4　グラフの基本概念

4.1　位数とサイズ

グラフ G の**頂点の数**を G の**位数**といい、$|G|$ [3]で表わす．G の**辺**の数を G の**サイズ**といい $e(G)$ で表わす．

問 図 22 のグラフの位数とサイズを求めよ．

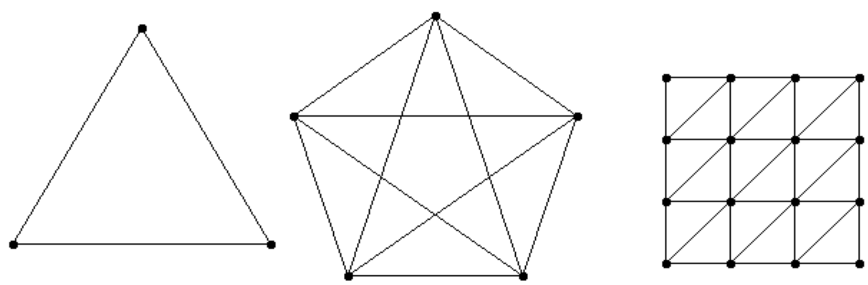


図 22: 位数とサイズ

多重辺とループ[4]を含まない位数が 3 のグラフは (連結でないのも含めて) 図 23 ですべてである．(120 度の回転で移るものは同じと考えている．)

また、図 23 の右 2 つのグラフを連結なグラフといい、左 2 つを非連結なグラフと言う．数学的な定義はちゃんとあるのだけどこの授業では見た目で分れば良い事にします．また、普通グラフと言えば連結なグラフを考える事が多いです．

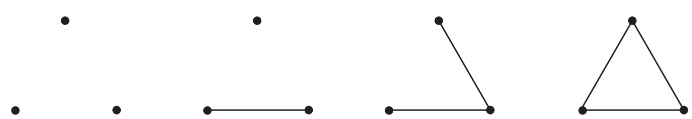
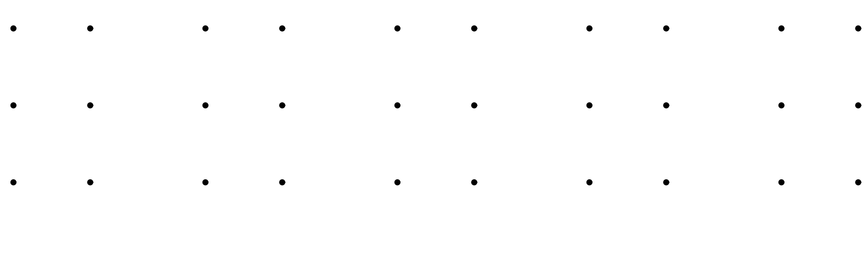


図 23: 位数 3 のグラフ

問 位数 4 のグラフをすべて求めよ．



[3]数学では $|\ \ |$ は要素の数を表わす場合が多いです．$|A|$ は A という集合の数を意味します．

[4]定義は授業でします．

レポート 6 マッチ棒の頭とお尻をグラフの頂点と思う事にしよう．マッチ棒 1 本と 2 本の時はグラフは 1 つしか作れない事が直にわかります．3 本のときは 3 個、4 本の時は 5 個です．図 24 参照．では、5 本と 6 本の時ではそれぞれ何個作る事ができますか？ここでは、マッチ棒の本数がグラフのサイズになっている事がわかりますね．

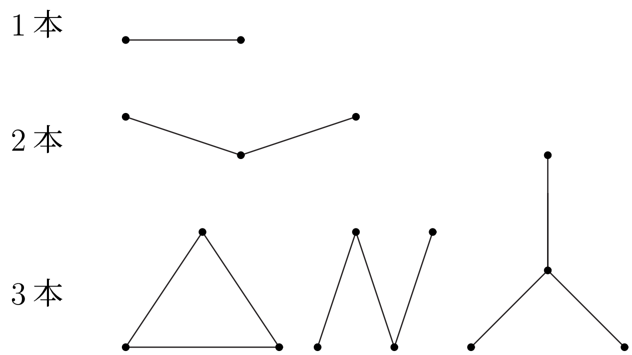


図 24: マッチ棒のグラフ

4.2 頂点の次数

図 25 のグラフ G を見てみよう．頂点の所に数字が書いてあります．何を意味しているのか考えよう．

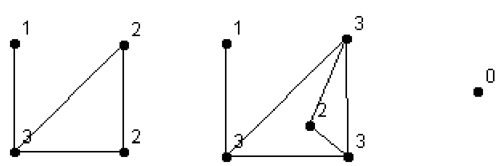


図 25: グラフの次数

これは、グラフの頂点から出ている辺の数だと言うことがわかります．この数のことを (その頂点の) **次数**といいます．

練習 p.5 の 図 7 のグラフと前のページのグラフについて，次数を求めよ．

つぎにグラフのサイズを計算してみましょう．次数とサイズとの間にはなにか関係がないか考えてみてください．

図 22 の 3 つのグラフに対してつぎの表を埋めなさい．

サイズ			
頂点の次数の和			

上の表からわかるように次のことがいえます.

補題 4.2.1 (握手の補題) 頂点の次数の和 = グラフのサイズ (辺数) の 2 倍

練習 図 25 のグラフで握手の補題が成り立つ事を確かめよ．また、マッチ棒で作ったグラフに対しても確めよ.

簡単なことだけど、いろいろな場所で使う事になります.

グラフ G において、すべての頂点の次数が r であるとき G を r-**正規グラフ** **(r-regular graph)** という.

レポート 7
2-正規グラフ,　3-正規グラフ,　4-正規グラフをたくさん作れ.

問 頂点数（＝位数）が 5 の 3-正規グラフは作ることができるか.

実は位数が 5 の 3-正規グラフは存在しない事が次の系からわかります.

系 4.2.1 すべてのグラフで、奇数次数となる頂点は偶数個ある.

これは、偶数足す偶数は偶数、奇数足す奇数は偶数、偶数足す奇数は奇数がわかっていれば理解できますね.

練習 (1) 2.2 章で出てきたグラフに対して奇数次数の頂点数は偶数である事を確めよ.
(2) 奇数次数をもつグラフを 3 つ描き，それらの奇数次数の頂点が偶数であることを確かめよ

完全グラフと言う正規グラフを考える．**完全グラフ**とはどの二つの頂点も一本の辺で結ばれているようなグラフである．頂点数 (位数) が n のとき K_n で表わす．この K はポーランドの数学者クラトウスキー (Kuratowski) の頭文字です.
図 26 に K_1 から K_5 までを描いておく.

練習 K_6, K_7, K_8 を描け.

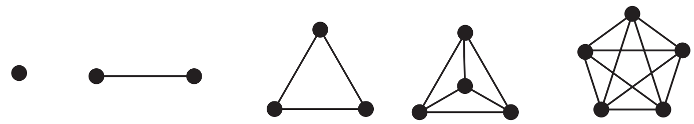


図 26: 完全グラフ

問 K_n のサイズと位数を求めよ.

問 コンピュータができる学生は K_n を作図するプログラムを作れ.

4.3 部分グラフ (subgraph)

グラフ G に含まれるグラフを G の**部分グラフ**という.

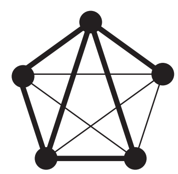


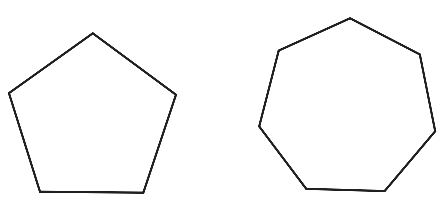
図 27: 部分グラフ

図 27 の太線のグラフは G の部分グラフになっています．便宜的になにもない集合 (空集合) と G も G の部分集合と考えることがあります.

4.4 五角形

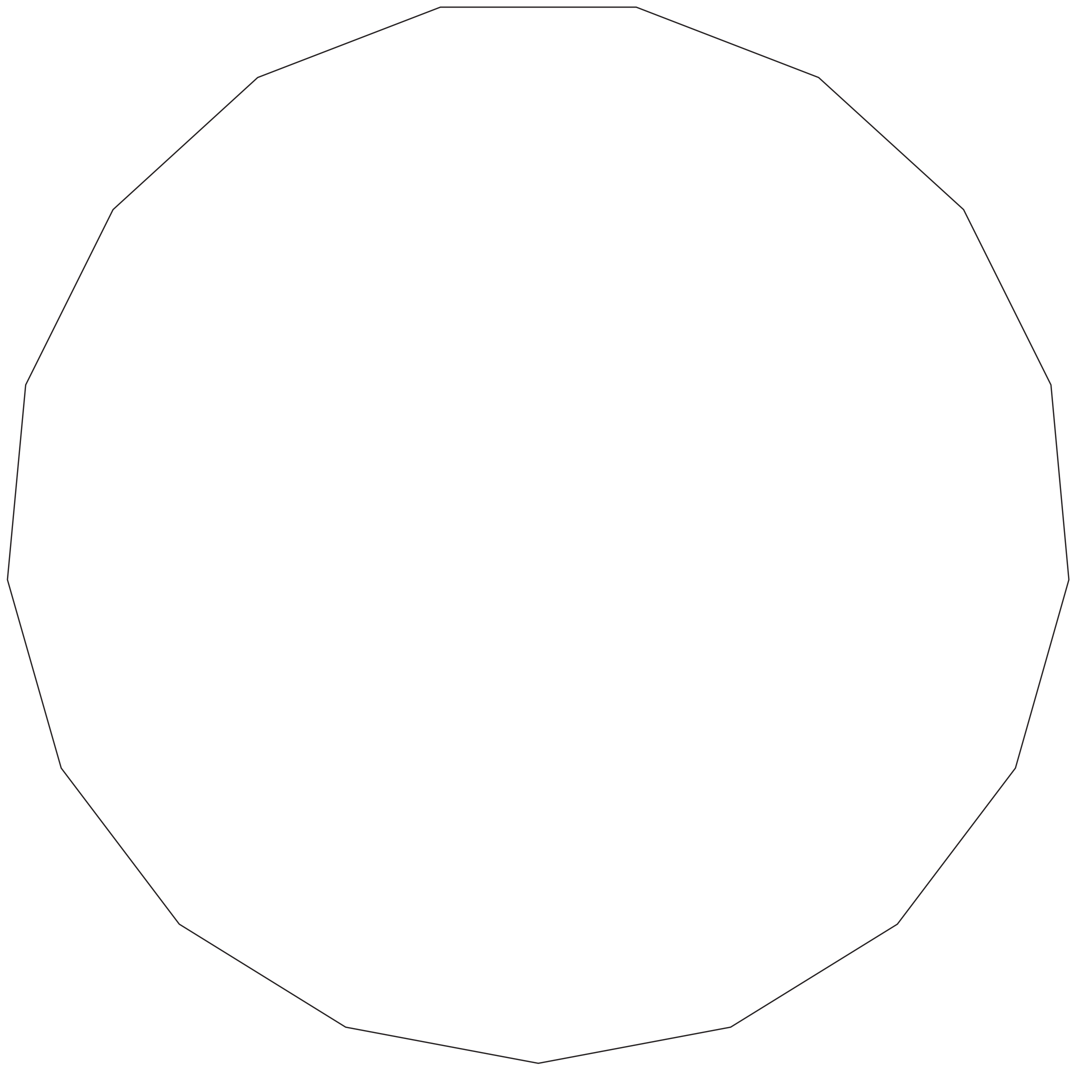
この授業ではたまに五角形がでてくる．ノートにはフリーハンドで描いていると思うがきれいに描くのにはどうすれば良いのでしょう？コンパスと定規だけで描くことができます．正三角形、正方形、正六角形、も作図可能です．でも、正七角形、正九角形は作図（コンパスと定規だけでは）できません．いろいろな機械を使えば可能ですが．正十七角形も作図可能です.

レポート 8 正三角形、正方形、正五角形、正六角形をコンパスと定規で作図する方法わかりやすくを示せ.



正五角形と正七角形

正五角形と正七角形を描いてみました．作図法とかなぜ正七角形は描けないなど、興味のある学生は図書館とかで調べてみてください．なかには折り紙で正五角形の作り方とかあります．正 17 角形をがんばって描いてみました．あまり小さいと円と区別つかなくなります.



正十七角形

4.5　1・2・3 の三角形

図 28 に大きな三角形を小さな三角形で分割した図が描いてある[5]．大きな三角形の各頂点には 1、2、3 と番号が振ってある．中の小さな三角形の頂点にも 1、2、3 と番号を振っていく．ただし、一つの小さな三角形の頂点に 1、2、3 がそろってはいけないとする（このような三角形を 1・2・3 の三角形と呼ぼう）．各自 1、2、3 が小さな三角形にそろわないように振ることができるかどうか確かめて欲しい.

[5]根上生也著 グラフ理論 3 段階 遊星社より

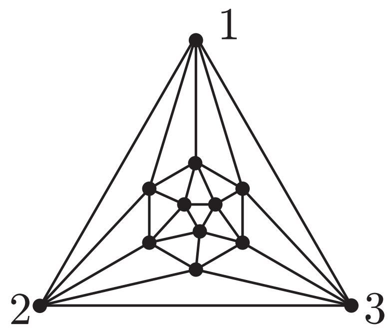


図 28: 三角形

どのように、番号付けしてもどうしても 1・2・3 の三角形ができただろう.

定理 4.5.1 (1・2・3 の三角形) どんな三角形の分割に対しても、また、どのように 1, 2, 3 を振っていっても 1・2・3 の三角形ができる.

次に 図 29 に対して同じようにやってみよう.

練習 各自いくつか三角形をつくりそれに対して 1・2・3 の三角形をおこなえ.

どのような三角形でも 1・2・3 の三角形ができないようにすることは不可能みたいなことがわかると思う. では、この不可能みたいな事を不可能だと示してみよう.

多くの学生は具体的に与えられた三角形に対してだと（場合わけが多くなるかもしれないが）証明できるでしょう. しかし、どんな場合でも 1, 2, 3 の三角形ができるという証明はどうすればよいのでしょうか.

○大きな三角形の外側に１つ頂点をとる
○小さな三角形の中心に１つ頂点をとる
○辺で隣あった三角形を考える. 辺の両端の番号に注目して異なる番号の時にその三角形の頂点を辺で結ぶ.

すると新しいグラフができました.

実験 図 29 に対して上の方法で新しいグラフを書き入れて見なさい

この新しいグラフを見て気がつくことを述べてください.

問 (1) 頂点の次数はどんな条件がつきますか.
(2) 次数が 0, 1, 2, 3 となる頂点はありますか.

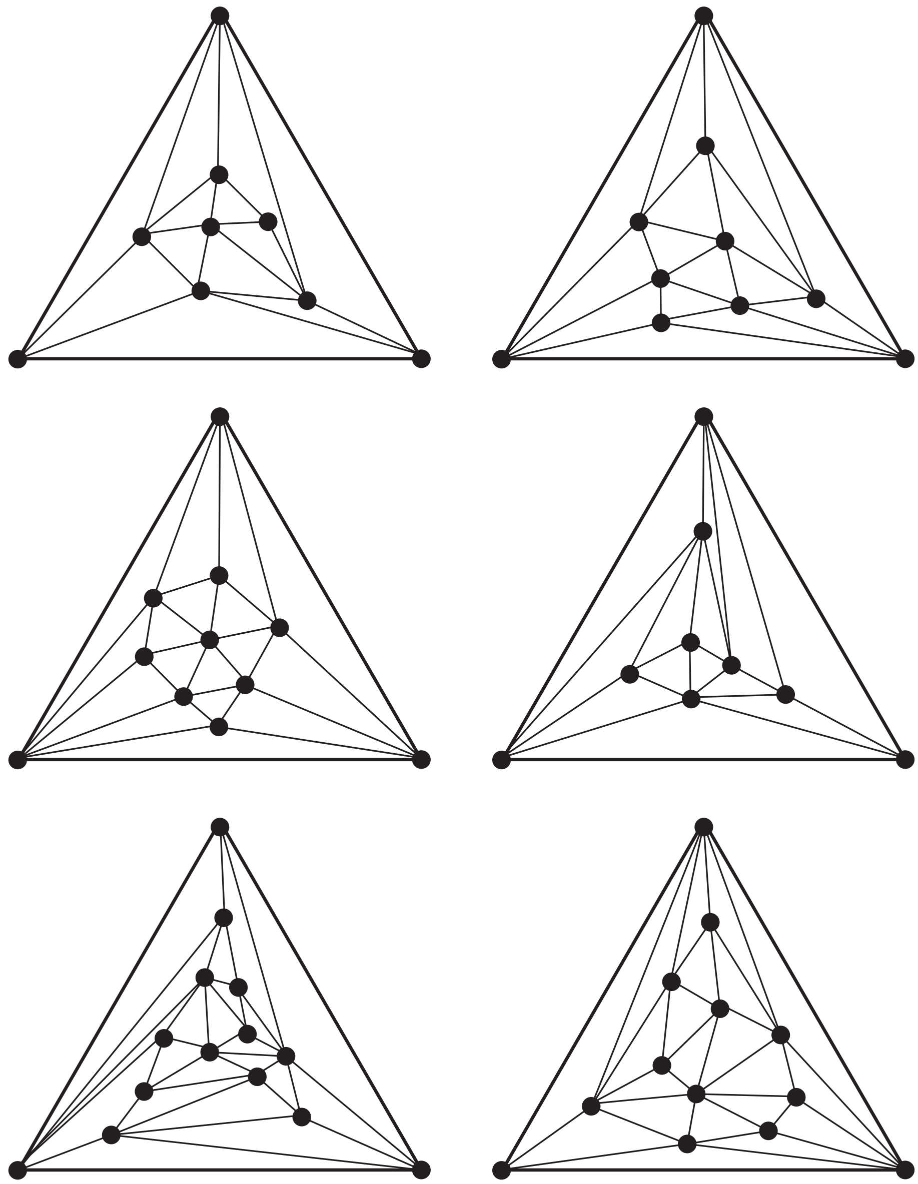


図 29: たくさんの１・２・３の三角形

上の考察により次数が 1 の頂点はないことがわかる．すると頂点の次数は「0, 2, 3」のどれかだという事がわかる．また一番外側では次数が 3 の頂点（大きな三角形に対応）があることがわかる．系 4.2.1 より奇数次数の頂点は偶数なので次数が 3 の頂点がすくなくとももうひとつあることがわかる．