10　マッチング

10.1　2 つの頂点をペアにして

グラフ G において, **マッチング**とは, 1 本の辺で結ばれた 2 つの頂点をペアにすることです. ただし, ひとつの頂点を 2 つ以上の頂点とペアさせてはいけません. 図 10.1 の各々のグラフに対して図 10.1 の右側のように, マッチングさせた 2 つの頂点を太線の辺で表すことにしよう.

ひとつのグラフに対してマッチングはたくさんある.

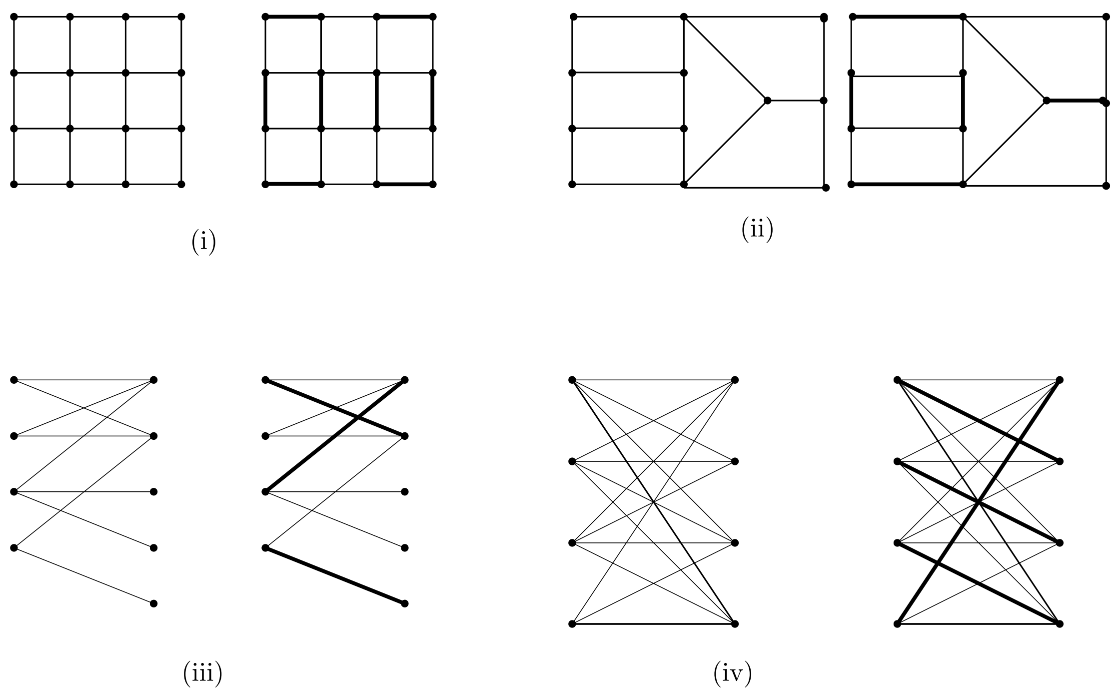


図 10.1　マッチング

練習 図 10.2 のグラフに対してマッチングを与えよ.

図 10.1 の (i) と (iv) を見ると, すべての頂点がマッチングに含まれています. マッチングでは, このようにすべての頂点が含まれているマッチングを考えることが多い.

頂点の個数が奇数個のとき, すべての頂点を含むマッチングはありません.

問題 図 10.3 ですべての頂点を含むマッチングを持つものを探し出せ. さらにそのマッチングの辺を赤色で塗りなさい.

マッチングを持たないグラフはなぜ持たないかを考えなさい.

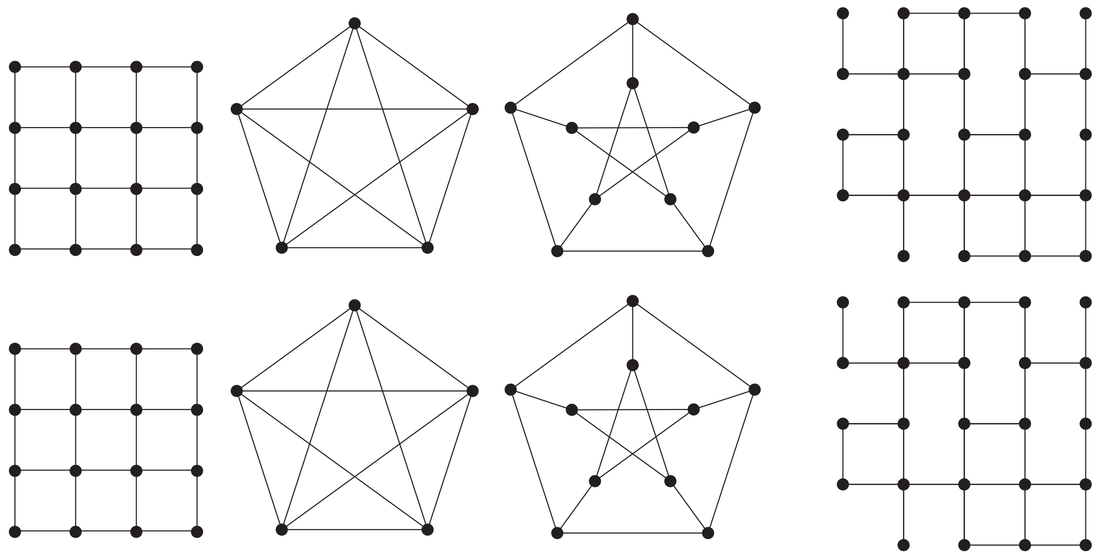


図 10.2　マッチングの練習

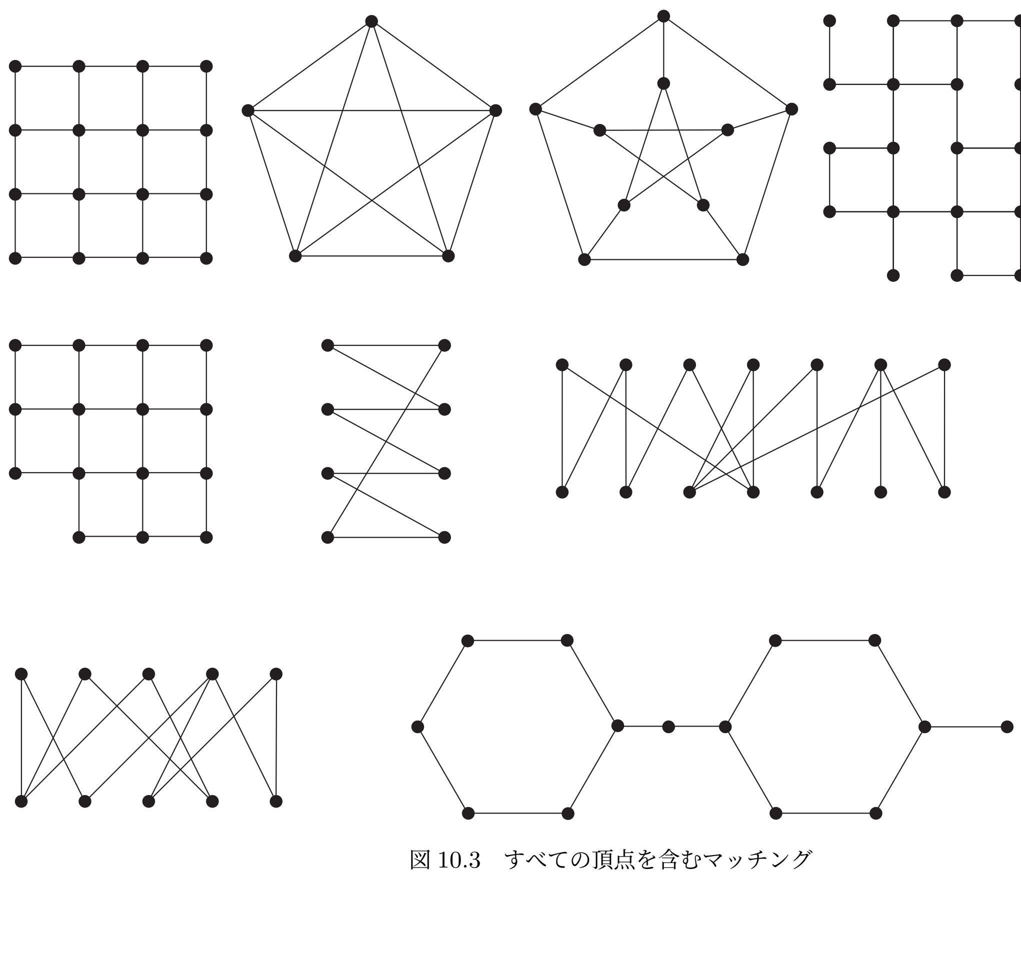


図 10.3　すべての頂点を含むマッチング

10.2　2 部グラフのマッチング

2 部グラフ[*1]ではすべての頂点を含むマッチングを考えることが多い. 図 10.4 の 2 部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持ちますか..

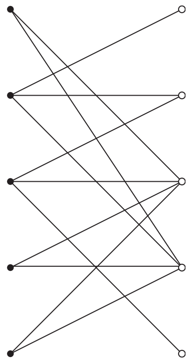


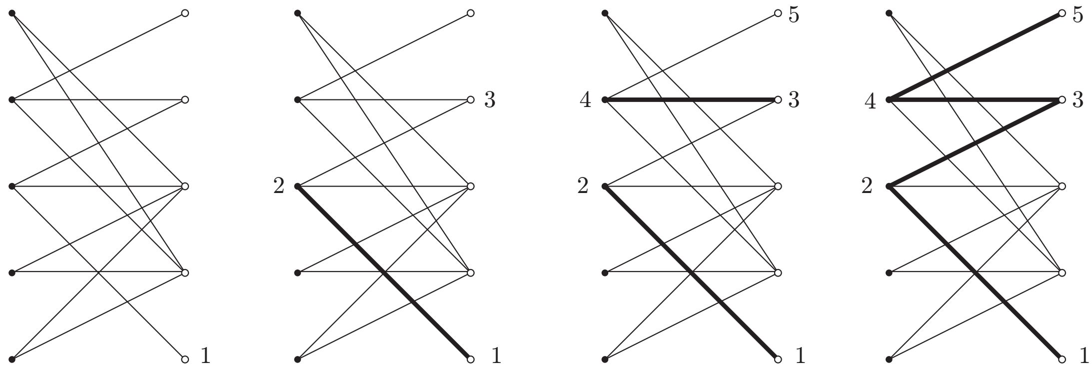
図 10.4　2 部グラフのマッチング

すべての頂点を含むマッチングを持たないことは次のようにして示すことができます.

初めに, 図 10.5 (i) の頂点 1 に注目します. 辺が 1 本より, マッチングに対応する辺が一意に決まります.

次に, その辺の他方の頂点 2 と頂点 3 に注目しよう 図 10.5 (ii). 頂点 3 は頂点 2 と頂点 4 とだけつながっていますが, 頂点 2 はもうすでに使われているので, 頂点 4 とマッチングします 図 10.5 (iii).

すると頂点 5 とマッチングする頂点がなくなりました 図 10.5 (iv).



(i)　(ii)　(iii)　(iv)

図 10.5　2 部グラフのマッチング

2 部グラフのマッチングで, 図 10.5 (iv) の 1 から 5 の頂点と太い線で描かれた辺があると, すべての頂点を含むマッチングはないということがわかります.

[*1] 2 部グラフとは図 10.4 のように頂点が 2 つに別れるグラフです.

一般に図 10.5 (iv) のような右側の頂点とそれとつながっている左側の頂点の個数が異なるような部分グラフを持つ 2 部グラフは頂点をすべて含むマッチングを持たないことがわかっています.

練習 2 部グラフで, 両側の頂点の個数が等しいが, すべての頂点を含むマッチングがないものを 3 つ作れ.

では, 図 10.5 (iv) のような部分グラフがないとき, すべての辺を含むマッチングがあるのだろうか.

図 10.5 (iv) のような*2部分グラフを待たない両側の頂点の個数が等しい 2 部グラフはすべての頂点を含むマッチングを持つことが知られています. Hall の定理とか結婚定理と呼ばれています.

また, マッチングを見つけるアルゴリズム (ハンガリー法など) があります.

アルゴリズムの解説はしませんが, ここでは, 簡単な例に対して目で見ながらすべての頂点を含むマッチングを見つけてみましょう. あるマッチングで失敗しても次のようにすれば, 失敗したマッチングから良いマッチングを見つけることができます.

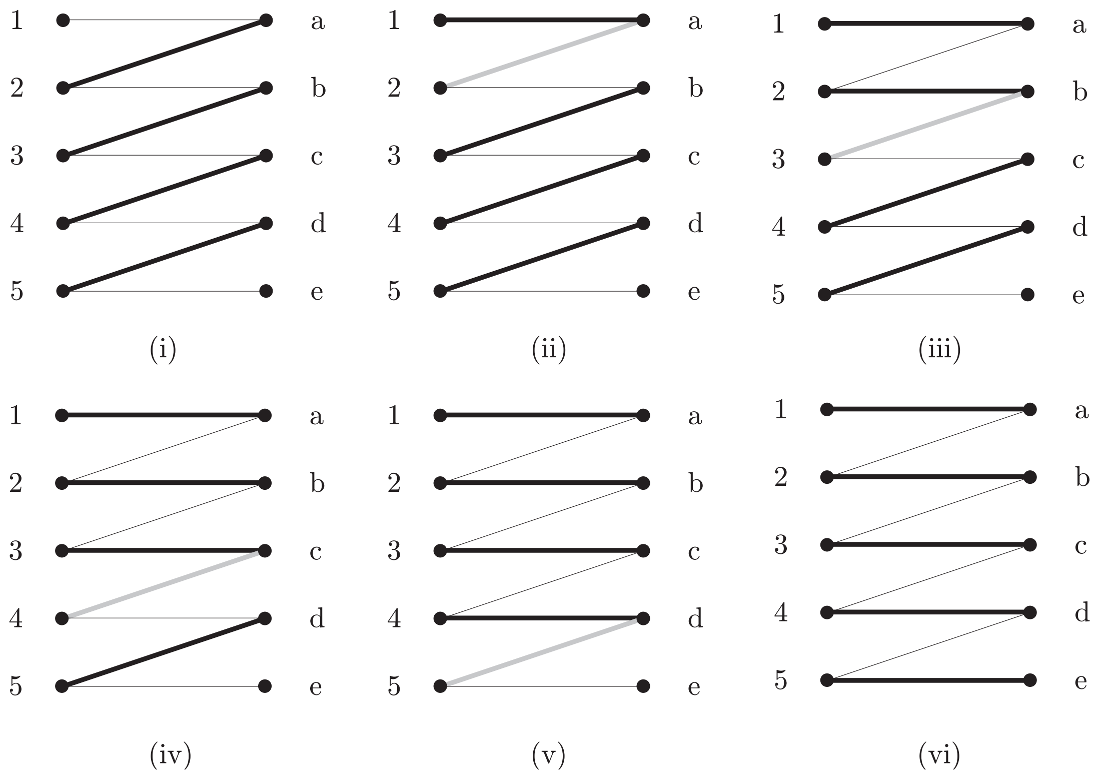


図 10.6 マッチングの見つけ方

図 10.6 (i) のグラフにマッチングを与えました. 頂点 1 と e を含んでいません. そこで, (i) のマッチングを改良して, これより良いマッチングを作っていきます.

(1) 図 10.6 (ii) のように頂点 1 と頂点 a をマッチングする.

(2) 頂点 a ではマッチングが 2 つあるので古い方を除く.

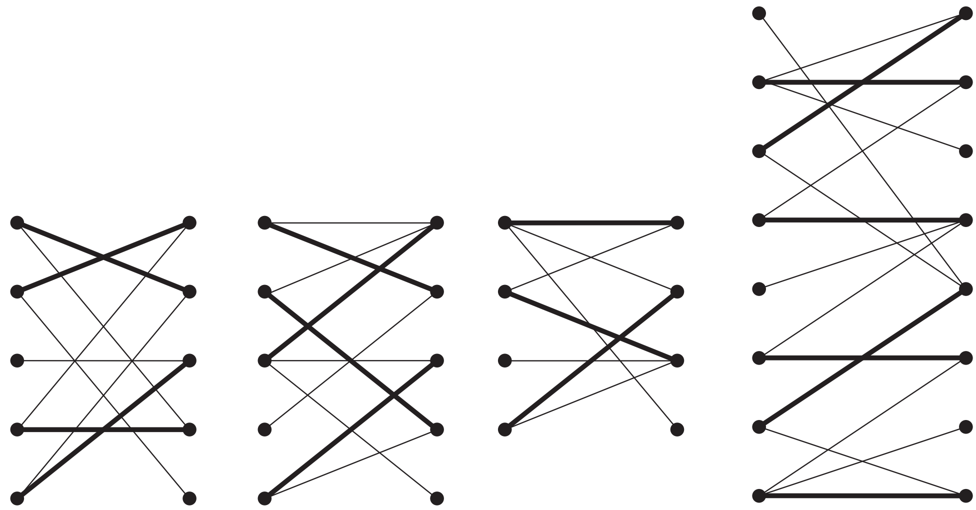
(3) 頂点 2 ではマッチングがないので, 頂点 2 と頂点 b をマッチングする. (ただし, 頂点 b の取り方にあいま

*2 ちゃんとした定義はしませんがなんとなくでわかってください.

いさがある．次の練習参照)
(4) 以下同様に行う．図 10.6 (i)–(vi) 参照.

すると, 頂点の個数が 2 つ増えたマッチングが得られます．今回はこれですべての頂点を含むマッチングが得られましたが, そうでなければこの操作を繰り返します[*3].

練習 図 10.7 のマッチングを改良して, すべての頂点を含むマッチングを見つけよ.



(i) (ii) (iii) (iv)

図 10.7　すべての頂点を含むマッチングの見つけて

10.3　クイズ

2 部グラフはクイズを解くためにも利用することができます.

問題 1 友達が 3 組結婚することになった．その 3 組に誰と結婚するのか聞いた.

(1) A 君に聞くと, A 君は X さんと結婚するという.
(2) X さんに聞くと, X さんは C 君だという.
(3) C 君に聞くと, C 君は Z さんと結婚するという.

後で確かめると, みんな嘘をついていたらしい．以上から誰と誰が結婚しますか.

これらの問題をグラフ理論のマッチングを使って解いてみよう.

[**問題 1 の解法**] 男性と女性がいるので, 頂点の集合を男女に対応させた 2 部グラフを考えます.

[*3] ハンガリー法と呼ばれるマッチングを見つけるアルゴリズムです．正確な表現はグラフ理論の専門書でハンガリー法を調べてください.

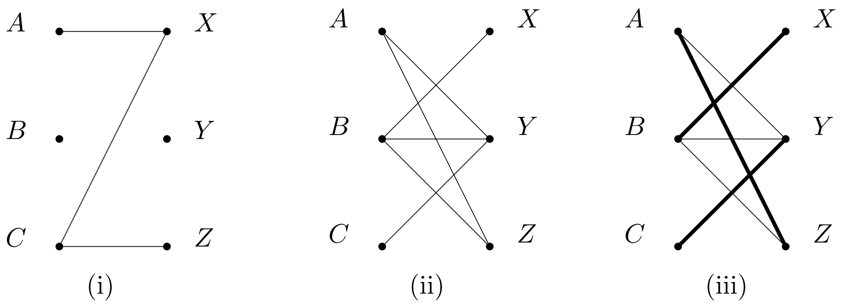


図 10.8　クイズの 2 部グラフ

図 10.8 (i) が証言から作った 2 部グラフです．各人の証言から結婚する人を辺で結びます．ところが, 証言は嘘だったので, 実は, この辺以外の人と結婚する可能性があるので (ii) でそのグラフを作成しました．(ii) の頂点 C と頂点 X に注目します．頂点 C から辺が 1 本しか出ていないので C は Y と結婚することがわかります．同様に X は B と結婚することがわかります．残りの情報から A と Z が結婚することがわかります．

問題 2 またあるとき 4 組のカップルが結婚するという．本当の事を話してねと頼むと以下のような答えが返ってきた．

(1) X さんは B 君か C 君と結婚する．
(2) Y さんは A 君か B 君と結婚する．
(3) Z さんは A 君か C 君と結婚する．
(4) B くんは W さんか Y さんと結婚する．

以上のデータから誰と誰が結婚しますか．

[問題 2 の解法]

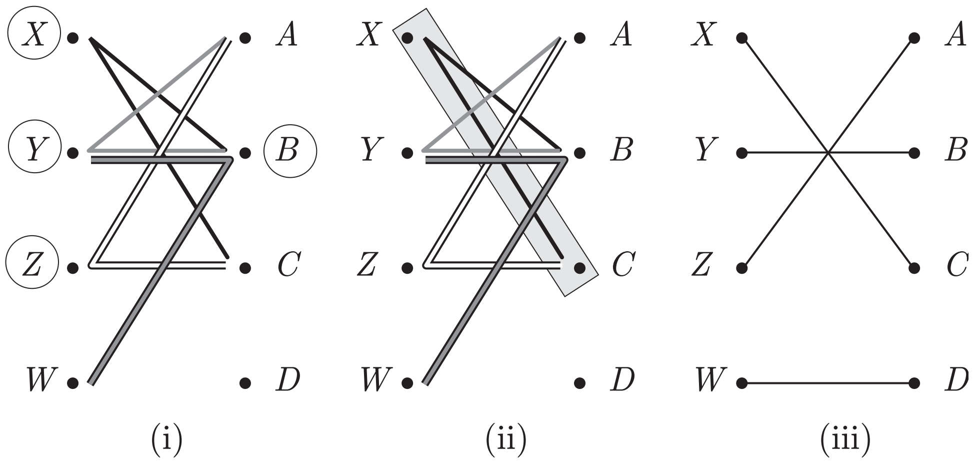


図 10.9　2 部グラフ

図 10.9 (i) が証言から作った 2 部グラフです．そして, 条件 (1)–(4) に対応する辺が 2 本あり, それらから 1 本を選ぶ事になります．B さんの条件から X さんは B さんと結婚できないので C さんと結婚する事がわか

ります．図 10.9 (ii)．Z に注目すれば C とは結婚できないので A と結婚する事がわかります．Y に注目すると A とはできないので B と結婚します．D と W は, どちらも誰と結婚するかの情報がないが, 最後まで残ったのでこのペアで結婚します．図 10.9 (iii)．注意してほしいのは Y さんは B 君と結婚するといっていて, B 君も Y さんと結婚するといっています．しかし, これだけの条件からは Y さんと B 君が結婚するという事はいえません．今回はたまたま, 結婚するのですが.

レポート 31 男の子 5 組 (A, B, C, D, E) と女の子 5 組 (V, W, X, Y, Z) が結婚することになった．それを知ったある人が誰と結婚するのかを聞きに行った.

A 君「D 君は W さんと結婚するそうですよ．僕は X さんとしますよ」
B 君「C 君も W さんと結婚するっていっていましたよ．僕は V さんとします」
C 君「B 君は実は Z さんと結婚するのですよ．僕は X さんとします」
D 君「C 君は Y さんと結婚します．僕は V さんとします」
E 君「A 君は V さんと結婚します．僕は Y さんと結婚します」

どうも変な回答なのですが, 僕はみんな 1 つは本当の事をいって, 1 つは嘘をいっていることに気がつきました．では, 誰と誰が結婚するのでしょうか？

レポート 32 またあるとき男の子 4 人 (A, B, C, D) と女の子 4 人 (W, X, Y, Z) が結婚することになった．それを知ったある人がまた誰と結婚するか聞きにいった．嘘はいわないでと頼んだら, 次の情報を得た．では, 誰と誰が結婚するのでしょうか？

A 君は「X さんか, Y さんか, Z さんと結婚します.」
B 君は「僕も X さんか, Y さんか, Z さんと結婚します.」
C 君は「W さんか, X さんか, Y さんと結婚します.」
W さんは「A 君か, B 君か, D 君と結婚します.」
Y さんは「A 君か, B 君か, D 君と結婚します.」
Z さんは「A 君か, C 君か, D 君と結婚します.」

10.4 ダンス部のマッチング

図 10.10　ダンス部の部員

大学のダンス部の新入部員のパートナーを決めるために, 試しに相手と 10 分ダンスをすることになった.

身長やダンスの種類により組むことができるペアに次のように制限がでた．Juanes と Shakira, Juanes と Thalia, Enrique Iglesias と Shakira, Enrique Iglesias と Thalia, Alejandro Sanz と Thalia がダンスする相手の候補になった.

では, 何分あれば, パートナーを決めることができるか.

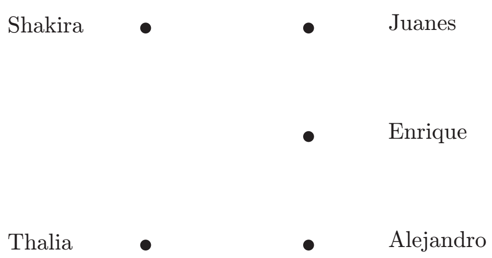


図 10.11　ダンス部のマッチング

[**解法**] まず, 男子・女子で部員を 2 つに分けた 2 部グラフを考えて, ダンスできる相手と辺で結ぶ 図 10.11. そして 1 回でダンスできるマッチングを青色で塗り, 2 回目でダンスできるマッチングを赤色で塗ってというようにして, 何回掛かるかを調べる. また, ある頂点から出る辺の数だけは色が必要である事に注意しよう.

これを, 応用すると色々な場面でどれだけの組み合わせを考えないといけないかがわかります.

問題 図 10.12 では色は何色必要でしょうか.

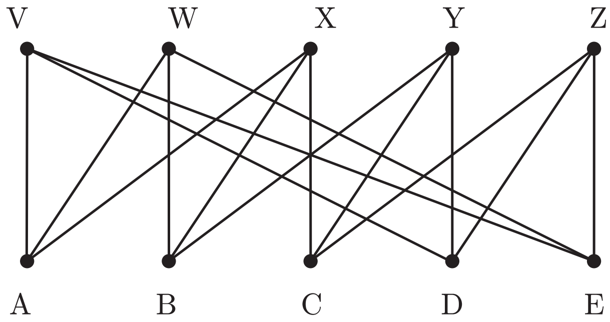


図 10.12　マッチングの色分け

11　貨車の入れ替えクイズ

11.1　貨車の入れ替え 1.

[**クイズ**][*1] 貨車を入れ換える装置に図 11.1 のような転車台[*2]があります. 図 11.2 のように, 中央のターンテーブルに貨車を 2 台乗せ, テーブルを 180 度回転させるとこの 2 台の貨車の順番を入れ換える事ができます.

機関車と貨車 A, B, C, D があります. 貨車 D には火薬をつんでいるので機関車のすぐあとにはつなげる事ができません. $ADBC$ の順番に並んでいる貨車を, 転車台を使って $CBDA$ にする事はできますか.

できるとすればどのような手順が**一番効率が良いでしょうか**.

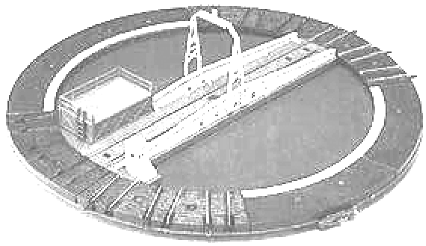


図 11.1　転車台

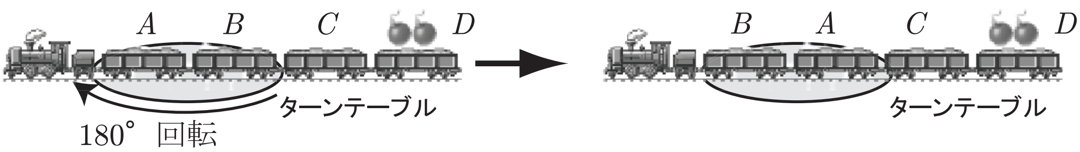


図 11.2　ターンテーブルを使って

この問題をグラフ理論を使って解いてみよう.

頂点の集合 V を貨車の並び方で定義しよう. $\{A, B, C, D\}$ の並べ方で D は先頭に置くことができないので

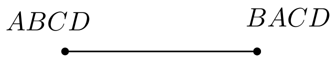
$$
\begin{aligned}
V = \{&(ABCD),\ (ABDC),\ (ACBD),\ (ACDB),\ (ADBC),\ (ADCB),\\
&(BACD),\ (BADC),\ (BCAD),\ (BCDA),\ (BDAC),\ (BDCA),\\
&(CABD),\ (CADB),\ (CBAD),\ (CBDA),\ (CDAB),\ (CDBA)\}
\end{aligned}
$$

となります[*3].

1 回ターンテーブルを使うことで移りあうことのできる頂点を辺で結びます. たとえば 頂点 $ABCD$ に対

[*1] 本間龍雄 グラフ理論入門 講談社ブルーバックスより改題.
[*2] この近くだと JR の吹田操車場に転車台があります.
[*3] 規則正しく A, B, C, D が並んでいる事に注意.

して AB をターンテーブルにのせて回転させると頂点 $BACD$ になります．このとき頂点 $ABCD$ と頂点 $BACD$ を次のように辺で結ぶ．



頂点 ($ABCD$) に注目してグラフを作成しよう．

(1) 頂点 $ABCD$ と 1 本の辺でつながっている頂点をすべて考える．
(2) 頂点 $ABCD$ と頂点 $AB\underline{DC}$, 頂点 $A\underline{CB}D$, 頂点 $\underline{BA}DC$ が辺でつながる．下線は転車台に載せて交換した貨車を表す．
(3) 頂点 $ABCD$ のまわりは図 11.3(i) のようになる．
(4) 同様に頂点 $ABDC$ のまわりを考えると (ii) のようになる．
(5) 頂点 $ADCB$ のまわりは, D は機関車の後ろにつなぐ事ができないので (iii) のようになる．
(6) 頂点 $ADCB$ の周りも, D の条件から (iv) のようになる．
(7) 頂点 $ACDB$ と頂点 $ACBD$ のまわりは (v) のようになる．

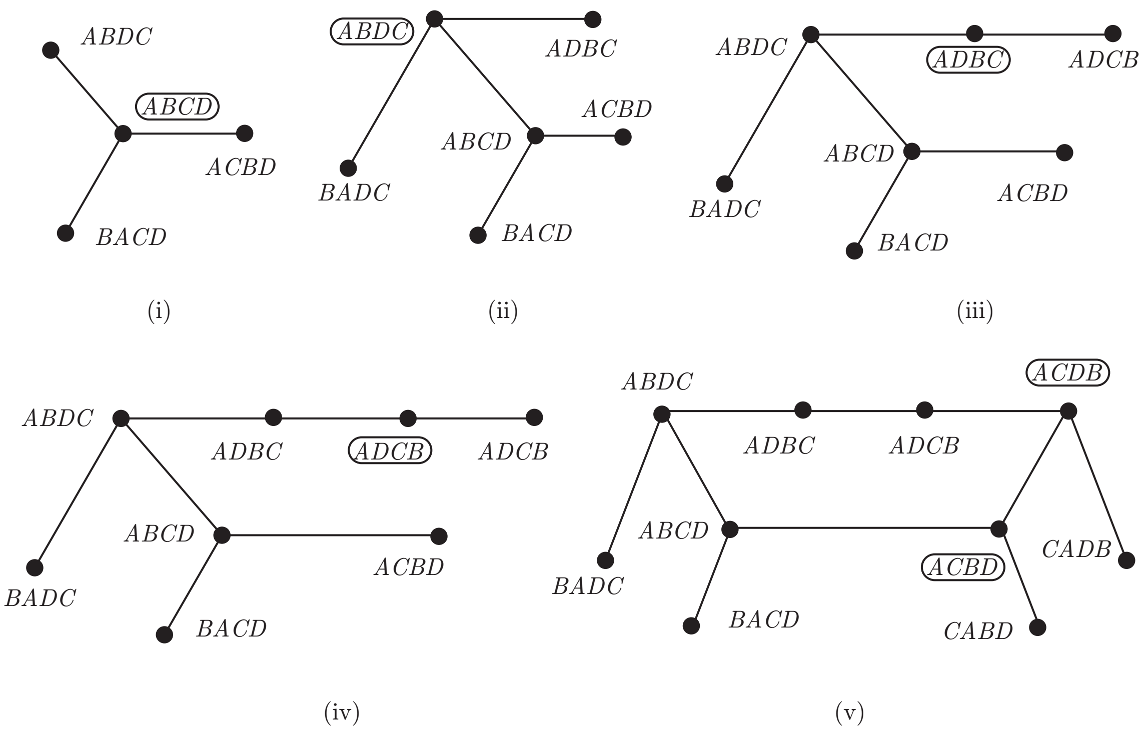


図 11.3　貨車の入れ換えのグラフの作成

この様に考えていけば A で始まる頂点すべてを考える事ができます．同様にして B と C で始まる頂点を考える事で図 11.4 を完成させましょう．

したがって, $ADBC$ の順番に並んでいる貨車を, 転車台を使って $CBDA$ にすることは頂点 $ADBC$ から頂点 $CBDA$ まで辺に沿った転車台の使い方できます．辺の数が最短になるのが最短の手順です．

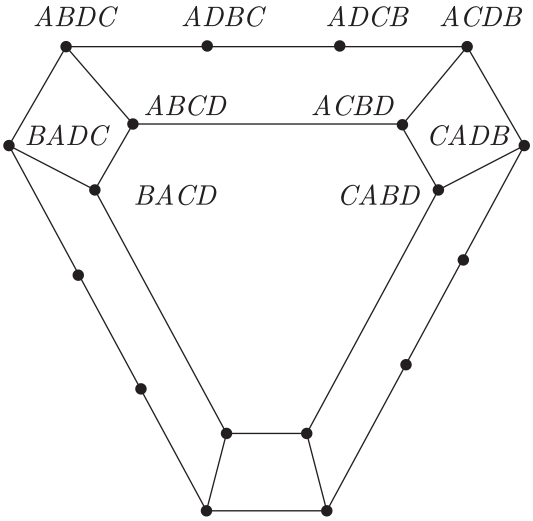


図 11.4　貨車の入れ換えのグラフ

11.2　貨車の入れ替え 2

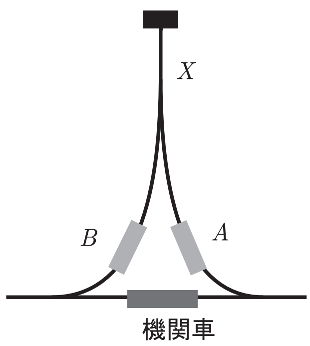


図 11.5　貨車の入れ換え 2

図 11.6　機関車

[**クイズ**][*4]図 11.5 の線路上に機関車と 2 つの貨車 A と B がある．X の場所には貨車を 1 台入れて左右どちらにも出せるが貨車を 2 台以上入れることはできない．機関車は大きいので入れることができない．また, 機関車は貨車を前後に押したり引いたりできる 図 11.6．このとき, 貨車 A と B を入れ換えて機関車をもとにもどすのにはどうすれば良いか．グラフを使って考えなさい．

初めは普通に考えてください．学生を見ていると, ノートに線路を書き消しゴムとかペンのキャップなどを貨車だとか機関車に見て考えている学生がいます．

[*4] 推理パズル 藤村孝三郎 河出文庫 より改題

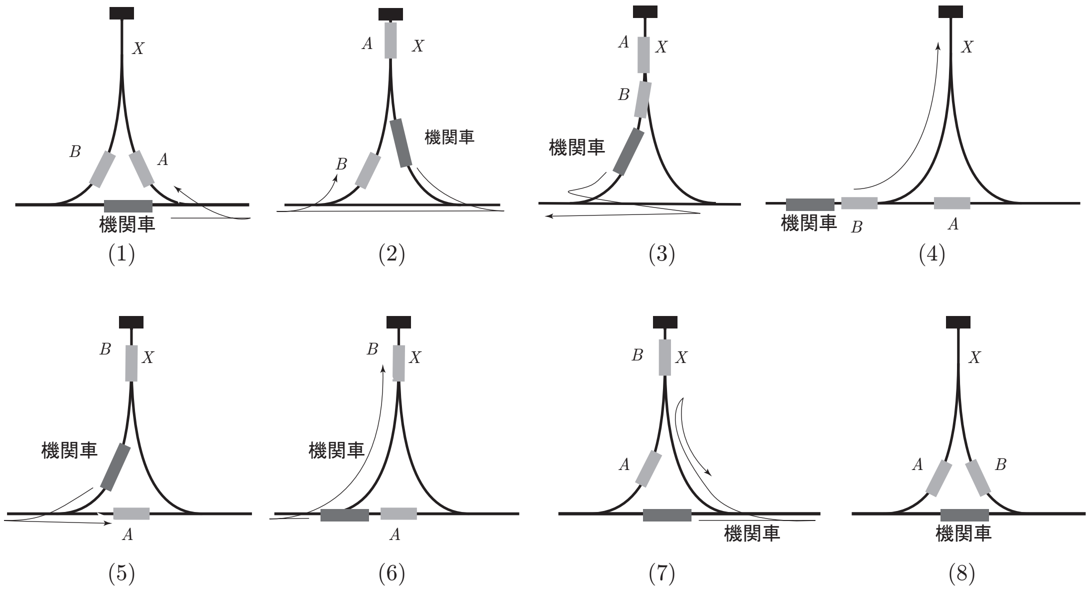


図 11.7　貨車の入れ替えの答え

解答

(1) 機関車を右の方に移動し貨車 A を X に入れる.
(2) 機関車を一度戻してから左の方に行き貨車 B を X まで移動する.
(3) 機関車を使って B と A と繋げる.
(4) A と B を引き出して A を機関車があった所に置く.
(5) B を X に入れる.
(6) 機関車を使い A を B が在った所に移動する.
(7) 機関車を右側に移動し B を A のあったところに移動する.
(8) 機関車をはじめの位置に戻す.

図 11.7 のような操作がイメージができあがれば大丈夫です.

次に, グラフ理論なので前のクイズのようにグラフを使って解きたい. 頂点と辺に何を対応させれば良いでしょうか?

頂点 頂点は機関車と貨車 A, B の状態を対応させます. そこで, どれくらい異なる状態があるか考えます. 図 11.8 の 2 つの状態は同じとみなした方が良いですか, それとも違うとみなした方が良いでしょうか.

この 2 つの状態は同じ状態とみなします. なぜなら, この 2 つはすぐに互いに移すことができます. すると, 同様に考えて図 11.9 は同じ状態だと考えます.

すると最後の状態, すなわち機関車と貨車を 1 列につなげた状態 (A 機関車 B) で, この状態を表すとします. 頂点の集合 V は機関車, 貨車 A, B の並べ方で表されて個数は $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 個あります.

$$V = \{(AB\ \text{機関車}), (A\ \text{機関車}\ B), (BA\ \text{機関車}), (B\ \text{機関車}\ A), (\text{機関車}\ AB), (\text{機関車}\ BA)\}$$

辺 辺は頂点の状態を変える次の 2 つの操作を対応させます.

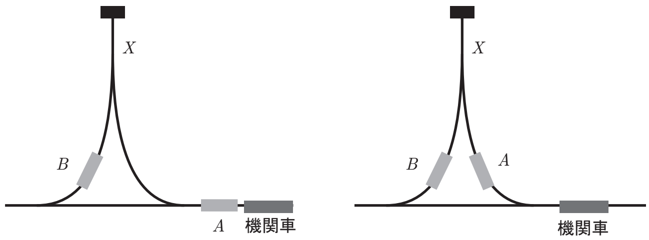


図 11.8　貨車の入れ換え

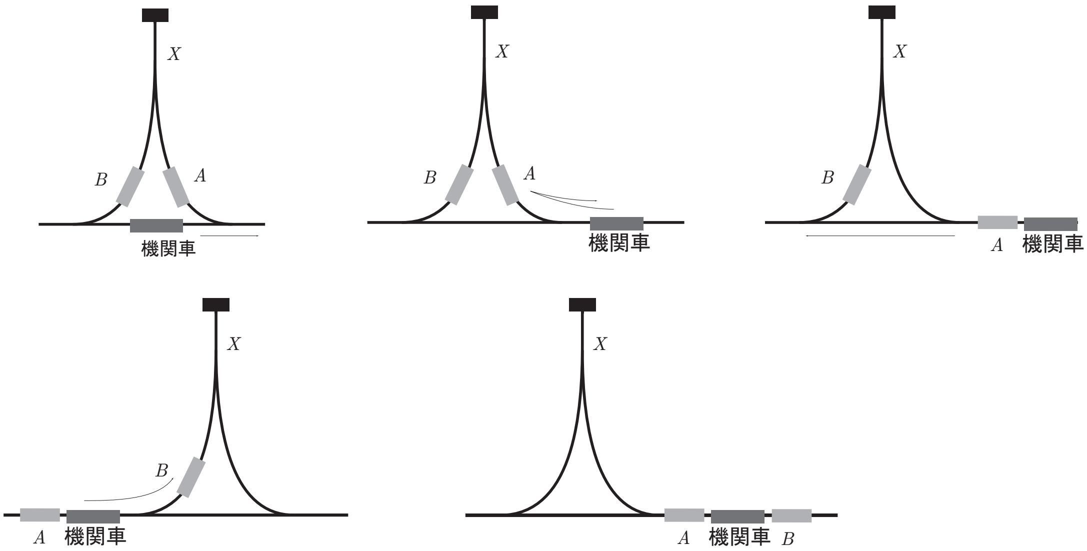


図 11.9　貨車の入れ換え

操作 1 X に貨車を入れて, 反対側から引き出す操作です. たとえば, 図 11.10 の操作です.
この時, 頂点 (A 機関車 B) と (機関車 BA) とを辺で結びます.

操作 2 この操作はポイントを使って行います. (AB 機関車) を図 11.11 のようにポイントを使って (BA 機関車) にします. 同様に, 左側のポイントを使うことにより (機関車 AB) を (機関車 BA) にできます.
各頂点に対して, 上の 2 つの操作で移りあう頂点を考えます.

問 図 11.12 に辺を描き込みグラフを完成させなさい.

(A 機関車 B) の状態から (B 機関車 A) の状態に変えればよいので, それらの頂点を辺で結ぶ操作で辺の個数が最小の行き方がこのクイズの解答になります.

レポート 33 図 11.13 の線路上に貨車 A と B がある. トンネルの長さは貨車の長さと同じで一方から入れて他方から引き出すことができる. ただし機関車は大きいのでこのトンネルを通り抜ける事ができない. 貨車 A と B を入れ換えて機関車を元に戻すにはどうすれば良いでしょうか. グラフを使って考えなさい.

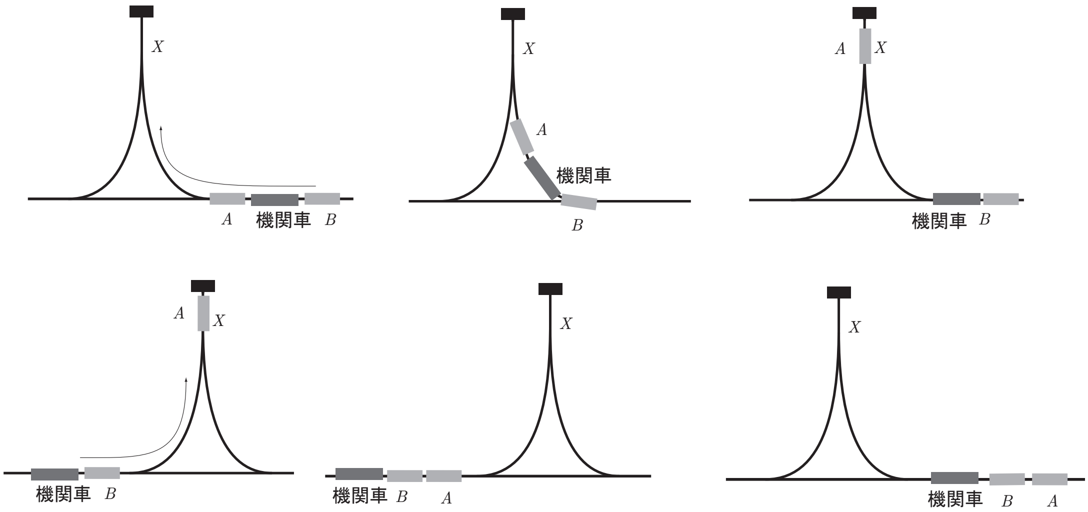


図 11.10　貨車の入れ換え

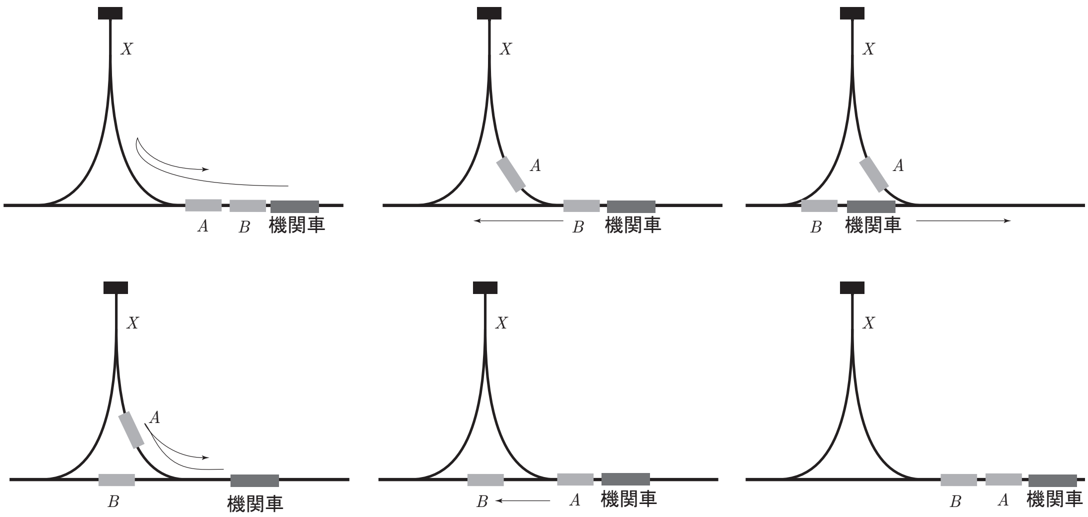


図 11.11　貨車の入れ換え

レポート 34 また, 図 11.14 の線路上に貨車 A と B がある．トンネルの長さは貨車の長さと同じで一方から入れて他方から引き出すことができる．ただし機関車は大きいのでこのトンネルを通り抜ける事ができない．貨車 A と B を入れ換えて機関車を元に戻すにはどうすれば良いでしょうか．グラフを使って考えなさい．

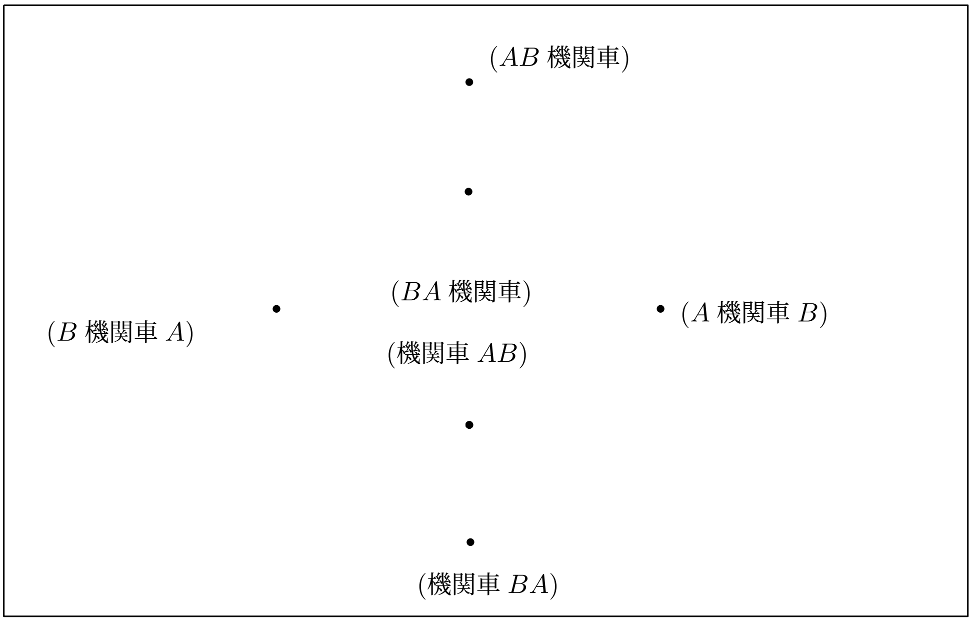


図 11.12　頂点だけのグラフ

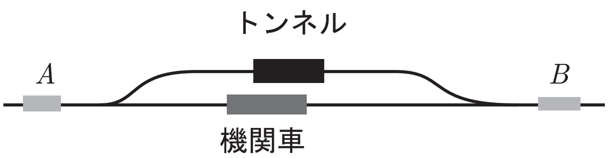


図 11.13　貨車の入れ換え (トンネル編 1)

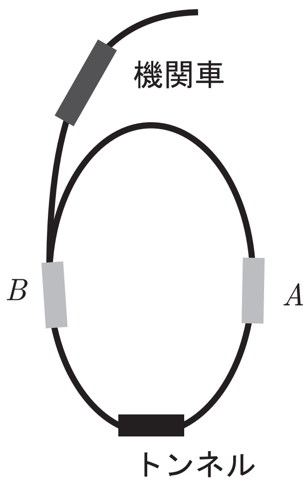


図 11.14　貨車の入れ換え (トンネル編 2)

[レポート 15] 大きい三角形の辺も分割して小さな三角形にわける．図 7.13 参照．以下のようにして, 頂点に色を塗っていく．

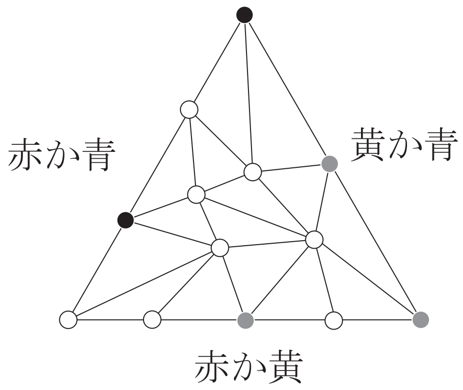


図 7.13

(1) 大きい三角形の辺にある小さい三角形の頂点は, 両端の頂点の 2 色の色で塗る．たとえば, 両端の色が青と赤ならば青と赤だけで塗る．

(2) 大きい三角形の内部の頂点には, 自由に色を塗る．

すると, 赤・青・黄色の三角形が (奇数個) どこかにできることを示せ．

[レポート 15] 解答 分割された大きい三角形からなるグラフ G の双対グラフを $\widetilde{G}$ とする．

7.2 節で説明した, G の色の異なる頂点を結ぶ辺に対応する辺からなる $\widetilde{G}$ の部分グラフを考える．

7.2 節では 3 本だった外にとった頂点に集まる辺の本数を考える．大きい三角形の 1 つの辺の両端の頂点の色は異なる．この辺を分割しているので, 両端の色が異なる分割された辺の本数は奇数である (なぜか．レポート 16 参照)．三角形の辺の本数は 3 より, 外側の頂点に集まる辺の本数は奇数である．

図 7.12 と同様に考えると, 双対グラフ $\widetilde{G}$ の頂点に集まる辺の本数は外側の頂点が 3 以上の奇数, 大きい三角形内では 0, 2 か 3 である．

握手の補題から, 頂点に集まる辺の本数が奇数となる頂点は偶数個ある．したがって, 少なくとも大きい三角形の中に, 3 本の辺が集まる頂点が存在する．この頂点が赤・青・黄色の三角形となる．

したがって, 赤・青・黄色の三角形が少なくとも 1 つ存在する．

定期試験の問題では以上のような解答をしてください．