5　一筆書き

1 章でもしましたが、一筆書きを考えます．一筆書きとはグラフですべての辺をまわり同じ辺は 2 回以上通らない書き方があるかという問題です．

5.1　一筆書きに挑戦

そこで、次の図形に対して一筆書きをしてみてください．ただし、中には一筆書きできない図形もあるから注意が必要です．(制限時間 5 分)

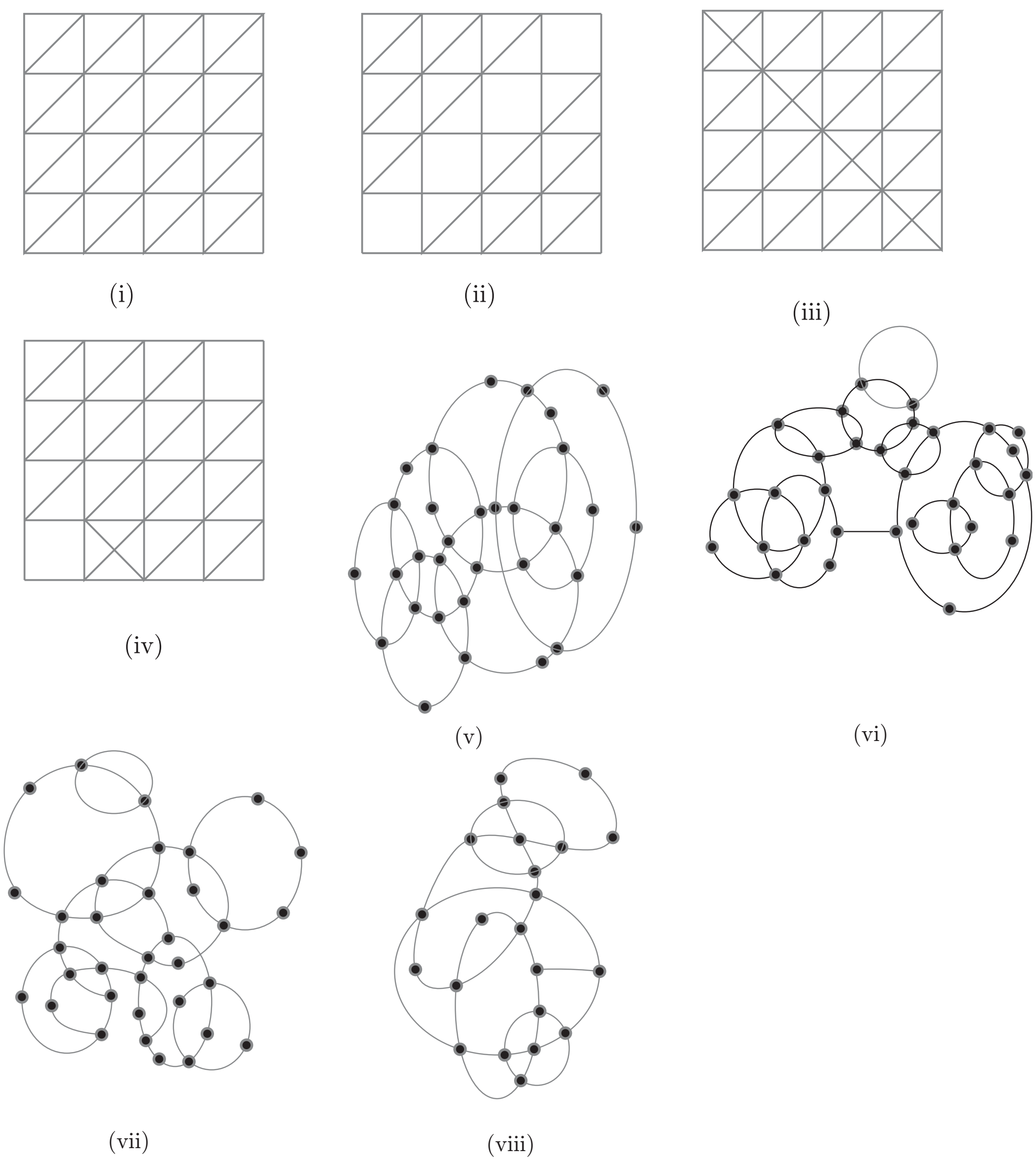


図 30: 一筆書きをしてみよう

今日の授業では、これらの図形を一筆書きできるかどうか判断して一筆書きできる図形に対しては、どうすれば一筆書きができるかを教えます.

5.2 一筆書き

図 30 の複雑なグラフで考えると大変なので、少し簡単なグラフで考える事にしよう．ガイダンスでもしましたが、図 31 のグラフに対して一筆書きできるかどうか調べてください.

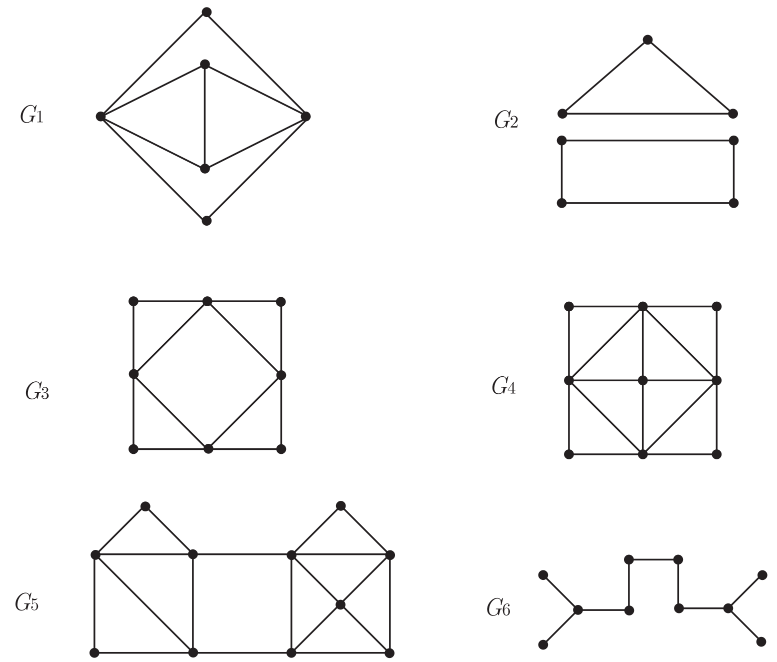


図 31: 再び一筆書き

G_1、G_3、G_5 は一筆書きできるグラフで残りはできないグラフです.

まず, 連結でないと一筆書きできないので、G_2 はできない事にすぐにわかります.

G_3 と G_4 ができない理由はあとでのべることにして、G_1、G_3、G_5 を考えましょう．G_3 が一筆書きできるのは簡単だったはずですが、G_1 と G_5 はちょっと困難だったはずです．G_1 と G_5 は始点と終点となる頂点は実は決まっているのです．その決まっている頂点から出発しないと一筆書きできません．それに対し G_3 はどの頂点から出発してもヘマをしない限り一筆書きできます.

理由を考えるために図 31 の各頂点に次数を書き入れ偶数の次数を持つ頂点を青で奇数のを赤で塗りましょう．G_1 と G_5 は赤が 2 つ、G_4 と G_6 は 3 つ以上赤があり

ますね．つぎに一筆書きした時に出発点と終点を除くところではどうなっていますか？

そこでは入ってくる辺と出て行く辺の対があるので頂点の次数は偶数になることがわかります．出発点と終点ではどうなるのでしょう．出発点と終点が同じならばそこでの次数はまた偶数となります．異なる場合は次数は奇数になるのがわかりますね．よって、G_1 と G_5 では頂点の次数が奇数 (赤い頂点) から出発しまた赤い頂点で終わらないといけなかったのです．G_3 はすべての頂点の次数が偶数なのでヘマをしない限りどの頂点から出発しても一筆書きできるのです.

では, すべての頂点の次数が偶数か奇数が 2 つでその他はすべて偶数となるグラフは一筆書き可能でしょうか？すぐにわかるのはグラフは連結でなければならないということです.

次の定理が言えることがわかっています.

定理 5.2.1 連結なグラフ G が一筆書き可能 $\leftrightarrow$ すべての頂点の次数が偶数か 2 つの頂点で奇数で残りはすべて偶数.

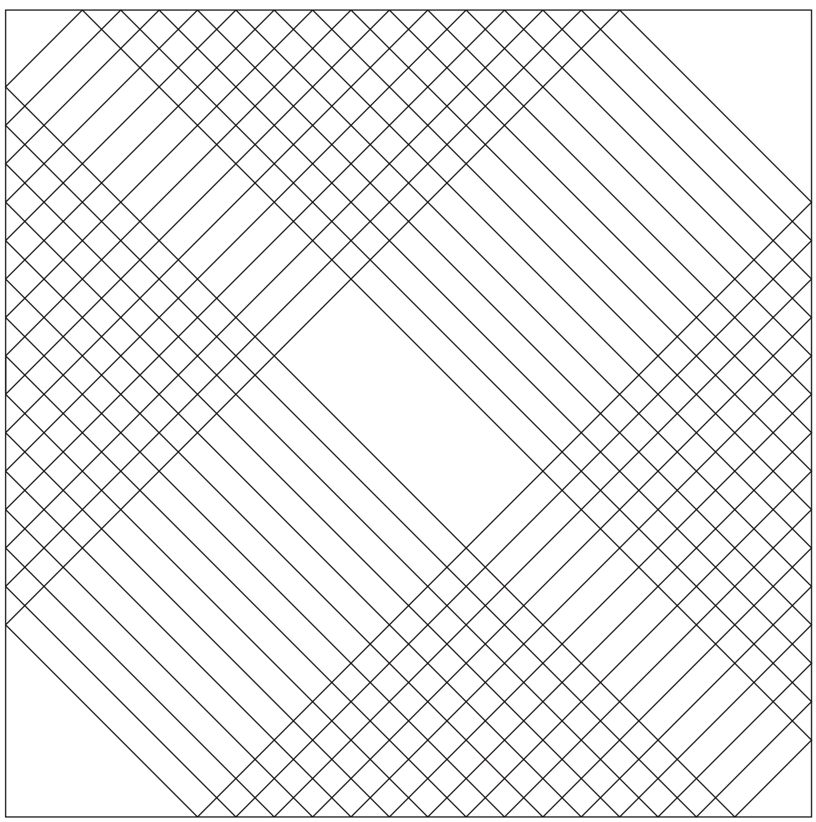


図 32: 一筆書き

図 32 で一筆書きするためにはどうすればいいでしょうか.

5.3 一筆書きの仕方

初めにすべての次数が偶数の時を考えます．この時、好きな頂点を選んで一筆書きをしていきます．この時もうこれ以上一筆書きできないという状態はどのような状態でしょうか.

この様な場合は具体例を自分で作って実験をするのが理解する上で非常に大事です.

簡単な例を作っておきましたので考えてみましょう.

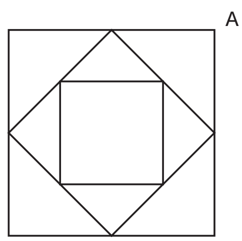


図 33: すべての頂点の次数が偶数

図 33 で実験してみます．A から出発して外側の正方形を 1 周して見ましょう．元に戻った A でもうこれ以上進めないことがわかりますね.

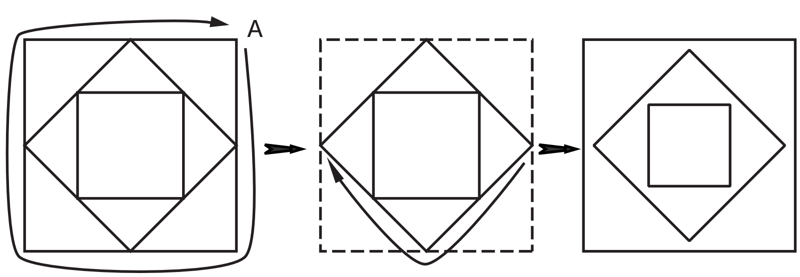


図 34: グラフの分割

一つの輪ができた事に気がついたでしょうか．でも、これではまだ通っていない所があるので一筆書きできた事にはなりませんね.

そこで、まだ通過していない所に注目します．すべての頂点の次数は偶数だという事に気がつきましたか．(偶数 – 偶数 = 偶数という事実を使っています．) なので、また同じ事を行なうことができます．図 34

すると、このグラフはいくつかの輪に分解されることがわかります.

では、これらのいくつかの輪からどうすれば一筆書きができるのでしょうか？

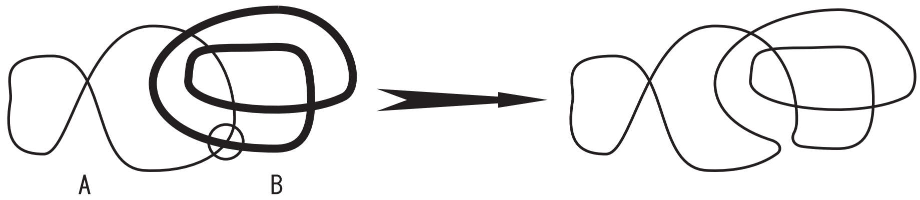


図 35: 輪をまとめて

簡単のために輪が 2 つある場合を考えましょう．図 35 の様に回り道をすれば 2 つの輪が 1 つの輪に変わります.

この仕組みが理解できれば輪っかがいくつあっても大丈夫ですね．よって、すべての頂点の次数が偶数のグラフはどんなグラフでも一筆書き可能となります．図 30 の (ii) (v) 図 31 の G_3 がそうなので各自もう一度この理論にしたがって一筆書きしてみてください.

今回はかなり簡単に一筆書きできたと思います.

次に頂点の次数が 2 つ奇数でそれ以外は偶数の時はどうなるでしょうか．新しい議論を 1 から始めないといけないでしょうか.

図 30 (iv) のグラフで具体的に考えてみます．仮想的に辺を 1 本図 36 の様に奇数次数の 2 つの頂点を結ぶ様に付け加えます．(この辺は仮想的に付け加えてあるので他の辺の上を通ってもよい事に注意してください．また、他の辺とは交わりができない事に注意してください．) すると、すべての頂点の次数は偶数になりました．(奇数 + 奇数 = 偶数ということを使っています．)

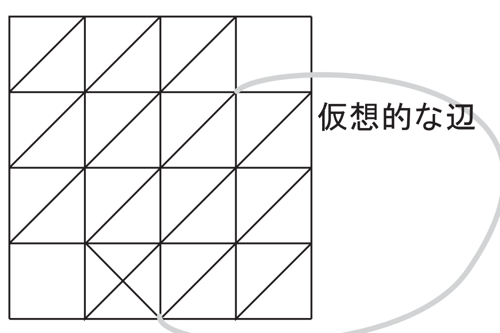


図 36: 仮想的な辺

するとこの新しいグラフはすべての頂点の次数が偶数となり君達が一筆書きできるグラフなので一筆書きしてみましょう.

そして、付け加えた辺を消してやれば元のグラフの一筆書きが得られました.

以上のことを理解してやればどんなグラフでも一筆書きできるかどうかわかるし一筆書きできるグラフは一筆書きができるようになりました.

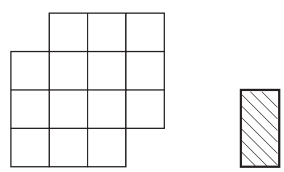
レポート 9 一筆書きできる複雑なグラフを3つ以上作れ

レポート 10 一筆書きできない複雑なグラフを3つ以上つくり、なぜ一筆書きできないかを述べよ.

5.4 来週の授業に向けて

レポート 11 次のような部屋があった．ここに畳を敷き詰めたい．敷き詰める事はできるだろうか？

[このレポートの締め切りは来週の授業前までです．授業中に解答をするので、後だとあまり意味がなくなりますね．]



また、部屋が大きくなって次のようになった．畳を敷き詰める事はできるだろうか？