

9 三色の三角形

9.1 三角形の頂点に色を塗って

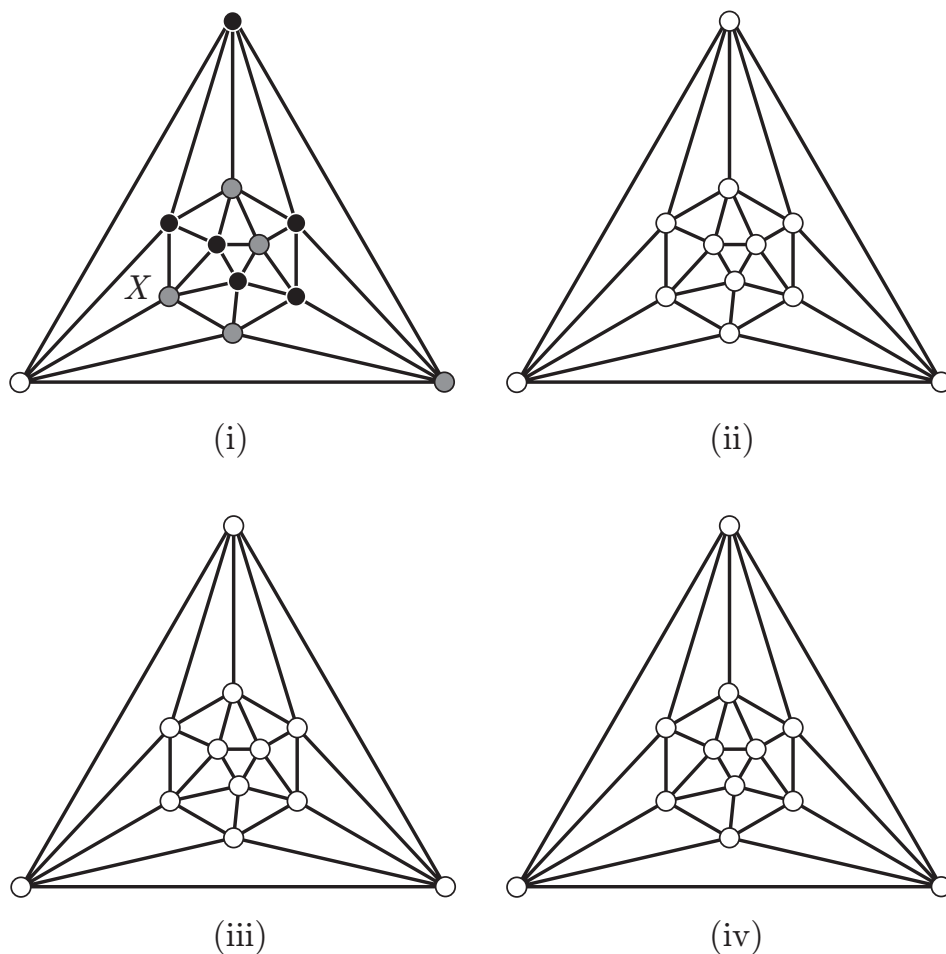


図 9.1: 三角形

図 9.1 に大きな三角形を小さな三角形で分割したグラフが描いてあります²⁶ . 大きな三角形の各頂点には 赤、青、黄の色がついている . 中の小さな三角形の頂点に 赤、青、黄の色を塗っていく . 頂点に赤、青、黄がそろっている小さな三角形を 赤・青・黄色の三角形と呼ぶ . 赤・青・黄色の三角形ができないように色を塗ることができるかどうか考えたい . 図 9.1(i) のグラフでは X の所に 赤・青・黄色の三角形ができています . 図 9.1(ii)–(iv) の 3 つグラフに対して実際に色を塗って 赤・青・黄色の三角形ができるかどうか確かめてほしい .

どのように、色を塗っても 赤・青・黄色の三角形ができたはずです .

²⁶根上生也著 グラフ理論 3 段階 遊星社より改題

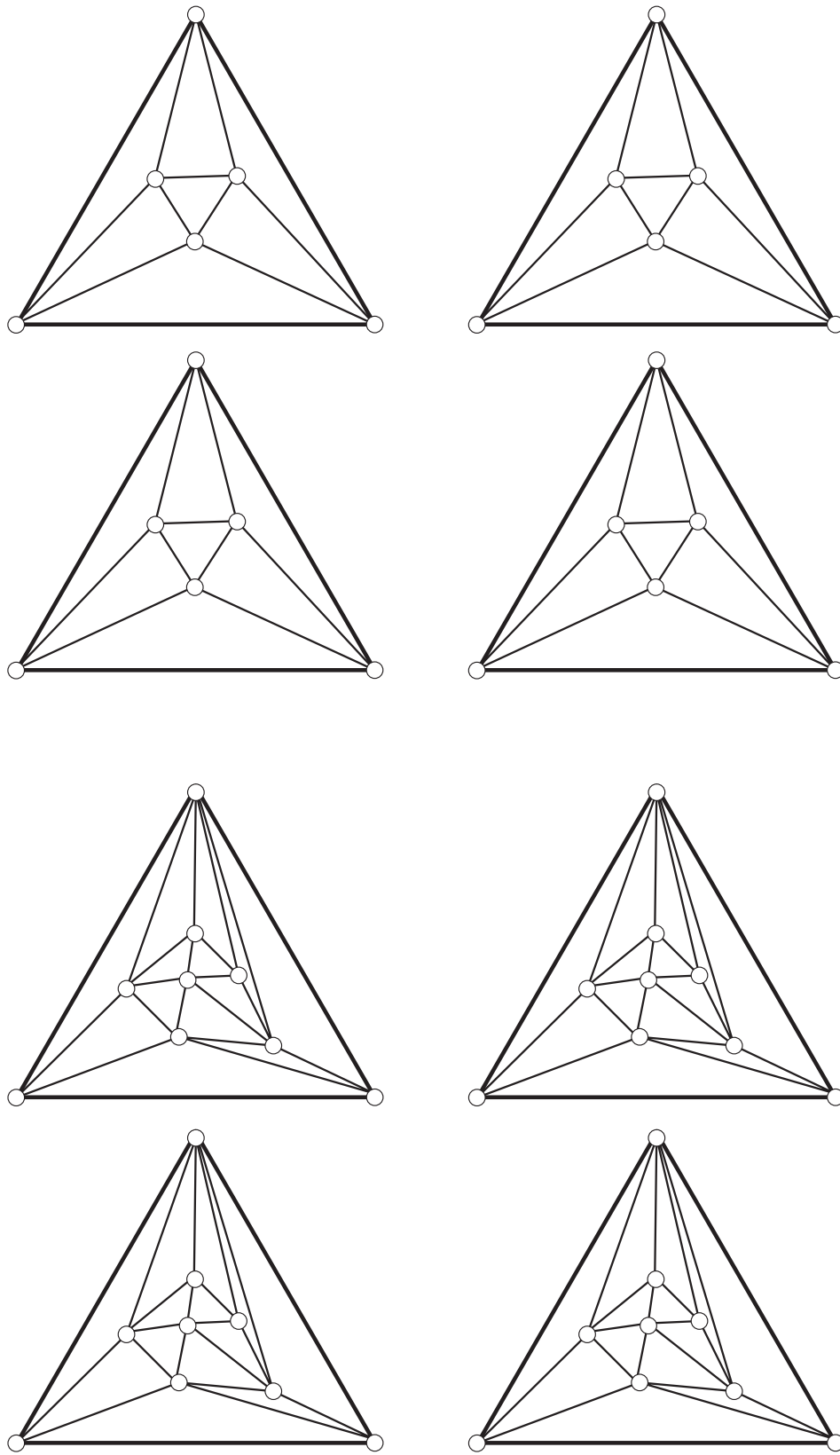


図 9.2: 赤・青・黄色の三角形 1

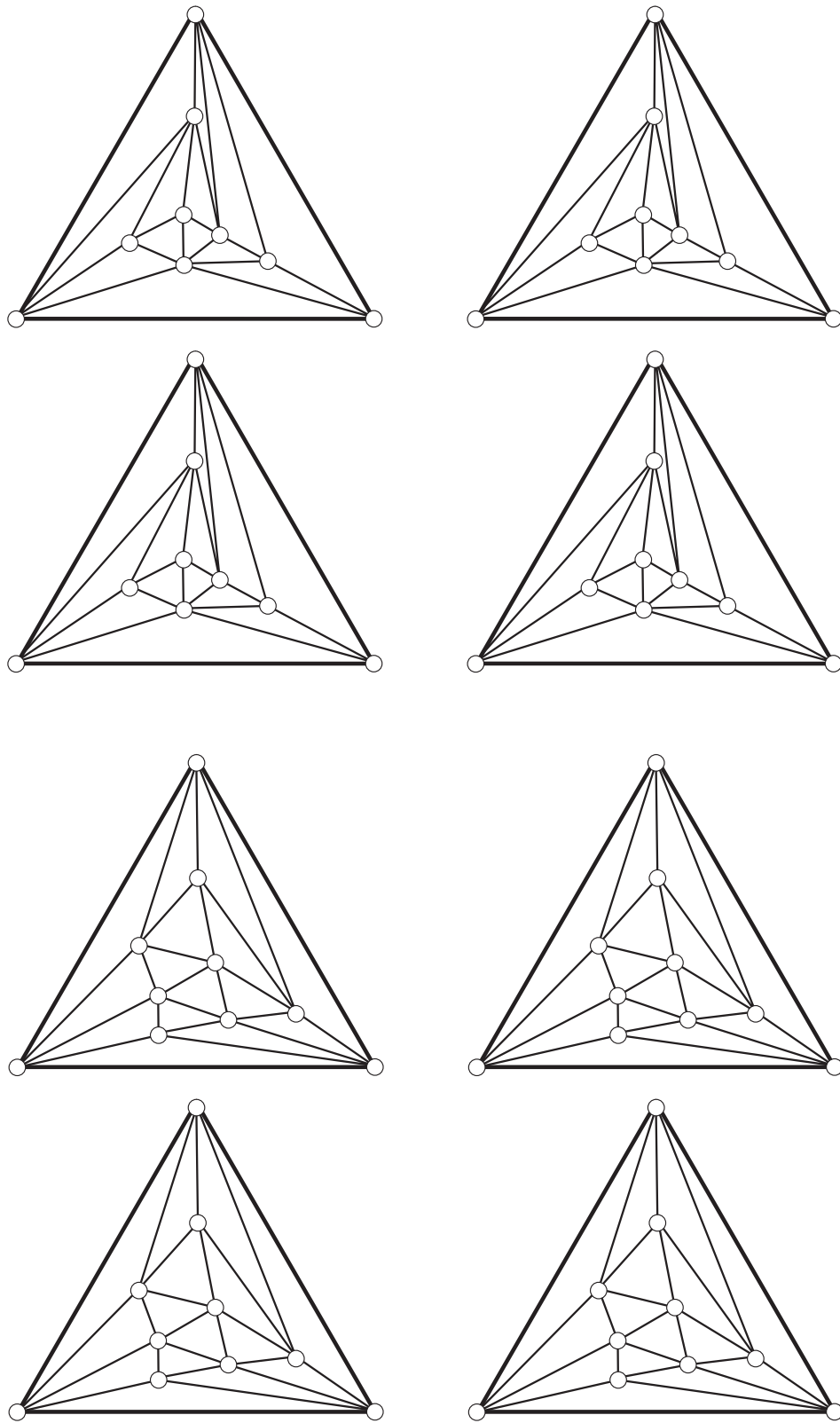


図 9.3: 赤・青・黄色の三角形 2

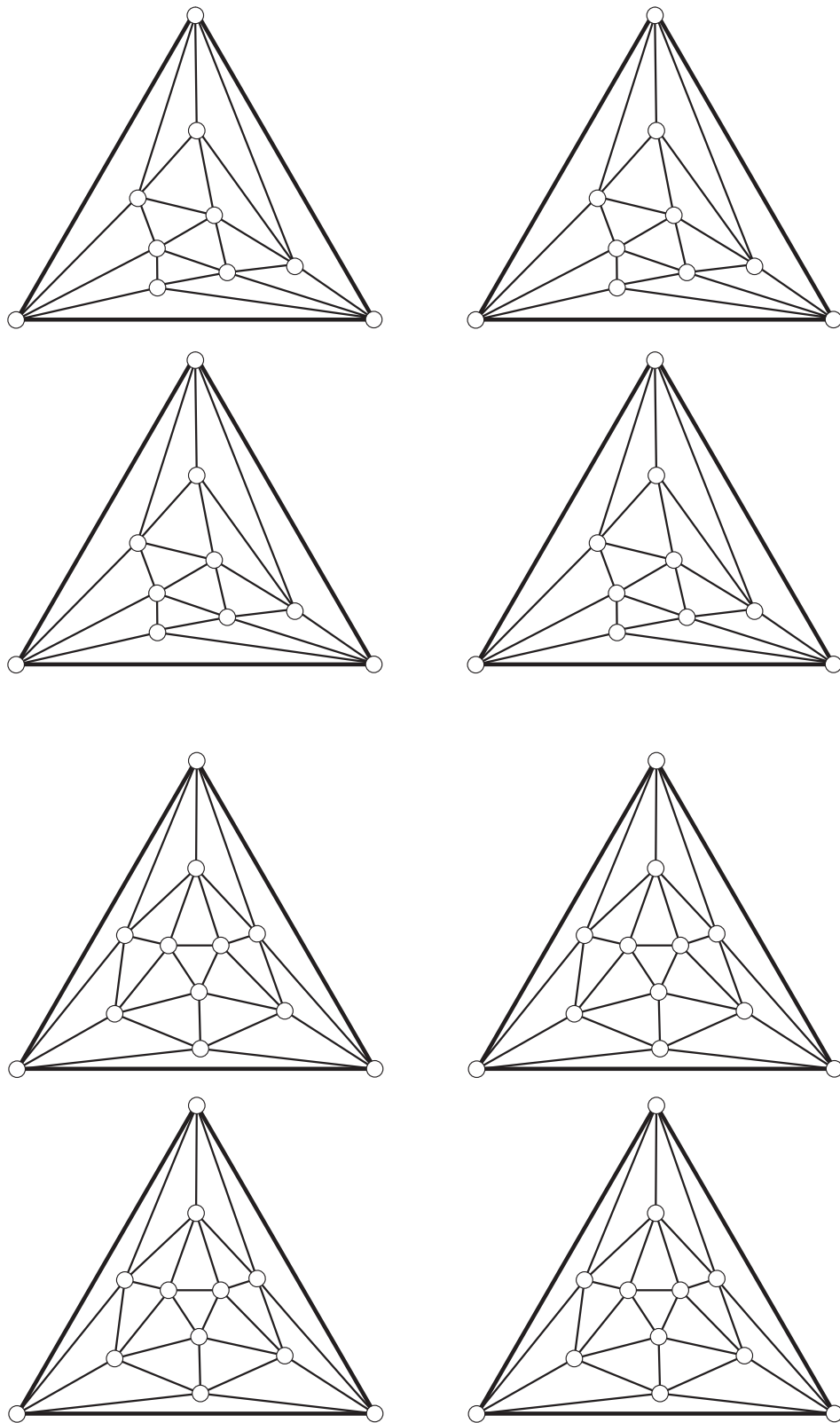


図 9.4: 赤・青・黄色の三角形 3

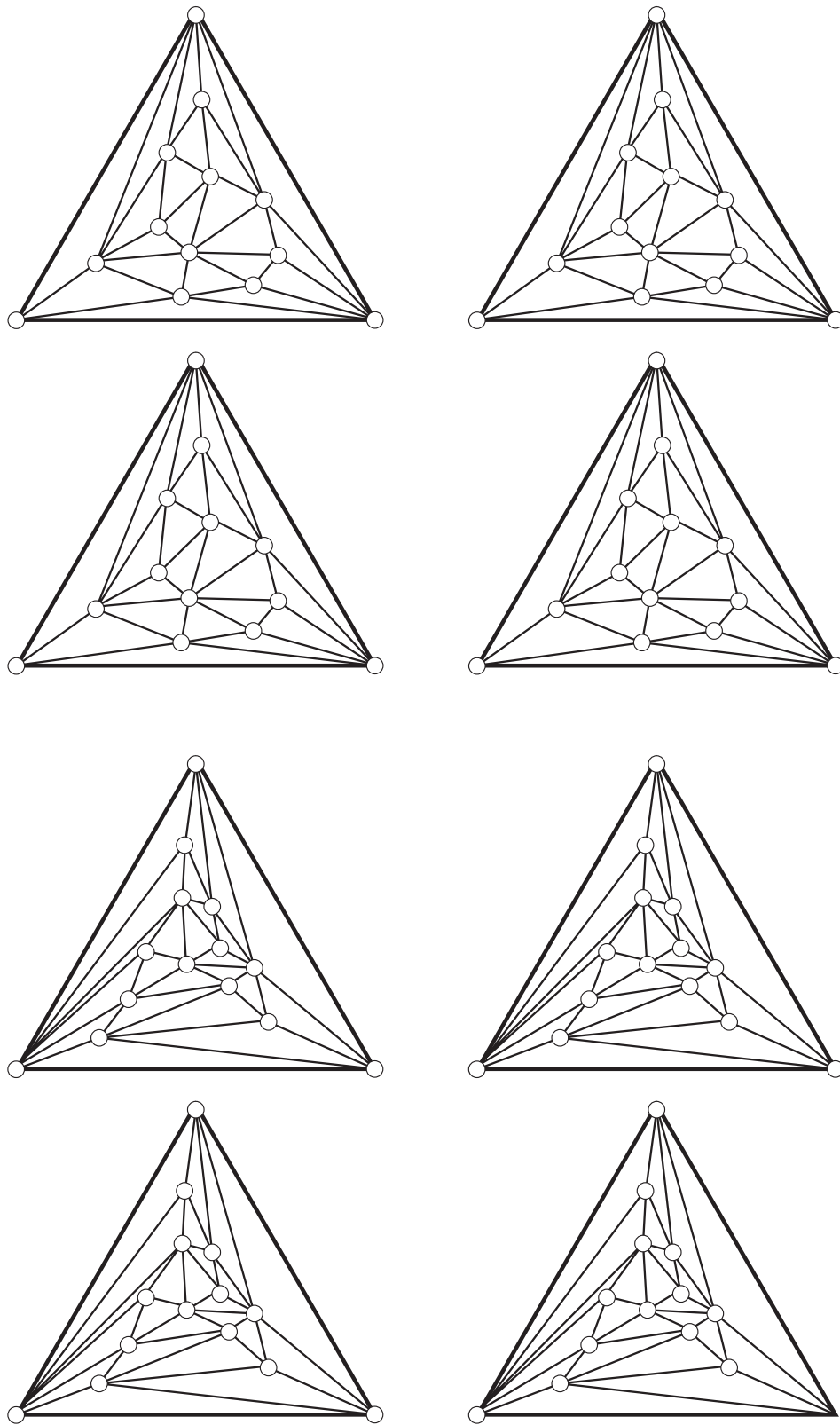


図 9.5: 赤・青・黄色の三角形 4

次の定理 9.1.1 がわかっています .

定理 9.1.1 (赤・青・黄色の三角形) どんな三角形の分割に対しても、また、どのように色を塗っても赤・青・黄色の三角形ができる .

定理 9.1.1 の証明の前に、少し実験をした方が理解しやすいので、図 9.2 から図 9.5 のグラフに対して (同じグラフを 4 つ描いてあります) 赤・青・黄色の三角形がどのようにしてもできることを確かめよう .

どのような三角形でも赤、青、黄色の三角形ができないようにすることは不可能みたいな事がわかると思う . では、この不可能みたいな事を不可能だと示してみよう .

多くの学生は具体的に与えられた三角形に対してだと (場合わけが多くなるかもしれないが) 証明できるでしょう . しかし、どんな場合でも赤・青・黄色の三角形ができるという証明はどうすればよいのでしょうか .

その前に平面グラフから作る新しい平面グラフを作成します .

9.2 平面グラフから作る新しいグラフ (双対グラフ)

平面上に描かれたグラフ図 9.6 を考えます .

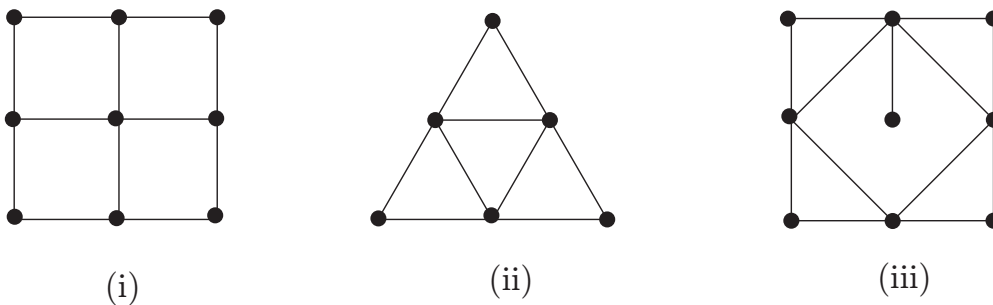


図 9.6: 平面上のグラフ

図 9.7 で示したように、これらのグラフの各々の面の中に頂点を一つとります . この時に、グラフの外側も大きな面だと思って頂点をとります . 図 9.7 では新しい頂点は白抜きでとってあります .

次に、図 9.8 のように、二つの頂点が辺をはさんで隣り合っている時には、この二つの頂点を新しい辺で結びます . 図 9.8 では、新しい辺は細い線で表しています .

すると図 9.9 で示された新しいグラフが得られます . 注意してほしいのは (iii) の時の中心の頂点です . この時、辺をはさんで自分自身と接しているので、ループができる事に注意しよう . このようにして作ったグラフを元のグラフの双対グラフ (dual graph) と言う .

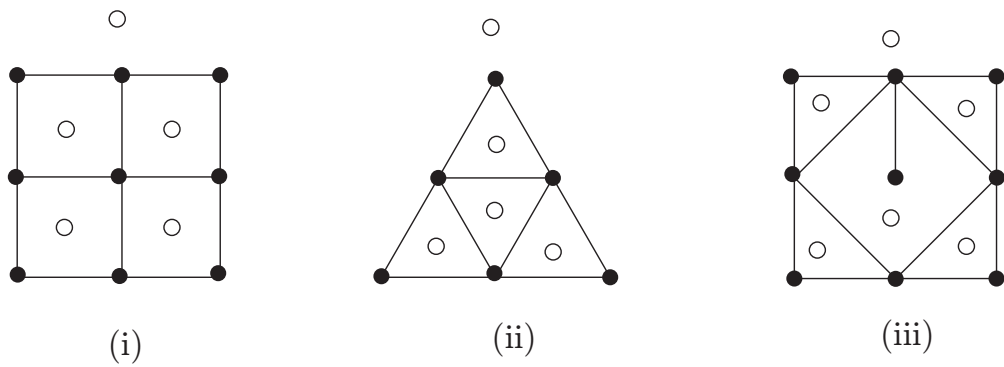


図 9.7: 面に頂点をとって

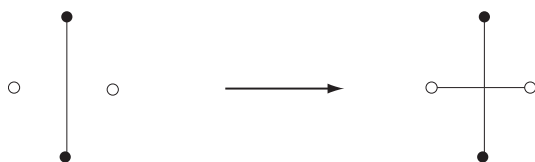


図 9.8: 辺を描き入れて

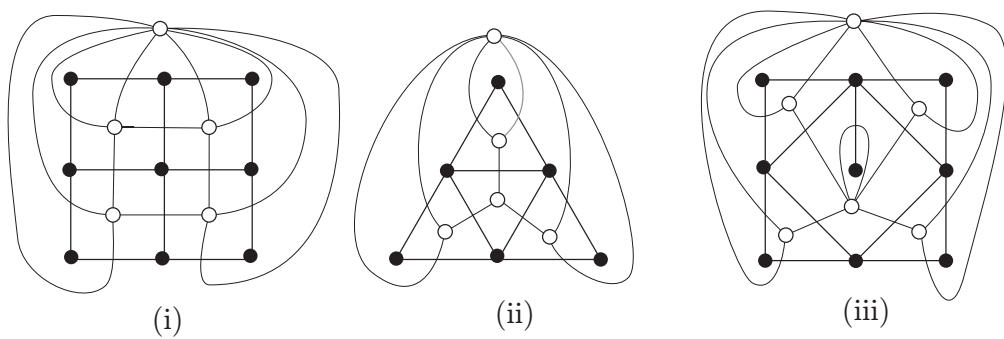


図 9.9: 双対グラフ

練習 図 9.10 のグラフに対して双対グラフを求めよ .

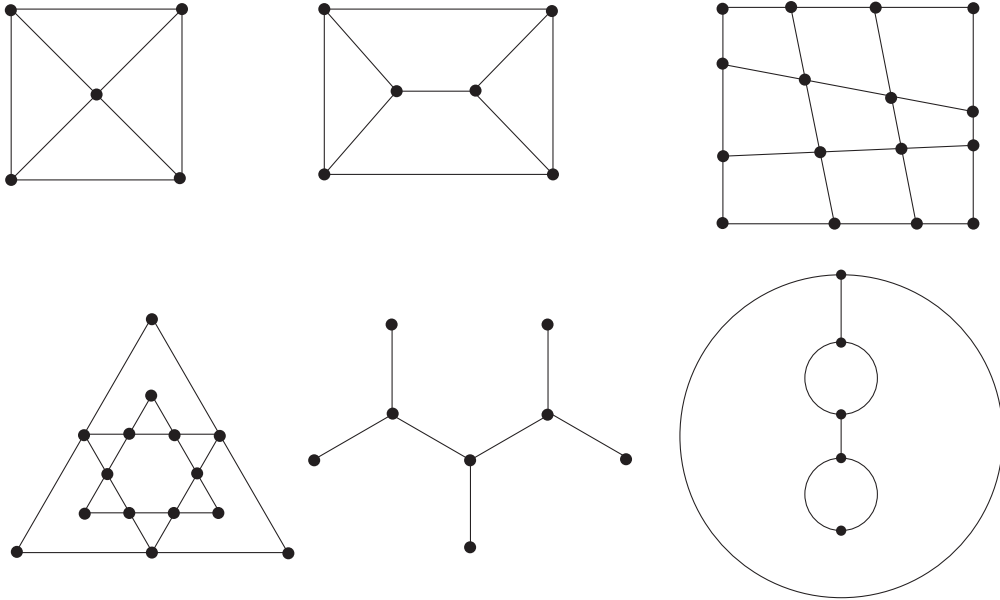


図 9.10: 双対グラフを描き入れて

以上の操作により平面グラフ G から新しい双対グラフが得られました . このグラフはまた平面グラフなので双対グラフを取ることができます . では、どのようなグラフが得られるのか考えてください .

よく見ると、元のグラフに戻っている事に気がつかないでしょうか ? 双対グラフの双対グラフは元のグラフに戻ります . 証明は元のグラフと双対グラフを描いてみて眺めているとわかると思います .

9.3 赤・青・黄色の三角形の証明

赤・青・黄色の三角形を考えるために三角形のグラフの双対グラフを考えます . ただし、議論をわかりやすくするために双対グラフの部分グラフを考えます .

- (1) 大きな三角形の外側に 1 つ頂点をとる
- (2) 小さな三角形の中心に 1 つ頂点をとる
- (3) 辺で隣あった頂点を辺で結ぶが、辺の両端の色に注目して異なる色の時にその三角形の頂点を辺で結ぶ . 同じ色の時には辺を結ばない .

すると新しいグラフができました .

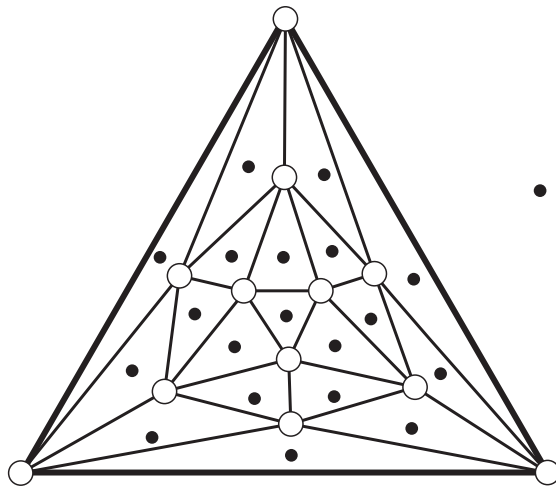


図 9.11: 双対グラフを描き入れて

実験 図 9.11 に対して、頂点に色を塗り上の方法で新しいグラフを描き入れて見なさい。

この新しいグラフを見て気がつくことを述べてください。

問題 図 9.12 の三角形の頂点に対して上の条件 (1)-(3) と合うように色を塗りなさい。

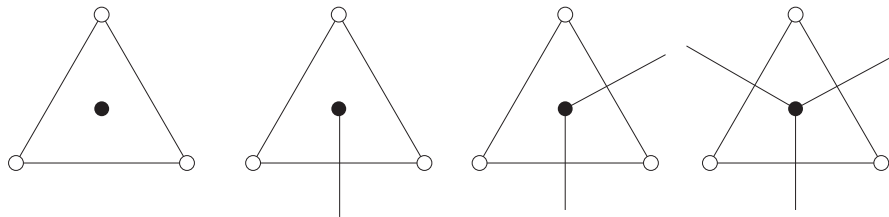


図 9.12: 辺の周りは

頂点に集まる辺の本数が一本の時は頂点にどのように色を塗ってもできない事がわかります。頂点に集まる辺の本数が一本とはならない事がわかると思う。すると頂点に集まる辺の本数は「0, 2, 3」のどれかだという事がわかる。また一番外側では頂点に集まる辺の本数が3の頂点(大きな三角形に対応)があることがわかる。p. 71 系 8.3.1 より頂点に集まる辺の個数が奇数となる頂点は偶数個なので頂点に集まる辺の個数が3の頂点が少なくとももうひとつあることがわかる。この頂点は大きな三角形の内部にある。また、3本の辺が集まる頂点に対応する小さな三角形は3つの頂点の色がすべて異なっています。よって、この三角形が赤・青・黄色の三角形になります。

レポート 24 大きい三角形の辺も分割して小さな三角形にわけると、図 9.13 参照。
 以下のようにして、頂点に色を塗っていく。

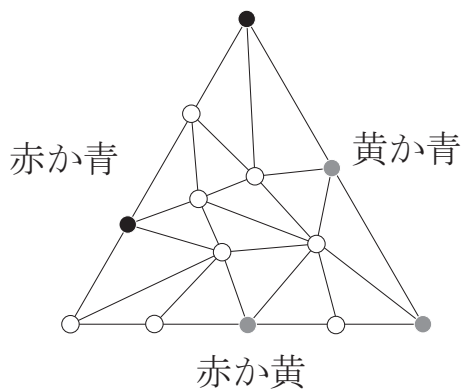


図 9.13: 赤・青・黄色の三角形の拡張

- (1) 大きい三角形の辺にある小さい三角形の頂点は、両端の頂点の 2 色の色で塗る。たとえば、両端の色が青と赤ならば青と赤だけで塗る。
- (2) 大きい三角形の内部の頂点には、自由に色を塗る。

すると、赤・青・黄色の三角形が (奇数個) どこかにできることを示せ。

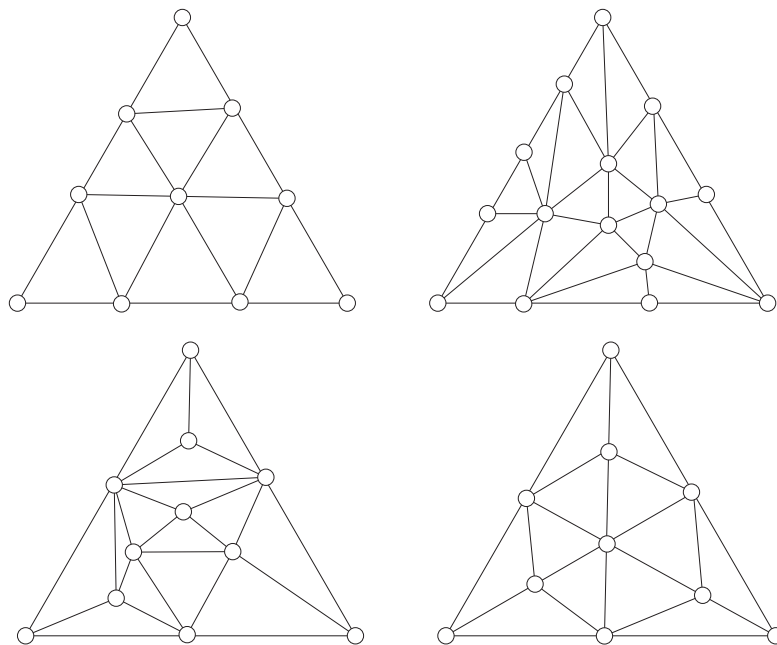


図 9.14: 練習用

更に、定理の証明で使った、頂点に集まる辺の本数が一本のものはないという事は 2002 年の東京大学の文系の入試問題 数学 (A) でも出題されています。(下の問題 2 で $m + n = 3$ の時がそうです。) たぶん、正解率は低かったと思います。計算はできるけど、この手のものが苦手な人が多いので、グラフ理論の授業を聞いて力をつけましょう。

レポート 25 [2002 年東京大学文系入試問題 数学 (A)] 円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意に並べる。これらの点により、円周は $m + n$ 個の弧に分けられる。このとき、これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数である事を証明せよ。ただし、 $m \geq 1$ 、 $n \geq 1$ であるものとする。図 9.15 参照。

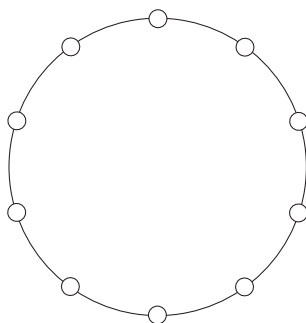


図 9.15: 円周で考えて

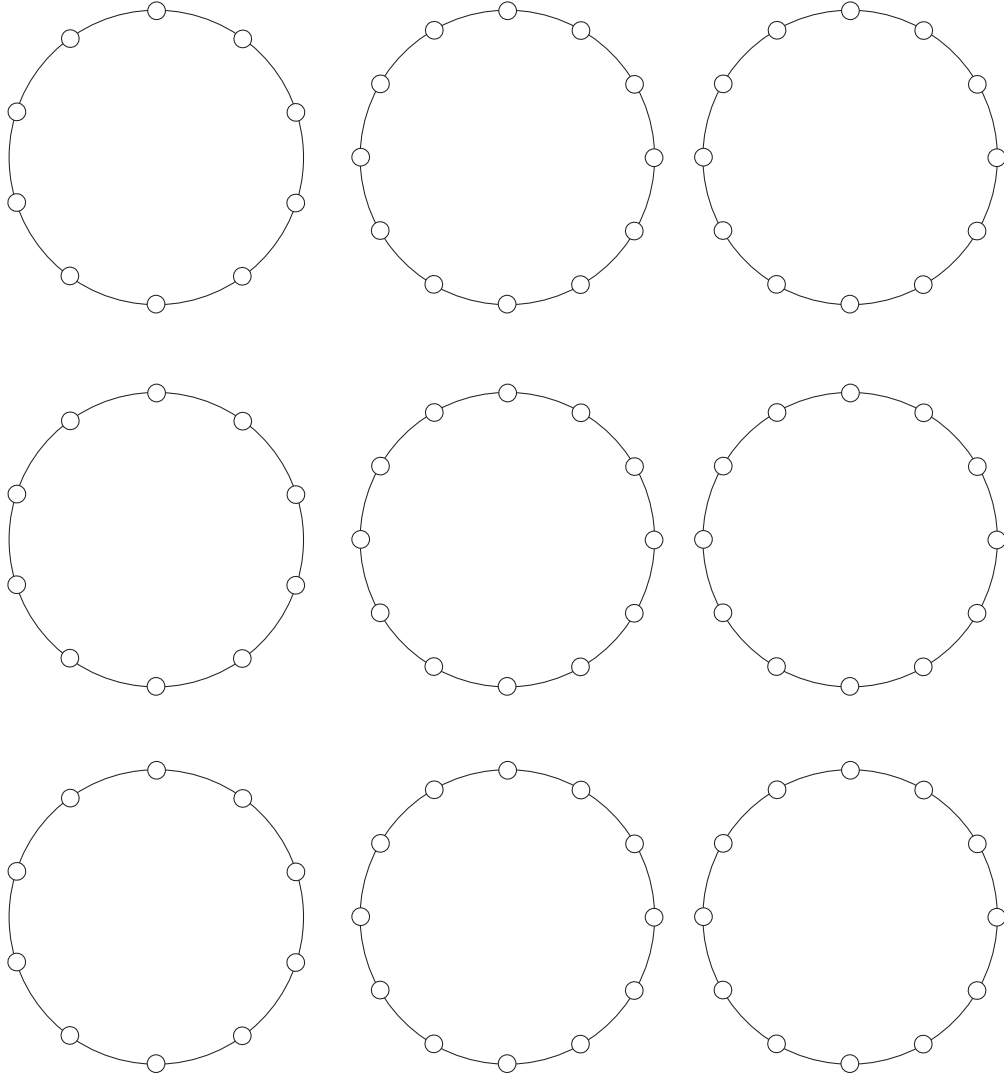


图 9.16: 練習用