復習 次の定積分を求めよ. **2012-11-2**

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^4\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-9}$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

(5) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4\,dx$

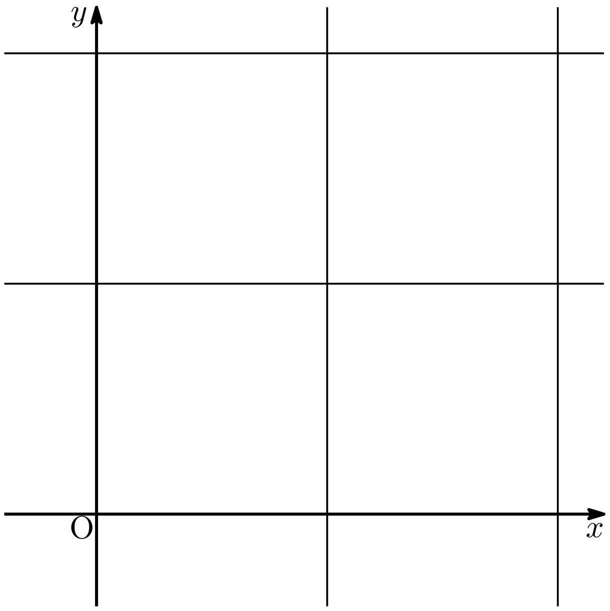
(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

面積と体積

次の曲線または直線によって囲まれる図形の面積を求めよ.

(1) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

Step 1. 交差点の座標を求めて, グラフを書く.



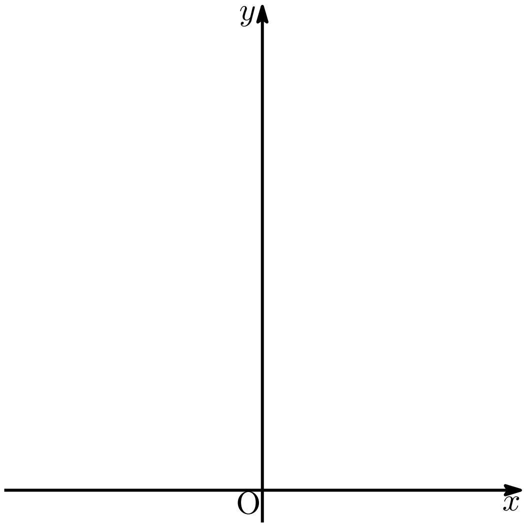
Step 2.

囲まれる面積 $S = \int_{—}^{—} \boxed{\qquad\qquad} \, dx$

$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

(2) $y = e^x$, x 軸, $x = 0$, $x = 1$

Step 1. 交差点の座標を求めて, グラフを書く.

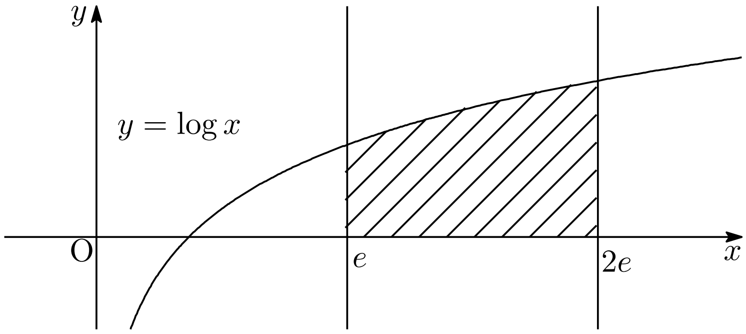


Step 2.

$$\text{囲まれる面積 } S = \int_{\_\_}^{\_\_} \boxed{} \, dx$$

$$= \boxed{}$$

(3) 次の斜線部の面積を求めなさい.



$$\text{囲まれる面積 } S = \int_{\underline{\quad}}^{\overline{\quad}} \boxed{\qquad\qquad\qquad} \, dx$$

定積分の部分積分法より不定積分を先に求める.

$$\int \log x \, dx = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

したがって

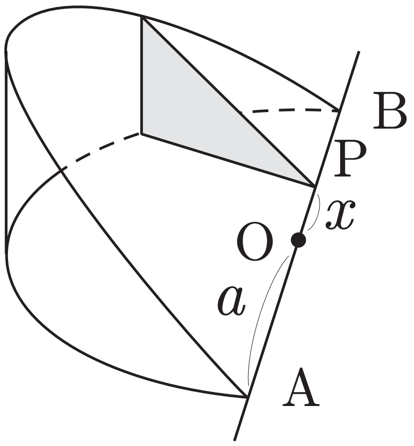
$$\text{囲まれる面積 } S = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

薬学では温度, 圧力, 体積などでよく積分が使われる. さらに, 積分は, 薬学の重要な考え方になっている微分方程式につながります. 薬物動態学での血中濃度-時間曲線下面積 (AUC) も積分を用いて記述されます.

体積

　勤めている製薬会社では新しい形の錠剤を売り出すことになった．下のように直円柱の底面と底面の直径と 30° で交わる平面とで切り取られる形をしている．

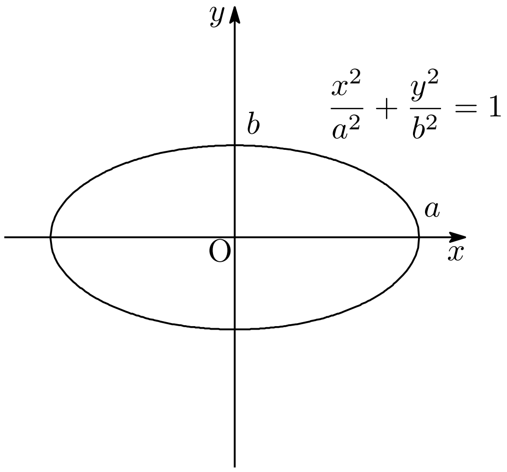
　底面の円の半径を a, 中心を O としたとき O から x 離れたところの断面積 $S(x)$ は $S(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(a^2 - x^2)$ となる．この錠剤の体積を求めよ．

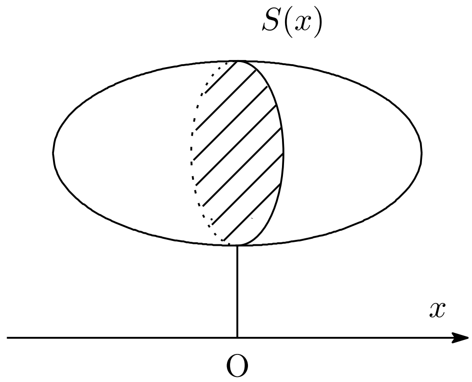


$V = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, dx$

$= \boxed{}$

前の錠剤はとがった形だったので, 飲み込みにくいことがわかった. そこで, 楕円を回転させた形を考えることになった. 錠剤の体積を求めたい.





上の図のように回転体を x 軸上に配置した.

x で切った時の切り口の断面積 $S(x)$ を求めると

$$S(x) = \boxed{\qquad\qquad}$$

となる. したがって, 体積は

$$V = \int_{\_\_}^{\_\_} \boxed{\qquad\qquad}\, dx$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

薬学で扱う微分積分

薬品が反応する速度を反応速度といい濃度 C の時間変化 (時間で微分) で表される.

ある反応 $A \longrightarrow B$ において A の濃度を C_A, B の濃度を C_B とすると, 反応速度は

$$v = -\frac{dC_A}{dt} = \frac{dC_B}{dt}$$

と表される. (A が減少して B が作られているので A の方に $-$ がつく) 反応速度 v が A の濃度 C_A の n 乗に比例するとき, n 次反応という.

$$0\text{ 次反応} \quad v = -\frac{dC_A}{dt} = k(C_A)^0$$

$$1\text{ 次反応} \quad v = -\frac{dC_A}{dt} = k(C_A)^1$$

$$2\text{ 次反応} \quad v = -\frac{dC_A}{dt} = k(C_A)^2$$

濃度を時間で微分すると反応速度が得られるので, 反応速度を積分すると濃度が得られる. ただし, 0 次, 1 次, 2 次により積分する方法が異なる. (ちゃんとした求め方は微分方程式のところで勉強します)

0 次反応の時

$$\int_{C_0}^{C_A(t)} dC_A = -k\int_0^t dt'$$

両辺積分すると

$$\big[C_A\big]_{C_0}^{C_A(t)} = -k\big[t'\big]_0^t$$

$$C_A(t) - C_0 = -k(t-0)$$

$$C_A(t) = C_0 - kt$$

1 次反応の時

$$\int_{C_0}^{C_A(t)} \frac{1}{C_A}\, dC_A = -k \int_0^t dt'$$

両辺積分すると

$$\Big[\log C_A\Big]_{C_0}^{C_A(t)} = -k\Big[t'\Big]_0^t$$

$$\log C_A(t) - \log C_0 = -k(t-0)$$

$$\log \frac{C_A(t)}{C_0} = -kt$$

よって,

$$\frac{C_A(t)}{C_0} = e^{-kt} \qquad \text{すなわち} \qquad C_A = C_0 e^{-kt}$$

2 次反応の時

$$\int_{C_0}^{C_A(t)} \frac{1}{{C_A}^2}\, dC_A = -k \int_0^t dt'$$

両辺積分すると

$$\Big[-\frac{1}{C_A}\Big]_{C_0}^{C_A(t)} = -k\Big[t'\Big]_0^t$$

$$-\frac{1}{C_A(t)} - \left(-\frac{1}{C_0}\right) = -k(t-0)$$

$$\frac{1}{C_A(t)} = \frac{1}{C_0} + kt$$

薬学 (物理・化学) でつかう積分は dx が $\mathrm{d}x$ であるが, このプリントは数学なので dx と表記する. 1 次反応は半減期の計算でよく使われる.

結果だけ暗記している薬大生が多いのも事実であるが.