

1 はじめに

1.1 グラフ理論とは

グラフ理論の初歩について解説します。グラフ理論は双曲線・直線・三角関数とかのグラフを扱うわけでもなくまた、円グラフ・棒グラフとか折れ線グラフとかをあつかう理論でもありません。グラフ理論は、グラフと呼ばれる頂点と辺からなる図形を研究します。グラフの例は、一筆書きの図形やあみだ籤のようなものです。グラフ理論の授業のガイダンスとして、グラフ理論をちょっと垣間見てみよう。

ケーニヒスベルクの7つの橋の問題を聞いたことがあると思う。

図 1.1 の地図は東プロシアの古都ケーニヒスベルグ、旧ソ連のカリーニングラードとして知られる町です。



図 1.1 ケーニヒスベルクの橋 1

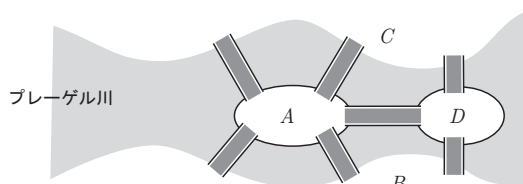


図 1.2 ケーニヒスベルクの橋 2

そこを流れるプレーゲル川は町を中央のクナイホフと呼ぶ島を含む4つの地区に分割していました。そこに7つの橋が図 1.2 のように掛けられていました。この七つの橋を、ちょうど一度ずつ渡る渡り方があるだろうか、と言う事が昔問題になりました。各自、図 1.2 で試してもらいたい。

当時の多くの市民が実際に橋を渡り問題の渡り方を試したが、成功した者はいなかったということです。そこで、この橋を一度ずつ渡る事は不可能だと思われていました。しかし、誰一人として不可能だということを証明する事はできませんでした。ところが、スイス生まれの数学者オイラー (L. Euler, 1707-1783) が数学的にこれを不可能だと証明をしました。

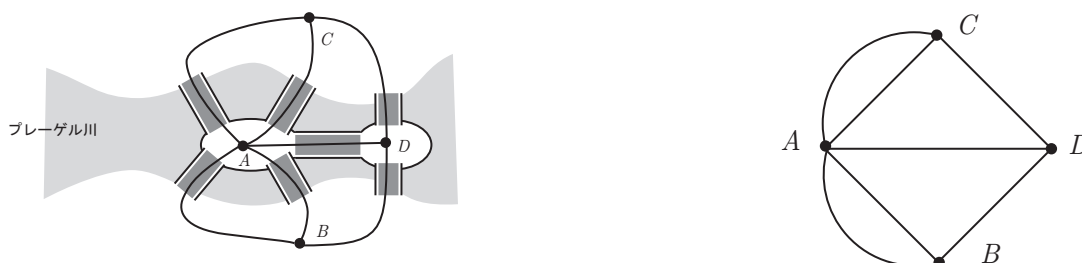


図 1.3 ケーニヒスベルクの橋のグラフ

オイラーは 1736 年の論文の中でこの問題では島の大きさとか橋の長さ・幅を無視してよい事を指摘してい

まず、長さ・幅を無視するという事は、島を頂点とみなし橋を辺と呼ばれる線分または曲線とみなした図形を考える事です。そして、この図形がグラフと呼ばれる物の例になります。距離・面積・体積などの量を測る幾何学とは異なる質を調べる幾何学が生まれました。

ケーニヒスベルクの橋をグラフで表したのが図 1.3 です。ケーニヒスベルクの橋の問題は、このグラフが一筆書きできるかどうかという問題になります。

広辞苑では一筆書きを、線描きの図形を、同じ線を二度以上通らず紙面から筆を離さないで書くこと。また、その書き方、と解説しています。

数学ではこのように要らない情報をいかになくすか、また必要な情報をどのように表すかも重要な点です。

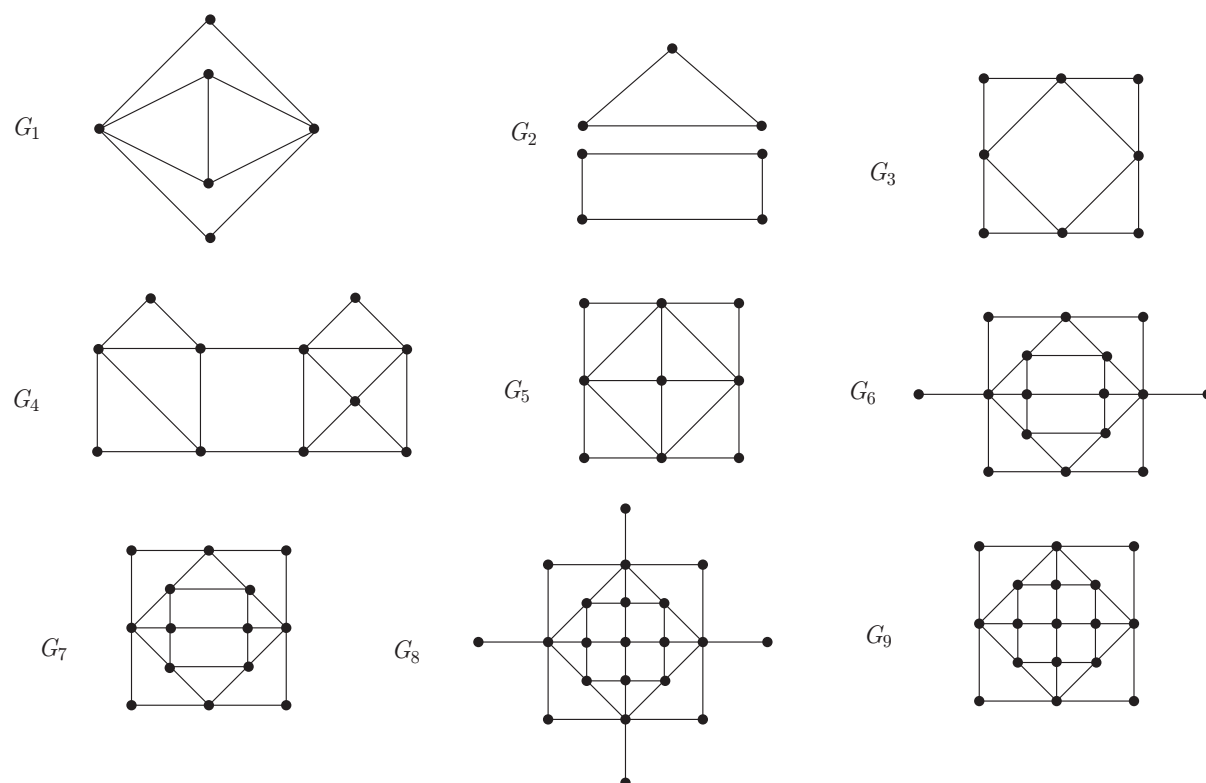


図 1.4 一筆書き

数学の問題では答えを自分で考える事が大事なので、このグラフが一筆書きできるかどうか考えてみよう。しかし、自分で考える事に不慣れな学生はちょっと戸惑うかもしれないので、図 1.4 のグラフがそれぞれ一筆書きできるかどうか考えてみて欲しい。

簡単に一筆書きできるグラフやちょっと考えないとできないグラフ、そしていくら考えてもできないグラフがあると思う。

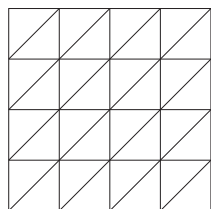
グラフが一筆書きができるかどうかの答えはここではしません。なぜなら、自分で考えて答えをだすほうが良いので(もし、オイラーより早く生まれていればオイラーの代わりに君の名前が歴史に残っていたかもしれない)もう少しヒントをだすので、考えてください。

- (1) 各グラフに対し各頂点に集まっている辺の本数を書き込んでみよう

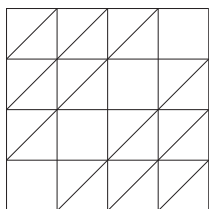
(2) 辺の本数が偶数ならば青、奇数ならば赤で頂点に色をつけよう。

次に一筆書きできたグラフを見てみよう。赤と青はどうなっているだろうか？解答は??章でします。

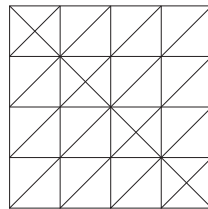
??章で一筆書きを学習すれば、図 1.5 の一筆書きの問題を 5 分以内でできるようになると思う。



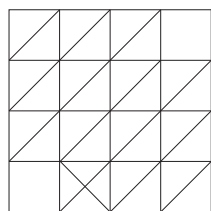
(i)



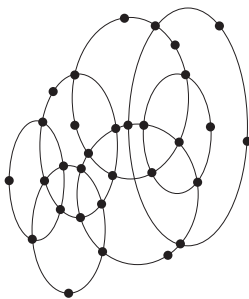
(ii)



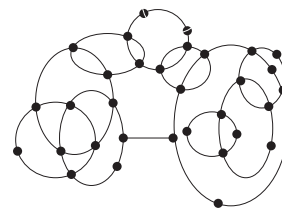
(iii)



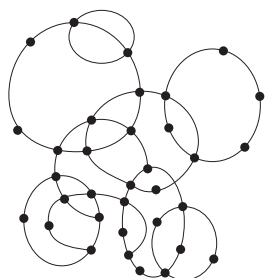
(iv)



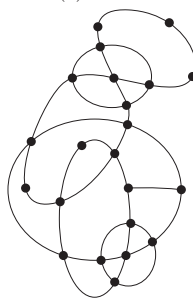
(v)



(vi)



(vii)



(viii)

図 1.5 一筆書きできるだろうか

宿題 1. 大学の建物などで、階段にある電灯のスイッチを考えてみよう。どの階のスイッチでも階段のすべての電灯がついたり消えたりします。このときの電線の回路はどうなっているか考えてください。これもグラフ理論の1つです。

宿題 2. また電車を考えましょう。ドアの外側にちいさな電灯があります。これはドアが開くと電気がつき、すべてのドアが閉まると電気が消えます。この回路も考えてください。

1.2 論理

このグラフ理論では少し論理を知っていた方が理解しやすい。論理とは、「二等辺三角形の二つの底辺は同じ角度である」などや必要条件・十分条件などを少し拡張したものだと思ってください。(理系の学部以外に文学部で論理学と言う授業があります。) 少しおさらいをしておきます。

問 1 ある授業のシラバスに、「3 回以上欠席をすると単位を出さない」と書いてありました。ある学生が「1 回も欠席をしていないから単位はもらえる」と言いました。この学生の言っていることは正しいでしょうか？

問 2 学校で先生が「明日晴れならば運動会をする」と言いました。当日学校に行ってみると運動会をしていました。天気は晴れだと言ってよいでしょうか？

解答 1 正しくありません。試験の点数が 0 点だといくら欠席していなくても単位はできませんね。

解答 2 晴れとは限りません。晴れならば運動会をすると言っていますが晴れでない場合は、するともしないとも言っていないから、運動会をしても良いので、晴れでない可能性もあります。もし、運動会が中止になっていたら、晴れでないことはわかります。

今、わからなくても論理が必要になったところ授業で論理の勉強をします。

1.3 注意

このグラフ理論では、専門用語を覚える手間を少なくするために、なるべく専門用語を使用しない方向で進めます。

追記 この授業では、はさみ、のり、色鉛筆、電卓、定規、コンパスなどをもって来た方が良いかもしれない。