微分方程式 1

2012-12-14

微分方程式に含まれる y の導関数の最大の次数 ($y^{(n)}$ の n の最大値) を階数という.

☚薬学では, 使う微分方程式の多くは 2 階までなので,

y' を含むと $\boxed{}$ 階微分方程式,

y'' を含むと $\boxed{}$ 階微分方程式, と覚えておけば十分である.

【 問 】次の微分方程式の階数を答えよ.

(1) $x^3 y + y'' \sin x - y^5 = y$

(2) $y' x^3 - \log x = 3y''$

(3) $y' = f(x) \cdot g(y)$

薬学で使うおもな微分方程式
$$\begin{cases} \text{変数分離形} & \Rightarrow \quad 0\text{ 次 } - 2\text{ 次反応} \\ 1\text{ 階線形微分方程式} & \\ 2\text{ 階線形微分方程式} & \Rightarrow \quad \text{逐次反応} \end{cases}$$

❄ 化学薬品の反応速度

薬品が反応する速度を反応速度といい濃度 C の時間変化 (時間で微分) で表される. ある反応 $A \longrightarrow B$ において A の濃度を C とすると, 反応速度は

$$v = -\frac{dC_A}{dt}$$

と表される. (A が減少して B が作られているので $-$ がつく) 反応速度 v が A の濃度 C の n 乗に比例するとき, n 次反応という.

$$0\text{ 次反応} \quad v = -\frac{dC}{dt} = kC^0 = k$$

$$1\text{ 次反応} \quad v = -\frac{dC}{dt} = kC^1$$

$$2\text{ 次反応} \quad v = -\frac{dC}{dt} = kC^2$$

【 変数分離形】

$$\boxed{\quad y \text{ の式} \quad}\ \frac{dy}{dx} = \boxed{\quad x \text{ の式} \quad} \quad \text{または} \quad \boxed{\quad y \text{ の式} \quad}\ dy = \boxed{\quad x \text{ の式} \quad}\ dx$$

【 例題 87 】 $y' = Ay^2$ $(A \neq 0$ 定数) を

$\boxed{\quad y \text{ の式} \quad}\ dy = \boxed{\quad x \text{ の式} \quad}\ dx$ で表すと, $\boxed{\qquad\qquad}\ dy = \boxed{\qquad\qquad}\ dx.$

ただし, 分母は 0 でないので, ❶ $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

積分して,

$$\int \left(\boxed{\qquad\qquad\qquad} \right) dy = \int \boxed{\qquad\qquad\qquad}\ dx$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$y = \text{❷}\ \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

❶ でないとき ❸ $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

❷ と ❸ より解は

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$, $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ となる.

【 例題 88 】$(x-1)\dfrac{dy}{dx}+(y-1)=0$ を

$\boxed{y \text{ の式}}\ dy = \boxed{x \text{ の式}}\ dx$ で表すと, $\boxed{}\ dy = \boxed{}\ dx.$

ただし, 分母は 0 でないので, $\boxed{❶}$

積分して, $\displaystyle\int\left(\boxed{}\right)dy=\int\boxed{}\,dx$

$\boxed{} = \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{}$

$\boxed{} = \boxed{}$

よって, $\boxed{❷}$

❶ でないとき, $\boxed{❸}$

❷ と ❸ より解は, $\boxed{}$ となる.

微分方程式の解は $y=f(x)$ の形でなくてよい. 円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ を $y=f(x)$ と表さないのと同じです.

$\log y = \boxed{\text{ある式}}$ がでてきたとき, $\log e = 1$ に注意して

$\log y = \boxed{\text{ある式}} \times \log e$ と変形すれば, $\log y = \log e^{\boxed{\text{ある式}}}$ となる.

したがって, $y = \boxed{}$ である.

1 階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の一般解は,

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + C\right\} \quad (C\text{ は任意定数})$$

となる.

【 例題 92 】(1) $y' + xy = 3x$　y' の係数が 1 に注意.

$p(x) = \boxed{}$, $q(x) = \boxed{}$ より

❶ $\displaystyle\int p(x)\,dx = \boxed{}$.

$e^{-\int p(x)\,dx} = \boxed{}$, $e^{\int p(x)\,dx} q(x) = \boxed{}$ より

❷ $\displaystyle\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,dx = \boxed{} = \boxed{}$.

よって, $y = \boxed{}$

$= \boxed{}$.