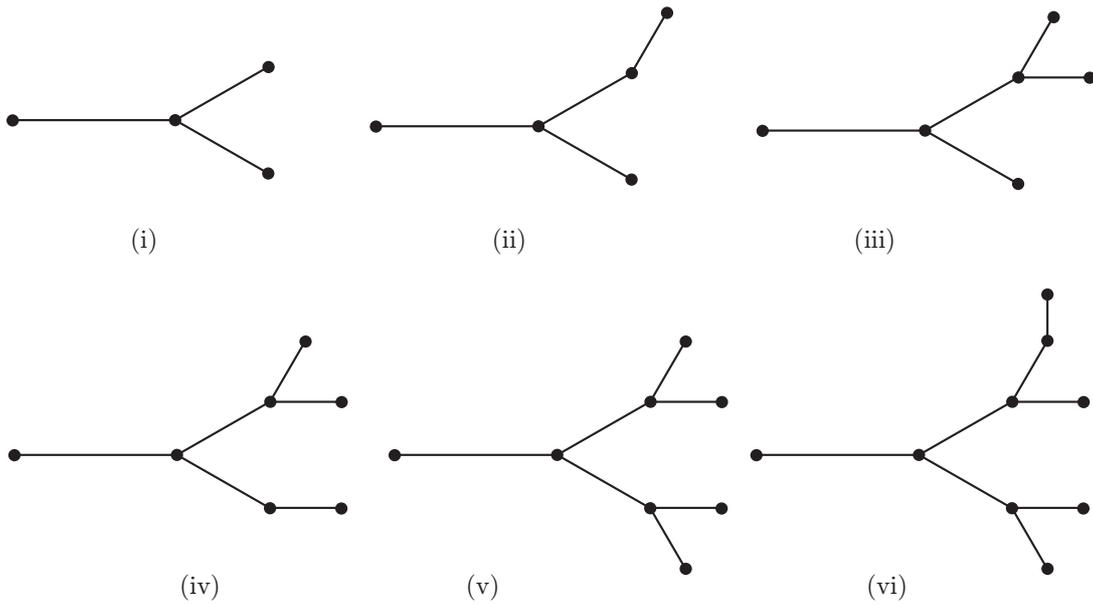


図 2.2 ちょっと複雑な電線

図 2.2 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
電柱						
電線						

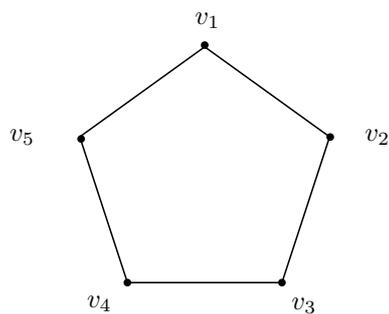
自分で図 2.2 の電線と電柱の例を拡張して電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください . 何か関係が見つかりませんか.

電柱	9	10	11	12	13	...	$n$
電線						...	

問題 電線の数と電柱の数の関係を求めて、なぜそうなるかを説明しなさい。また、その説明を友達などに見せてその説明を理解してくれるか確かめてみなさい。理解できなければ、もっと良い説明になるようにしなさい。

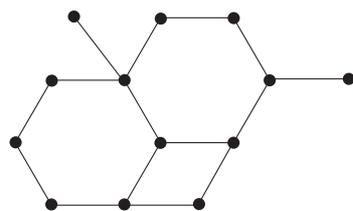
### 2.3 輪のある電線

次の図のように輪のような電柱と電線があった場合はどうなるでしょうか。

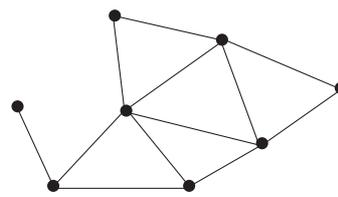


上のように 5 本の電柱があった場合には電線は何本ありますか。また、電柱が  $n$  本あった場合に電線は何本あるでしょうか。次の空欄を埋めてください。

電柱	2	3	4	5	...	$n$
電線					...	



(A)



(B)

図 2.3 たくさんの電線

さらに、図 2.3 のように電柱と電線がありました。電柱と電線の関係はどうなるでしょうか。(A) と (B) のそれぞれの場合に電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい。

	A	B
電柱		
電線		

気がついたかもしれませんが、電柱と電線の関係は他に何か条件がないと求めることはできません。

レポート 1 どのような条件が考えましょう。ただし、考え方の一例を次の節でします。

レポート 2 山形県または好きな都道府県の国道からなるグラフを描け。国道を辺とみなして、いくつかの国道が交わっている点を頂点と考えよ。

名古屋地下鉄の路線図\*2をグラフと考えて作成してみよ。ただし、すべての駅名を入れなくてよい。元気な学生は東京・パリ・ニューヨークなど、地下鉄が複雑に走っている都市の地下鉄の乗り換え図を作成してみよう。

## 2.4 さらに複雑な電線 (オイラーの公式を目指して)

前の節の最後で、複雑な電線を考えました。このような場合、どのように問題を考えていけば良いのかの一例を示す事にします。

初めに複雑なグラフを描いてもあまり手がかりは得られそうにありません。そこで、次の四角形からなるグラフで考えていきましょう。

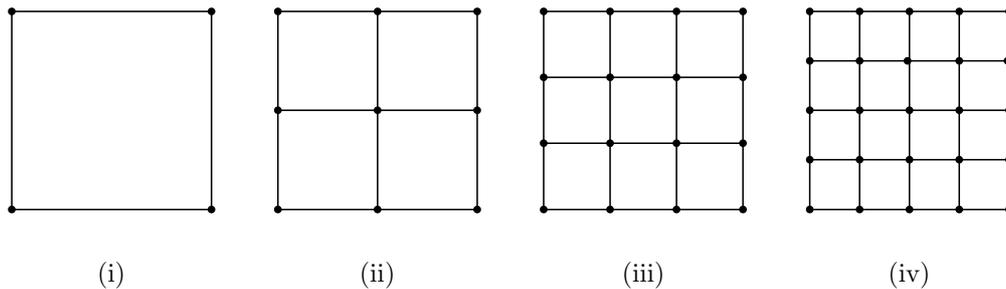


図 2.4 正方形の電線

図 2.4 のグラフは格子状の形をしている正方形からなり正方形の一辺が 1 つ、2 つ、3 つと分割されています。各々のグラフで一番小さな正方形を最小の正方形という事にしよう。このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみよう。

グラフ	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	...
頂点数					...
辺数					...
面の数					...

頂点数、辺数、面の数の間に関係がないだろうか。これらを足したり引いたり掛けたりして考えてほしい。

図 2.5 のグラフは最小の正方形の配置がちょっと複雑になったグラフです。このグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形の数の間の関係はどのようになっていますか。また、縦に  $m$  個、横に  $n$  個最小の正方形

\*2 路線図は時刻表やインターネットで検索すれば出てきます。

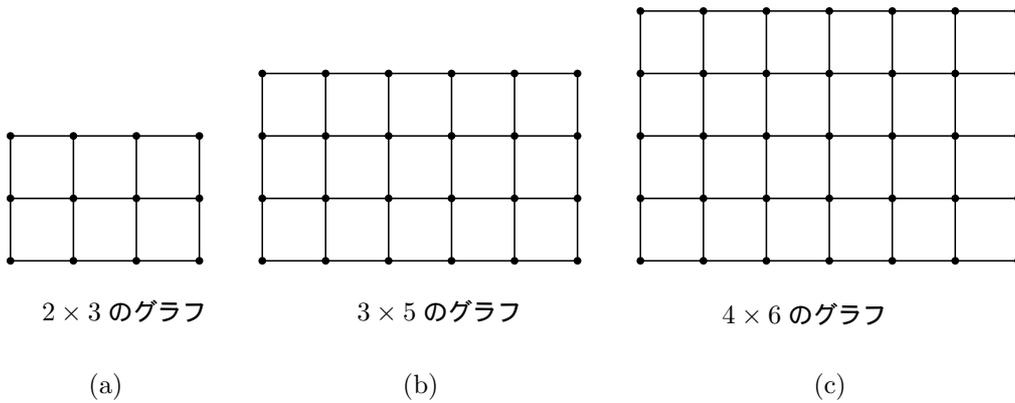


図 2.5 四角形の電線

が配置されているグラフを  $m \times n$  のグラフという事にする.  $m \times n$  のグラフに対して、頂点数、辺数、最小の正方形で囲まれた面の数を求めてみましょう.

図 2.5 のグラフ	(a)	(b)	(c)	...	$m \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					

このグラフは図 2.6 図 2.7 ようにして 3 角形からなる複雑なグラフにすることができます. これらのグラフにも前と同じように  $n \times n$  の (3 角形の) グラフと名前をつけて頂点数、辺数、最小の 3 角形で囲まれた面の数を求めてみましょう.

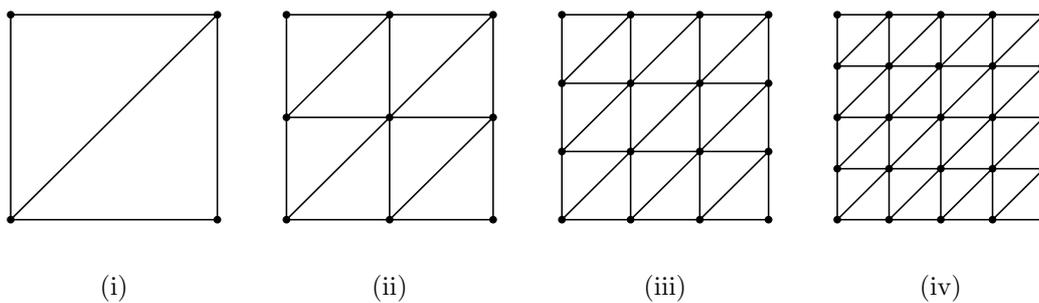


図 2.6 正方形の中の 3 角形の電線

図 2.6 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	...	$n \times n$ のグラフ
頂点数					
辺数					
面の数					

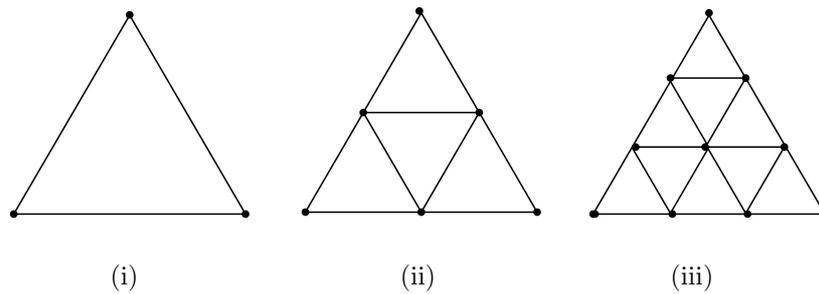


図 2.7 3 角形の中の 3 角形の電線

図 2.7 のグラフ	(i)	(ii)	(iii)	...
頂点数				
辺数				
面の数				

正方形の時も 3 角形の時も頂点数  $v$ 、辺数  $e$ 、面の数  $f$  の関係は (求めた関係が正しかったら) 同じ関係になっています。  $v$ 、 $e$ 、 $f$  の関係式を求めて、興味のある学生はなぜそうなるのか考えてください。この関係式がオイラー標数です。

## 2.5 向きの付いたグラフ

5 つのチーム  $a, b, c, d, e$  でリーグ戦 (総当り戦) をした。その結果つぎの表のようになった。

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$		○	○	×	○
$b$	×		○	○	○
$c$	×	×		○	○
$d$	○	×	×		○
$e$	×	×	×	×	

これをグラフを使って表してみよう。図 2.8 のように矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね。

この様に辺に向きをつけて考えることもあります。

問題  $A, B, C, D, E, F$  の 6 チームがリーグ戦 (総当たり戦) をしました。成績は  $A$  が四勝一敗、 $B$  が全勝、 $C$  が二勝三敗、 $D$  が三勝二敗でした。  $E$  は一度だけ勝っていますが、どのチームとの試合で勝ったのでしょうか。

この問題は、上のリーグ戦のグラフを使えば、簡単に解けます。6 チームなので正 6 角形の各頂点に  $A, B, C, D, E, F$  を対応させます。

図 2.9 のグラフに条件に合うように辺に向きを書き入れていきましょう。ところが、 $A$  の頂点から書き入れようとしても、どのチームと勝ったかどうかは、わかりません。どのチームから考えればよいでしょうか。

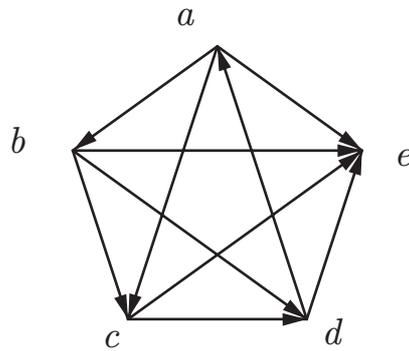


図 2.8 向きの付いたグラフ

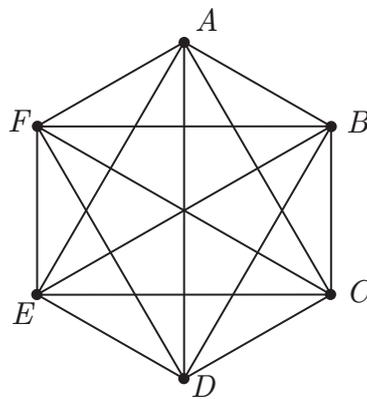


図 2.9 リーグ戦のグラフ

$B$  は全勝しているので、残りのすべての頂点に対して  $B$  を始点とする矢印付きの辺で結びます。  
 $A$  は四勝一敗なので  $B$  以外とはすべて勝っているのでそれらの頂点に対して同様に矢印付きの辺で結びます。  
 $D$  は三勝二敗なので  $A$  と  $B$  以外の頂点に対して同様に矢印付きの辺で結ぶ事ができます。  
 $C$  は二勝三敗なので  $E$  と  $F$  の頂点に矢印付きの辺で結びます。  
すると、条件から  $E$  は 1 回だけ勝っているので残りの  $F$  の頂点と矢印付きの辺で結ぶ事になります。したがって、 $E$  は  $F$  に勝ったことがわかります。

レポート 3 このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を考えよ。