5 論理を学ぼう

5.1 丁寧な文章

グラフ理論と数学を勉強する上で論理は重要です．論理がわかっていないと、グラフ理論の議論を理解するのは難しいかもしれません．しかし、論理は高等学校で数学Aで少し勉強するか、大学で論理学の授業を受講しなければ、なかなか勉強する機会がありません．そこで少し簡単な論理の練習をします．

晴れならば運動会をする

手始めに，日常会話の中から論理を勉強をしていきます.「晴れならば運動会をする」と言われたら、日常会話の中では、雨ならば運動会は中止であることを暗示しています．すなわち、晴れと運動会をする事は同じ意味を表しています．しかし、数学や論理学では、雨の場合は運動会をするかしないかは決めていないと考えます.

次のように考えるとわかりやすいかもしれません.「晴れならば運動会をする」を丁寧な文章で言い換えれば、「晴れならば運動会をするが、晴れでない場合はするかしないかは決めていません」と言う意味だと考えましょう.

「雪が積もればスキーに行く」とは「雪が積もればスキーに行きますが、雪が積もらない場合はスキーに行くかどうかは決めていません」となります．雪が積もっていないゲレンデでスキーができるかどうかは考えないことにします.

次のような例を考えれば良いかもしれません.

(1) $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ である.
(2) $x = 1$ ならば $x + 3 = 4$ である.

(1) を言い換えてみると「$x = 1$ ならば $x^2 = 1$ ですが、$x \neq 1$ の時は $x^2 = 1$ となるかどうかはわかりません」となります．実際に $x = -1$ のときにも $x^2 = 1$ となるし、$x = 3$ の時には $x^2 = 9 \neq 1$ となります．したがって、数学の場合は「晴れならば運動会をする」とは、晴れでない場合は、運動会をするかしないかは決めていないと考えないといけません.

しかし、(2) では $x = 1$ と $x + 3 = 4$ は同じ事を表しています．これは、偶然に「$x + 3 = 4$ ならば $x = 1$ である」と言う事も成り立っていたからです.

一般に「A ならば B」は「B ならば A」を意味しません．そして、「A ならば B」と「B ならば A」は意味が異なります.

ところが (2) の場合「$x = 1$」ならば「$x + 3 = 4$」であり「$x + 3 = 4$」ならば「$x = 1$」であると言えます．このような場合、「$x = 1$」と「$x + 3 = 4$」は同じ事を表していると考えます.

「A ならば B」と「B ならば A」の両方が成り立つ時に A と B は同じとみなします．専門用語では A と B は**同値**と言います.

さらに、次のような場合も文章の順番も気にしないといけません.
(I)「ある薬があってすべての病気に効く」と
(II)「すべての病気にある薬があって効く」
は順番が違うだけで意味がまったく異なります. (I) はある魔法の薬があってどんな病気にも効くと言う事です. (II) は風邪には風邪薬、腹痛には胃腸薬があるということを言っています.

したがって、数学や論理学などでは、文章を読むときには丁寧に読むことが必要となります.

練習 1 次の文書を丁寧な文章に言い換えましょう.

(1) テストで 90 点以上取れたら TDL に連れて行く.
(2) 宝くじが当たれば家を買う
(3) 三角形で 3 つの辺の長さが等しければ正三角形である.
(4) 正方形ならば菱形である.
(5) 警報が出ると学校は休校になる.
(6) 鳥は空を飛ぶ.

5.2 否定

ある文章 A に対して「A でない」と言う文章を文章 A の**否定**と言います. たとえば、「明日は晴れである」の否定は「明日は晴れでない」となります.
「晴れならば運動会をする」の否定を考えて見ましょう. もう一度「晴れならば運動会をする」と言う文章を丁寧に言い換えます.「晴れならば運動会をするが、晴れでない場合はするかしないかは決めていません」と言うことでした.
したがって、「晴れならば運動会をする」の否定は「晴れていたのに運動会が中止」となる事がわかります. 晴れていない場合には運動会をしてもしなくても良かったので、「晴れていないのに運動会をする」ではないことに注意してください.

練習 2 上の練習 1 の文章の否定の文章を作れ. (慣れていないといきなり否定の文を作るのは困難かもしれません. その場合には、丁寧な文に直して考えましょう.)

あるコメディアンの例
あるコメディアンが占い師に言われました.
「おサルと言う芸名をモンチィチィに改名しないと売れないわよ」
では、どのような時にこの占いが外れたといえるでしょうか.

(1) 改名しなかったけれど売れた.
(2) 改名したのに売れなかった.
(3) 改名しなくて売れなかった.

(4) 改名して売れた.
(5) それ以外のとき.

わかりやすいように、大事なところだけ鍵カッコ付で書いておきましょう.

「改名しない」ならば「売れない」

となります. だから、丁寧に言えば「改名しないと売れないけれど、改名した場合は売れるかどうかはわかりません」となりますね. 改名しない場合については述べているけど、改名した場合は売れるかもしれないし、売れないかもしれないのです.

したがって、「改名しないけど売れた」時にこの占いは外れたとなります.

日常の言葉使いと数学との違いなので注意が必要です. 日常会話では「おサルと言う芸名をモンチィチィに改名しないと売れないわよ」とは、改名したら売れると暗に示しているので、注意が必要です. だから、「改名したのに売れない」場合を占いが外れたと思うのです.

5.3 対偶

「晴れならば運動会をする」を丁寧に言えば、「晴れならば運動会をするが、晴れでない場合はするかしないかは決めていません」でした. 運動会をしているとその時の天気はわかるでしょうか?晴れならば運動会をするが、晴れでない時も運動会をしているかもしれないことがわかります. では、運動会をしていない時の天気はわかるでしょうか？この時は晴れでないとわかります.「運動会をしていないならば晴れでない」事がわかります. また、同様に考えることにより「運動会をしていないならば晴れでない」から「晴れならば運動会をする」が導き出されます. したがって、この二つの文章は同じ意味を持っていると考える事ができます.

「A ならば B」に対して「B でないならば A でない」を**対偶**と言います. そして、元の文章と対偶の文章は同じ意味 (同値) を表しています.

練習 3 p.40 の練習 1 の対偶はどんな文章になるか？また、元の文章と同じ意味になっていることを確かめよ.

対偶をとっても同じ意味を表すので、知らず知らずのうちに対偶で考えていることがあります.
たとえば、「犯人ならば犯行現場にいた」のだから「犯行現場にいなければ犯人でない」事になります.

練習 4 「勉強するならば良い成績を取れる」と「勉強しなければ良い成績は取れない」の違いを述べなさい.

5.4　畳を敷きましょうから

4 章の議論を論理の方から見直すことにします．4.1 節の 7 畳の問題をもう一度考えてみましょう.

問題 1 図 5.1 に畳を敷き詰めることができますか？

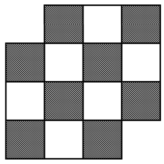


図 5.1: 7 畳の部屋に色を塗る

「畳を敷き詰める事ができたとすると白と黒の個数は同じ」事を示しました．図 5.1 で白と黒の個数を数えると白が 6 個、黒が 8 個あるので個数が同じではありません．そこで、対偶をとって「白と黒の個数が同じでないならば畳を敷き詰めることができない」[6]事がわかります．よって、この部屋には畳を敷き詰めることができない事がわかりました.

次に 4.3 節の問題を考えてみます.

問題 2 図 5.2 のグラフに対して、ある頂点から出発して、辺に沿って移動してすべての頂点を一度だけ通って元の頂点に戻ってくる事ができますか．ただし、通らない辺があってもかまいません.

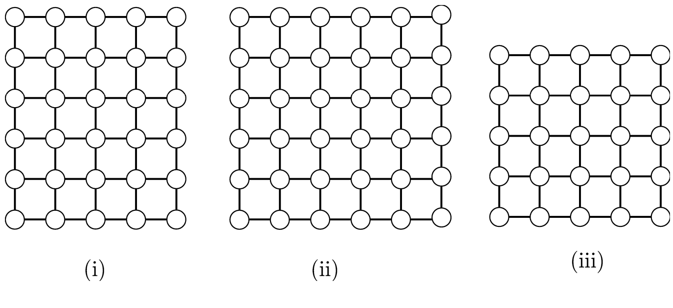


図 5.2: すべての頂点をまわって

[6]丁寧な文章で言い換えれば「畳を敷き詰める事ができたとすると白と黒の個数は同じですが、畳を敷き詰める事ができない場合は白と黒の個数は同じかどうかわかりません」となります.

すると、白と黒の個数が同じ場合は畳を敷き詰める事ができるかもしれないしできないかもしれません．しかし、「白と黒の個数が異なると畳を敷き詰める事ができない」事がわかります．すなわち、対偶を考えています.

ここで重要な事は、すべての頂点をまわることが可能ならばなぜ可能なのかの証明を示し、不可能ならばなぜ不可能かの証明を示さないといけません．その証明はある前提から結論を論証で導くことで、論証の中に推測が入ってはいけません．

図 5.2 の (i) と (ii) のグラフが可能な事はわかると思います．その証明は、道順を示せばよい．

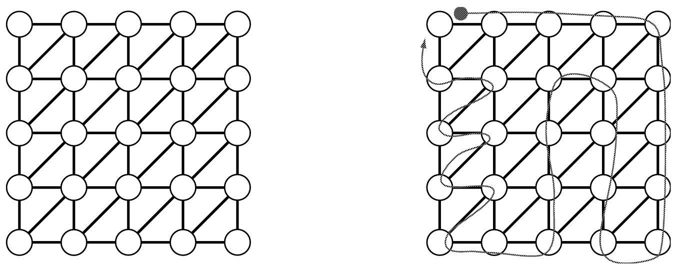
問題は (iii) のグラフです．いくら試しても不可能でしょう．したがって、(iii) のグラフはまわることができないと仮定して、それを論証していく必要があります．

たまに「(i) と (ii) のグラフの頂点の個数が偶数なので可能、(iii) のグラフの頂点の個数は奇数だから不可能」と解答する学生がいます．しかし、これは証明にはなりせん．これは、

(1) 頂点の個数が奇数
(2) すべての頂点をまわることができない、

として、(1) から (2) が導き出されると主張しています．

この様に箇条書きにして抜き出せば、(1) から (2) が導き出されることができない事がわかります．たとえば、図 5.3 のグラフは頂点の個数が 25 個の奇数ですが、すべての頂点をまわることは可能です．したがって、(1) の条件だけでは (2) を導くことはできません．



(i)　(ii)

図 5.3: 奇数個の頂点

正しい証明をもう一度与えてみます．この時に証明の目標を明示しておきましょう．

「図 5.2 の (iii) のグラフはすべての頂点をまわって戻ってくる事は不可能」

そして、4.3 節の証明を箇条書きにして書き出します．

(1) 頂点を白と黒で塗る．
(2) 辺で隣り合う頂点の色は異なる．
(3) したがって辺に沿って移動すると白と黒が交互に出てくる．

(4) 出発点に戻ってくる事が可能ならば白と黒の個数は同数.
(5) 白と黒の個数は同数ではない.
(6) よって不可能.

以上のようになります. (1) は証明のための準備で、(2) だから (3)、(3) ならば (4)、(4)(実際には (4) の対偶) だから、(5) なので (6) と言う構造を持っています. さらに、(3) (5) が成り立つグラフに対して結論 (6) が得られる事がわかります. たとえば、図 5.4(i) に対して不可能だと証明することが可能です.

この様に、証明に必要な条件を突き詰めていくことで、証明の範囲を広げていくことも可能です. しかし、白と黒の個数が同数の場合、すべての頂点をまわって戻ってくる事が可能かどうかはわからない事に注意してください. たとえば、図 5.4(ii) のグラフと図 5.4(iii) のグラフは白と黒の個数は同数になりますが、(ii) のグラフは不可能で (iii) のグラフは可能です.

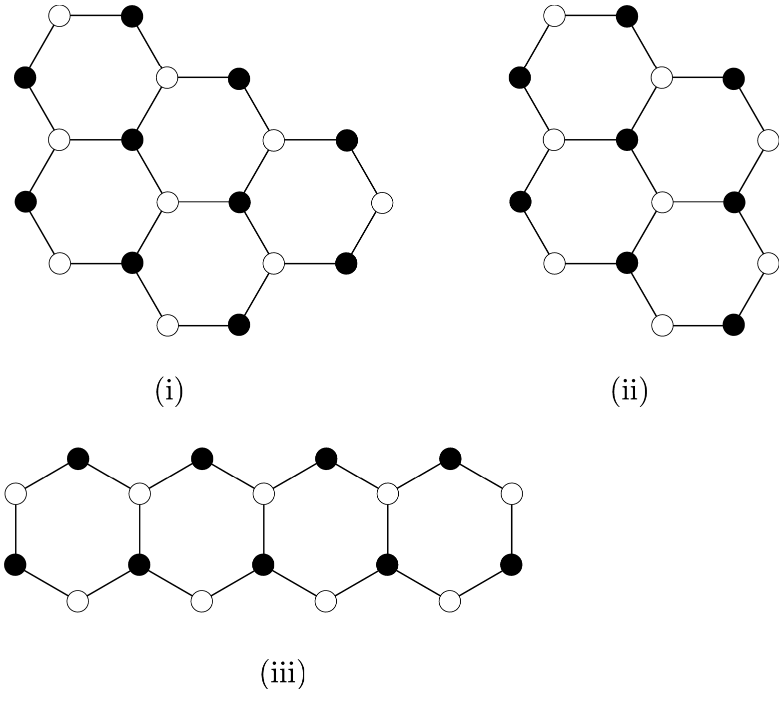


図 5.4: 不可能なグラフ

証明をするときには、証明の目標、証明する時に使ってよい事、証明の構造を明確にする必要があります. さらに、証明の中の論証に飛躍がないかどうかも気にする必要があります.

レポート 10 問題 1 の証明を上のように箇条書きにして、どのような構造を持っているかを述べよ.