14　オイラーの定理

14.1　道 (path)

オイラーの定理の解説をするために簡単なグラフの定義をします.

図 14.1 のように一本の折れ線になっているグラフを**道 (path)** といいました .

問題 頂点が n 個ある道の辺の本数を求めよ.

道の辺の本数を長さという. 図 14.1 は長さ 5 の道です. またこの図から辺の本数を道の長さと定義した理由がわかるだろう.

図 14.1　道

14.2　閉路 (cycle)

図 14.2 のような一つの輪になっているグラフを**閉路 (cycle)** といいます. 頂点の個数が n の閉路の辺の本数も n になるのはわかりますね. さらに、長さが奇数の閉路を奇閉路、偶数の閉路を偶閉路という. 図 14.2 の閉路は長さが 9 なので奇閉路です.

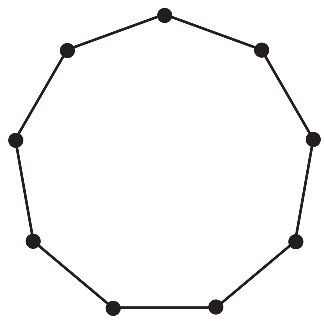


図 14.2　閉路

14.3　木 (tree)

図 14.3 のように、連結なグラフで部分グラフとして閉路を含まないものを**木 (tree)** という.

グラフが連結とはつながっていて一塊になっていることである. ちゃんとした定義はグラフ G の任意の頂点 v と u を道でつなげることができるようなグラフです.

また、連結ではないが各々の成分が木であるグラフを**林 (forest)** という. 不思議な事に漢字と数学の定義がちゃんと一致しているのですね.

だから「き」は木ですが「樹」は木ではありません．また、「き」の上と下を離して書いてしまうと木ではなくなります．グラフ理論では森はありません．
また、14.1 節で定義した道も木の仲間です．

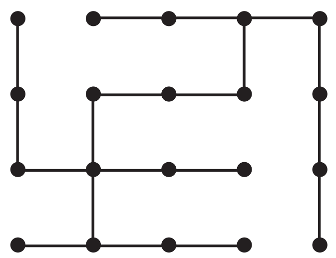


図 14.3　木 (tree)

問題 頂点の個数が n である木の辺の本数はどうなるか考えよ．頂点の個数が n でもいろいろな種類の木がある．何らかの場合わけをしなければならないだろうか．

14.4　木のオイラーの定理

オイラー*1の定理を解説しよう．グラフ理論では頂点と辺が重要です．

そこで，頂点の個数と辺の本数の関係を調べてみよう．

長さが n の道は頂点の個数が $n+1$ で辺の個数が n でした．頂点の個数から辺の本数を引いた値は 1 となり、道の長さに寄らず常に**一定**になります．

つぎに、閉路ではどうだろうか．頂点の個数と辺の本数は同じなので、頂点の個数から辺の本数を引いた値は 0 となる．

では、木ではどうだろうか．図 14.4 にいくつかの木をかいておいたので予想を立てて欲しい．

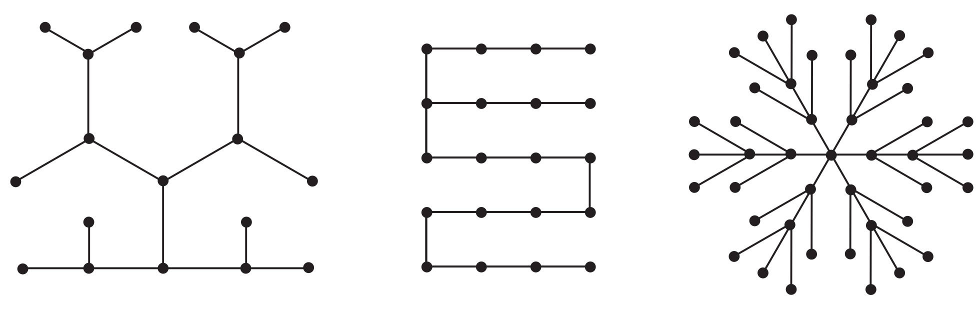


図 14.4　木のオイラーの定理

すべて同じ値になりましたね．同じ値になっていない人はどこか計算間違いをしています．

そこで、木 T に対して 頂点の個数から辺の本数を引いた値を考察していく．図 14.4 を見ればわかるように、頂点から辺が 1 本しか出ていない端点という頂点が必ずあります．数学が得意な人は木の定義から端点が存在することを証明してみよう．

*1 1707-1783 スイス Basel 生まれ．18 世紀の数学の中心的数学者

このとき ——● を取り除く，すなわち，一つの頂点と一つの辺を取り除く．するとまた木になる事に注意しよう．林にならないことはわかりますか．単なる辺 —— を取り除くと林になることがあります．

では、どんどん ——● を取り除いていくと最後には何が残るでしょうか．予想してください．わからない人は 図 14.4 で実際に行ってみましょう．一つの頂点 ● だけが残りましたね．では、ここで問題です．

問題 木 T に対して頂点の個数から辺の本数を引いた値はどのような値を取るでしょうか．

木 T に対して、頂点の個数から辺の本数を引いた値は 1 となることはわかりましたね．
定理の形で書いておきましょう．

定理 14.4.1 (木のオイラーの定理) 木 T の頂点 (vertex) の個数を v、辺 (edge) の本数を e とする．このとき、

$$v - e = 1.$$

14.5　極大木

木 T に対して $v - e = 1$ で，閉路では $v - e = 0$ でした．値が異なっているので，このまま，別のものとして考えるのがよいでしょうか．これらを統一する平面上のグラフに関する新しい定理はないでしょうか．実は，この 2 つを統一できるきれいな定理があります．

平面上のグラフ G に対してどうなるか考えてみましょう．頂点と辺の関係だけではだめです．頂点・辺とくればつぎは面ですね．面も考えなければだめです．しかし、その前に準備として極大木を定義します．

グラフ G に対して**極大木** とは G の部分グラフですべての頂点を含む木となっているものです．

図 14.5 を見てみよう．太くかいてあるところが極大木である．一つのグラフに対していくつも極大木がある事に注意．

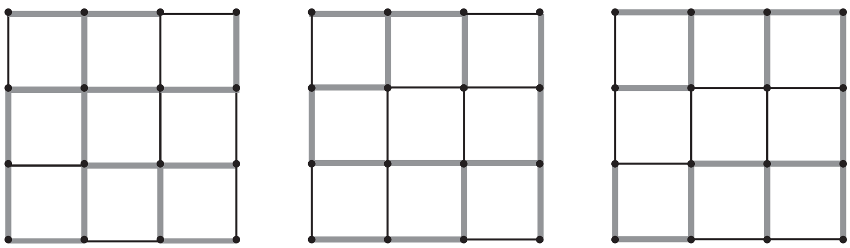


図 14.5　極大木

連結なグラフ G が極大木を持つことを示そう．

グラフ G を考える．図 14.6 のように、グラフ G 内に閉路を探す．もし、閉路がなければ定義から、そのグラフ自体が木になっているので極大木である．あれば、一つの辺を除く．閉路の一つの辺を除いただけなので連結である．この操作を閉路がなくなるまで繰り返す．すると得られたグラフは、頂点はもとのグラフ G の頂点であり、閉路を待たないグラフなので極大木となっている事がわかる．

練習 図 14.7 のグラフに対して極大木を見つけよ．

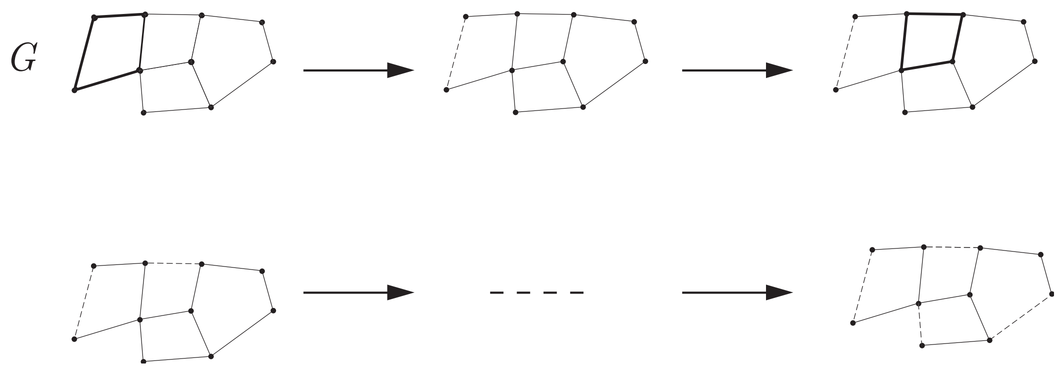


図 14.6　極大木の作り方

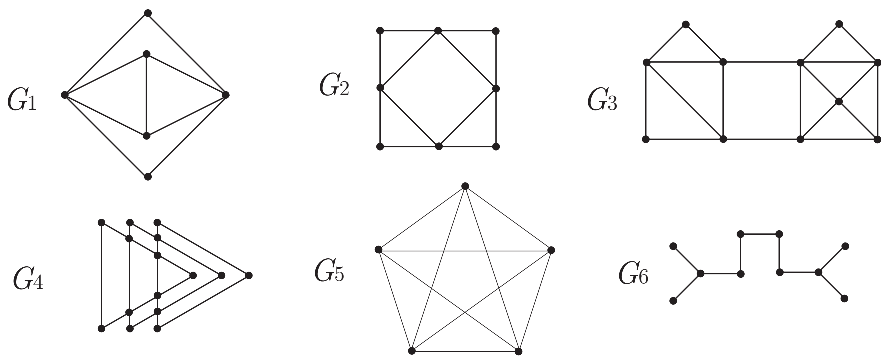


図 14.7　極大木を見つけて

14.6　オイラーの定理

定理 14.6.1 ((平面上の) オイラーの定理) 平面上のグラフ G の頂点の個数を v、辺の本数を e、面の数を f とする．このとき、

$$v - e + f = 1.$$

証明 図 14.8 のように平面グラフ G をとる．

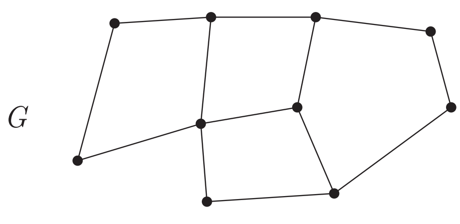


図 14.8　平面グラフ

G の極大木を一つとる．たとえば図 14.9 が極大木になっている．

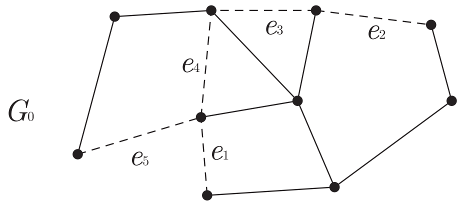


図 14.9　極大木

このグラフを G_0 としよう．G_0 では $v-e+f=1$ となることが定理 14.4.1 よりわかります．G_0 に辺 e_1 をつけ加えましょう．このグラフを G_1 としよう．すると辺がひとつ増えて，また新しい面がひとつできました．よって，$v-e+f$ の値は変わらない事が分かります.

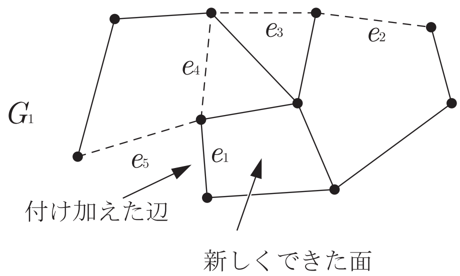


図 14.10　グラフに辺を加えて

G_1 に辺 e_2 をつけくわえよう．このグラフを G_2 とする．こんどもまた新しい面がひとつできた事がわかりますか. $v-e+f$ の値はかわらずに 1 となる事がわかります.

この操作を続けていくともとのグラフ G ができます．また，$v-e+f=1$ となる事もわかります.
このような証明の仕方を (もう少し数学的にちゃんとすれば) 帰納法という.

14.7　球面上のオイラーの定理

つぎに球の表面にグラフをかいたとしよう．このとき、$v-e+f$ の値はどうなりますか.

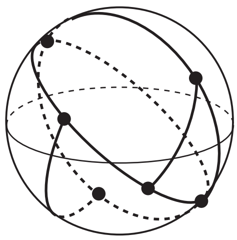


図 14.11　球面上のグラフ

図 14.11 からもわかるように $v-e+f=2$ となることがわかります．これは平面では一番外の領域を考えていなかったのが球面ではその領域も考えるため、f の値が 1 つ増えるためですね.

そこで、平面の場合も一番外の領域も面として数える事にしてつぎの定理が得られます.

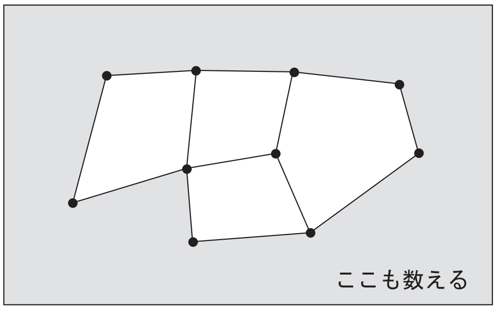


図 14.12　外の領域も数えて

定理 14.7.1 (オイラーの定理) 球面 (平面) 上の連結なグラフ G の頂点の個数を v、辺の本数を e、面の数を f とする．このとき、

$$v - e + f = 2.$$

今までにオイラーの定理を聞いたことのある人は $v - e + f = 1$ の式を聞いた方が多かったのではないか. これは一番外側の領域を面として考えにくかったからです．しかし，いろいろな理由 (14.8 節以降わかるはずですが) で、これからはオイラーの定理といえば $v - e + f = 2$ のことを示すことにします.

14.8　オイラーの定理の応用

正多角形はよく知っているでしょう．では正多面体とはどの様なものか知っていますか．具体例と定義を考えて下さい.

正多面体はいくつあるか知っていますか. 図 14.13 に示してあるように正多面体は正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体*2の 5 つあります.

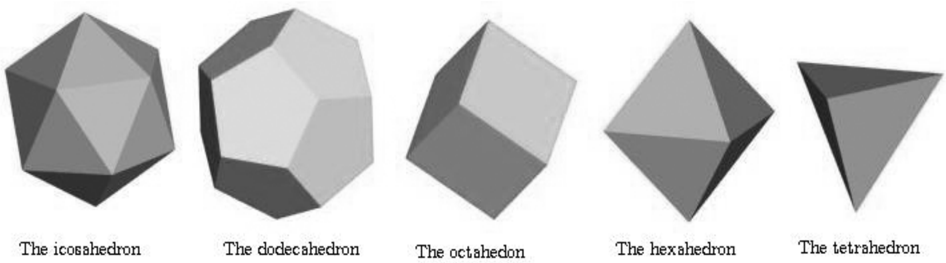


図 14.13　正多面体

オイラーの定理を使ってこの 5 つしかないことを示そう．こういうこともグラフ理論を使ってできるのですね．これは、今から 2000 年以上も前にギリシャのピタゴラス学派によって証明されました.

*2 余談ですが、折り紙を使ってこれらの正多面体を作成する方法が川村みゆき著：多面体の折紙 日本評論社 にあります.

証明 正多面体を少し膨らませる事により正多面体は球面上にかかれていると思う．正多面体の角を頂点，縁を辺とみなして球面上のグラフ G を作る．

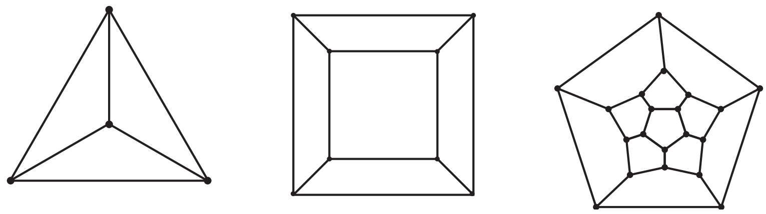


図 14.14　多面体のグラフ

すると，正多面体の角はどこも同じなので G 各頂点から出る辺の本数はすべて等しい．これを n としよう．角には面が 3 つ以上あつまるので，$n \geq 3$ である．

正多面体の各面はすべて合同な正多面体なので，正 m 角形としよう．正多角形で一番角数が少ないのは正三角形なので，$m \geq 3$ である．

各面は正 m 角形なので各々の辺が m 本ある．面の個数を f とすると各面に辺は m 本あり面が f あるので合計 mf 本となる．

しかし，これは同じ辺を 2 回ずつ数えているので G の辺の本数を e とすれば

$$mf = 2e$$

となる．

各頂点から出ている辺の本数は n なので，G の頂点の個数を v とすれば各頂点から出ている辺の本数の合計は nv となる．

握手の補題より $nv = 2e$ となる．

上の二つの式より，$v = \dfrac{2e}{n}$，$f = \dfrac{2e}{m}$.

オイラーの公式より

$$\frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{m} = 2$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{1}{e} > 0$$

ここで、この不等式が大事になってきます．左辺と不等式に注目し分母を払うと $2m - mn + 2n > 0$．因数分解して $(m-2)(n-2) < 4$, m は正 m 角形の m より 3 以上、n も 3 以上である．

$m = 3$ のとき，$n - 2 < 4$ より $n < 6$. よって，$n = 3, 4, 5$.

$m = 4$ のとき，$2(n-2) < 4$. これを解いて $n < 4$. よって $n = 3$.

$m=5$ のとき，$3(n-2)<4$. これを解いて $n<\frac{10}{3}$. よって $n=3$.

$m=6$ のとき，$4(n-2)<4$ より $n<3$. $n\geq 3$ だったので解無しとなる.

同様にして $m\geq 7$ のときにも解がない事がわかります.

$$e\left(\frac{2}{n}-1+\frac{2}{m}\right)=2$$
$$e=\frac{2}{\frac{2}{n}-1+\frac{2}{m}}.$$

$$mf=2e$$
$$f=\frac{2e}{m}=\frac{4}{\left(\frac{2}{n}-1+\frac{2}{m}\right)\times m}$$
$$=\frac{4}{\frac{2m}{n}-m+2}.$$

以上の式より

m	3	3	3	4	5
n	3	4	5	3	3
f	4	8	20	6	12

が得られる.

ループ (loop) と多重辺とは図 14.15 のように輪の形をしている辺と二つの頂点を結ぶ辺が 2 つ以上ある辺の事です.

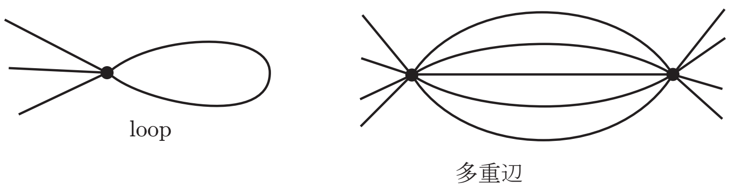


図 14.15　ループと多重辺

グラフの中でつぎの条件を満たすものを**正則グラフ (normal graph)** という.
(1) ループを持たない、
(2) 多重辺を持たない.

実験 1 ノートに正則な平面グラフをたくさんかきましょう.
実験 2 すべての頂点において、出ている辺の本数が 6 以上となる正則グラフをかきましょう.

考察 すべての頂点において、出ている辺の本数が 6 以上となる正則グラフはかけませんでした.

平面上の正則グラフは頂点から出ている辺の本数が 5 以下の頂点を少なくとも一つ含むみたいだ.

実際にはオイラーの定理から次の定理が示せます.

定理 14.8.1 平面上の正則グラフは頂点から出ている辺の本数が 5 以下の頂点を少なくとも一つ含む

証明 背理法で行います．すべての頂点から出る辺の本数が 6 以上だと仮定してオイラーの定理に反する事を証明します．グラフ G のすべての頂点から出る辺の本数が 6 以上だと仮定する．頂点の個数 $\times 6 \leq$ 頂点から出る辺の本数の合計 $=$ 辺の本数 $\times 2$ なので

$$\text{頂点の個数} \times 3 \leq \text{辺の本数} \tag{1}$$

また，正則グラフより各領域の辺の本数は 3 以上である．領域数 $\times 3 \leq$ 領域の辺の本数の和 $=$ 辺の本数 $\times 2$ である.

ここでは一番外の領域も面として見ている事に注意しよう.

$$\text{領域数} \times 3 \leq \text{辺の本数} \times 2 \tag{2}$$

(1) と (2) をオイラーの定理に代入する.

$$2 \leq \frac{1}{3} \times \text{辺の本数} - \text{辺の本数} + \frac{2}{3} \times \text{辺の本数} = 0$$

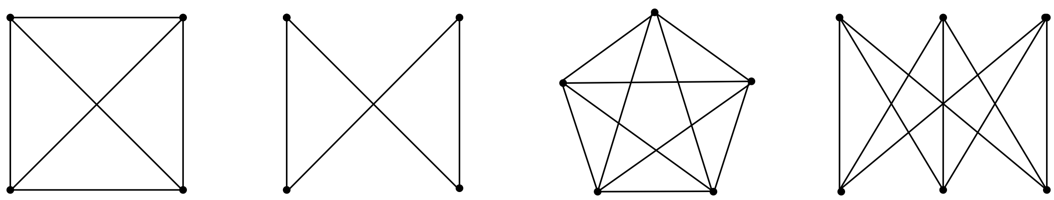
以上で矛盾が出てきた．よって頂点から出る辺の本数が 5 以下の頂点が存在する.

レポート 42 図 14.16 はある平面グラフの一部分を抜き出したものである．各頂点から 6 本の辺が出ているので、これは定理 14.8.1 の反例になっているのだろうか.

14.9 平面グラフ

平面上にかけるグラフを**平面グラフ**という．K_4 のように見かけは平面にかけそうになくても頂点を動かす事により平面にかける場合があるので注意が必要です.

問題 つぎのグラフの中から平面にかけるグラフを示しなさい.



K_4 C_4 K_5 $K_{3,3}$

左の 2 つは平面にかけましたね．右の 2 つはどうしても平面にかけません．平面にかけないこともオイラーの定理を使って示すことができます.

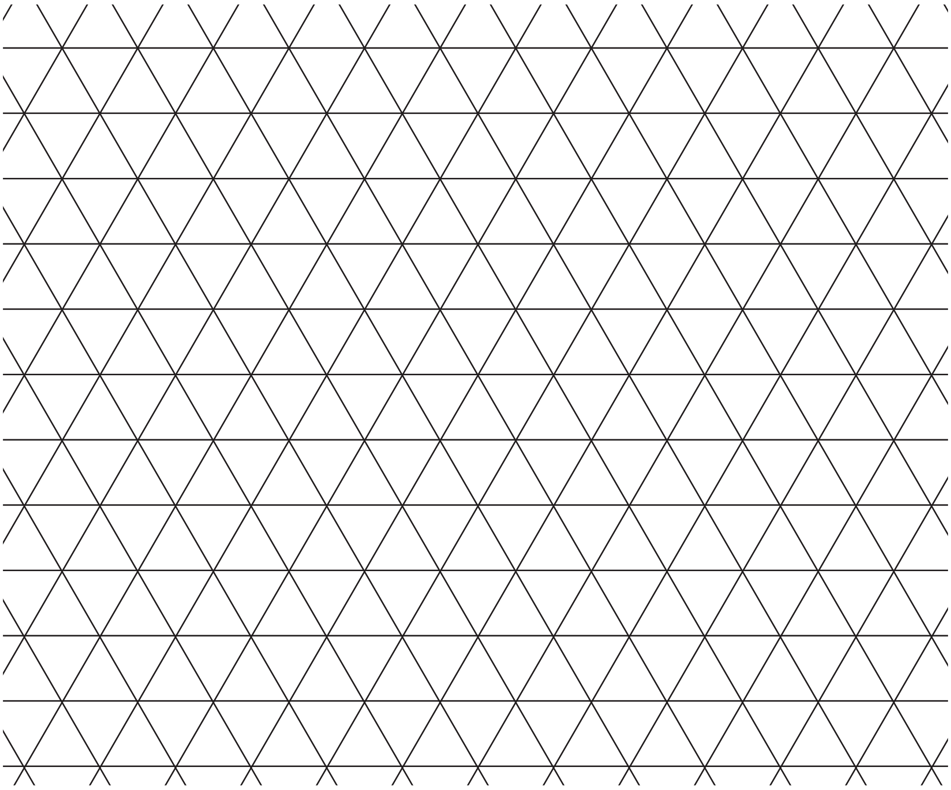


図 14.16　頂点から 6 本の辺

グラフが平面にかけるかどうかは結構応用ができます．たとえば電子回路（集積回路）を設計するときにはなるべく「平ら」なほうがいいですよね．

定理 14.9.1 (クラトフスキーの定理) K_5 と $K_{3,3}$ は平面上にかくことができない．

証明 $K_{3,3}$ の場合
オイラーの定理を使いたいので頂点の個数 v と辺の本数 e を求める．実際に数えて、$v=6$ $e=9$ となるのはいいですね．では、もし、$K_{3,3}$ が平面上にかけたとすると仮定するとどうなるでしょうか．面の数は $f=5$ $(6-9+f=2)$ となります．面のまわりは閉路になっていますが $K_{3,3}$ 内の長さが最小の閉路は 4 になることがわかりますね．すると、辺の数の評価より、

$$
\begin{aligned}
\text{面数} \times 4 &\leq 2e \\
\text{面数} \times 2 &\leq e \\
5 \times 2 &\leq 9 \\
10 &\leq 9
\end{aligned}
$$

となり矛盾がでてきました．よって $K_{3,3}$ が平面上にかけるという仮定がおかしかったわけですね．

レポート 43 K_5 に対して証明の続きをしなさい.