

結び目のゴルディアン複体について

内田 吉昭¹ (山形大 理) , 平澤 美可三² (発表と文責)(大阪大 理)

ABSTRACT. In this note, we define the *Gordian complex* of the space of oriented knot types, and announce the following: Let K_0 and K_1 be any pair of knot types such that the Gordian distance $d_G(K_0, K_1) = 1$. Then there exists a family of knot types $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ such that $d_G(K_i, K_j) = 1$ for any $i \neq j$.

1. ゴルディアン複体の定義と性質

本稿では結び目とは3次元球面 S^3 内の向き付けられた結び目のこととします。結び目のイソトピー類全体のなす空間を考え、そこに次のようにして複体の構造を入れ、それを結び目のゴルディアン複体とよびます。

定義 1.1. 結び目のゴルディアン複体 \mathcal{G} とは、次で定義される単体的複体である。

1. \mathcal{G} の頂点集合 $\mathcal{G}^{(0)}$ は結び目のイソトピー類全体からなる集合。
2. \mathcal{G} の $k+1$ 個の頂点 $\{K_0, K_1, \dots, K_n\}$ は任意の $i \neq j$ に対して、 K_i と K_j が1回の交点交換で移り合うとき n -単体を張る。

任意のふたつの結び目は交点交換を有限回行うことで移り合うので複体 \mathcal{G} は連結です。また結び目のゴルディアン距離 $d_G(K, K')$ は K と K' を結ぶ edge path の長さの最小値として定義されます。

例 1.2. 自明結び目 0_1 、三葉結び目 3_1 、結び目 5_2 及び結び目 8_{14} に図のように向きをいれたものは3単体を張ります。

¹1999年度 文部省在外研究員 (若手) としてカナダ・トロント大学 (村杉邦男教授) 滞在中の成果

²日本学術振興会特別研究員 (PD)

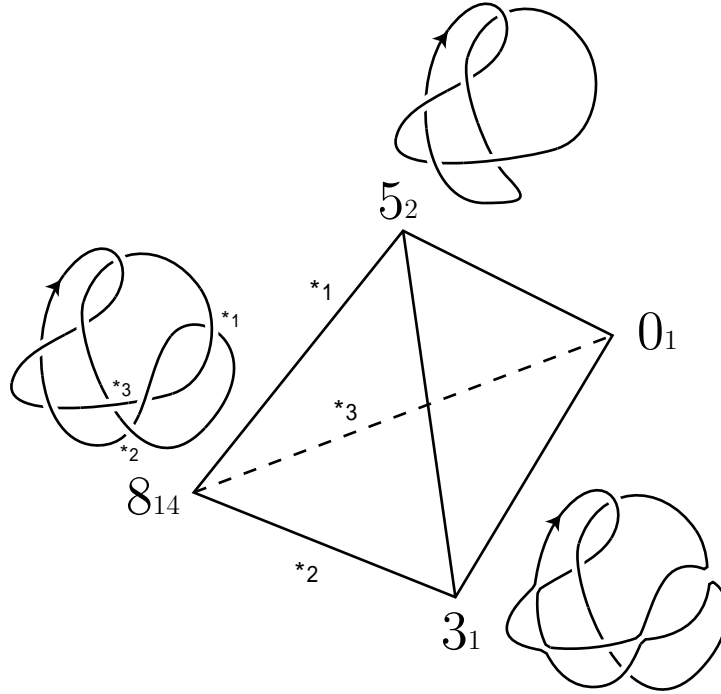


Figure 1.1

次の定理を示すことができました .

定理 1.3. *For any 1-simplex e of the Gordian complex, there exists an arbitrarily high dimensional simplex σ that contains e .*

系として次が得られます .

系 1.4. *For any knot K_0 , there exists an infinite family of knots K_0, K_1, \dots such that the Gordian distance $d_G(K_i, K_j) = 1$, for any $i \neq j$.*

2. 証明のアイデア

定理 1.3 の証明のアイデアを示します . まず、 L_0, L_1 をゴルディアン距離が 1 の結び目とします . これらは Figure 2.1 のように表されます . ここで、どのペアをとってもゴルディアン距離が 1 となるような結び目の族を構成するわけですが、 K_n として Figure 2.1 のものにとります . ここでは $n = 3$ としてあります . 図中の $*_\alpha, *_\beta, *_1, *_2$ とラベルのふられた交点の上下を入れ替えれば、 L_0, L_1, K_1, K_2 が得られることはすぐに確認できます . 後はこれらの結び目が全て異なることを示せばよいわけですが、 K_n たちのアレクサンダー多項式はすべて一致してしまいます . そこで、河内先生によって定義された [2] coefficient

polynomials C_n で特に $n = 0$ としたものを使いました．簡単のためにそのスケイン多項式を絡み目 K に対して $C(K)$ で表すことにします．それは以下の性質をもちます．

1. $C(\text{自明結び目}) = 1,$
2. $x C(\text{図}) - C(\text{図}) = C(\text{図}),$
3. 2成分絡み目 $L = L_1 \cup L_2$ に対して、 $C(L) = (x - 1)x^{-\lambda} C(L_1)C(L_2),$
ただし λ は L_1 と L_2 の絡み数．

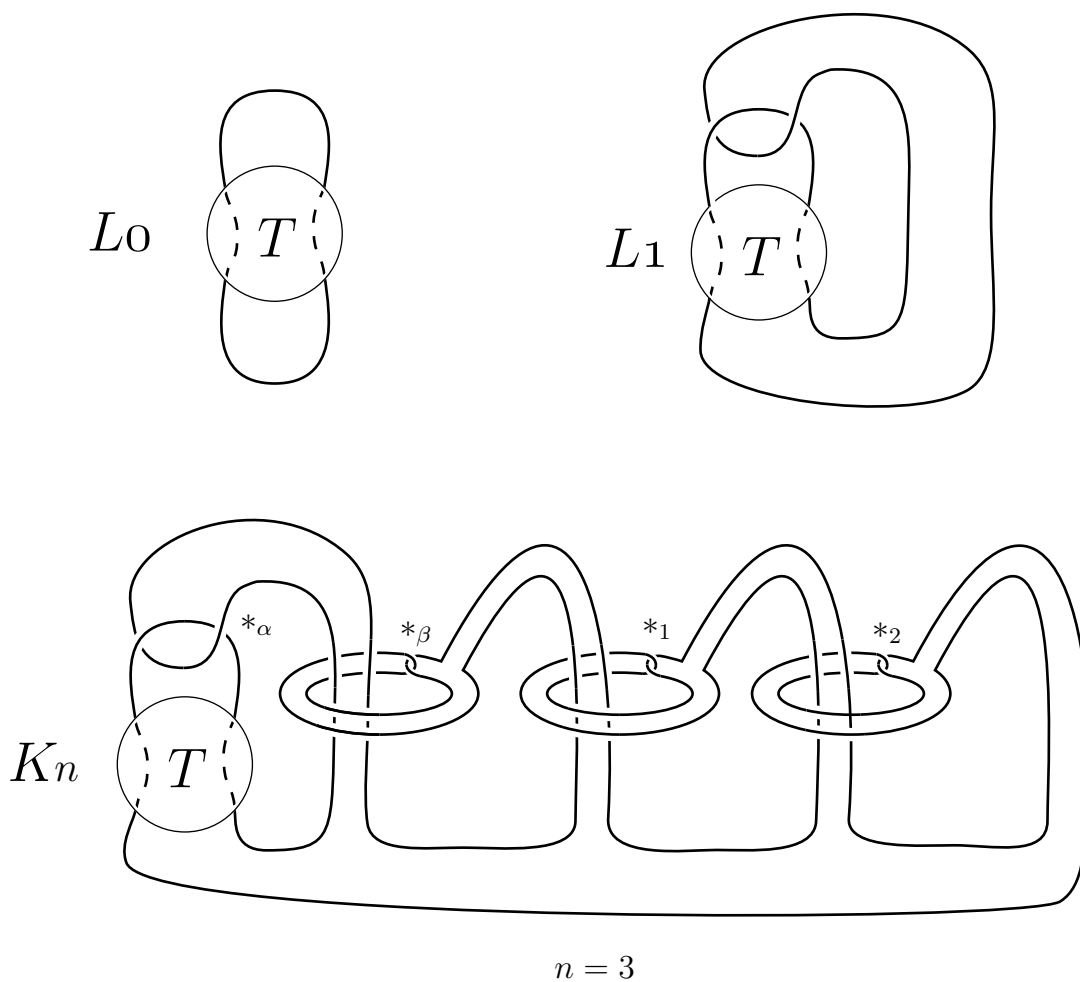


Figure 2.2

これにより K_n たちが区別でき、証明が完成しました．詳しくはプレプリント[1] をご参照ください．

REFERENCES

- [1] M. Hirasawa and Y. Uchida, *The Gordian complex of knots*, in preparation
- [2] A. Kawauchi, *On coefficient polynomials of the skein polynomial of an oriented link*, Kobe J. Math. 11 (1994), 49 – 68

990-8560 山形市小白川町 1-4-12
山形大学理学部数理科学
yuchida@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

560-0043 豊中市待兼山町 1-1
大阪大学大学院理学研究科
hirasawa@math.sci.osaka-u.ac.jp