

### 3 貨車の入れ替え again

#### 3.1 貨車の入れ替えのクイズ

[クイズ] 図 14 のような線路上に貨車 A と B がある．X の場所には貨車を入れて左右どちらにも出せるが機関車は大きいので入れることができない．また、貨車を 2 台以上入れることが出来ない．また、機関車は貨車を前後に押し引きしたりできる．このとき、貨車 A と B を入れ換えて機関車をもとにもどすのにはどうすれば良いか．グラフを使って考えなさい．(貨車はかつてに 1 人では動きません．)

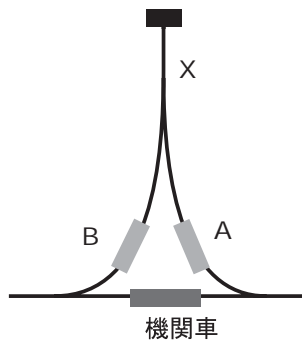


図 14: 貨車の入れ換え 2

この問題は、あるパズルの本の中にあった問題です．ある学生にはちょっと難しいかもしれませんが、すぐに解けた学生もいることでしょう．

学生を見ていると、ノートに線路を書き消しゴムとかペンのキャップなどを貨車だとか機関車に見立てて考えている学生がいます．君達はどんな工夫をしましたか？

ふつうの解答は次のようなものでしょう ..

解答

- [1] 機関車を右の方に移動し貨車 A を X に入れる．
- [2] 機関車を一度戻してから左の方に行き貨車 B を押して A と繋げて A を機関車がはじめに在った所に置く．
- [3] B を X に入れる．
- [4] 機関車を使い A を B が在った所に移動する．
- [5] 機関車を右側に移動し B を A のあったところに移動し、機関車をはじめの位置に戻す．

「う～ん、よくわからん . . .」と言っている人はいないでしょうか？ ノートにこの線路を書いて消しゴムとかペンのキャップを機関車や貨車に見立ててフォローしてください .

図 15 のようなイメージができあがれば大丈夫です .

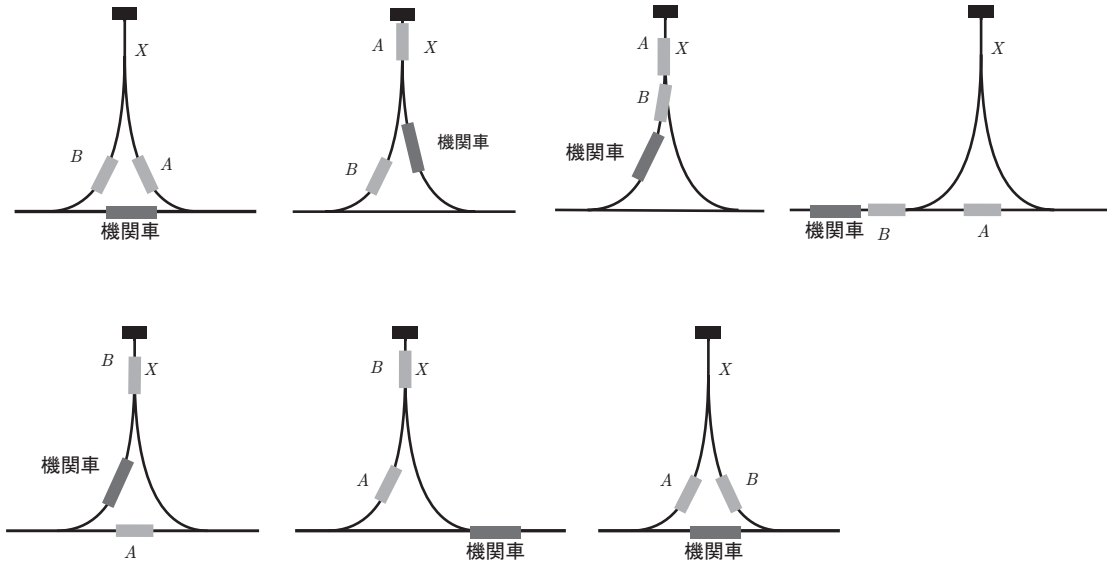


図 15: 貨車の入れ替えの答え

グラフ理論なので前回の授業みたいにグラフを使って解いて欲しい . なかには、この線路の状態をグラフと思う学生がたまにはいます . しかし、これはグラフの良い使い方ではありません . では、どのようなものをグラフの頂点とするのがよいでしょうか

その前に次の問に答えて下さい . 図 16 (i) と図 16 (ii) は同じですか、違うと思いますか .

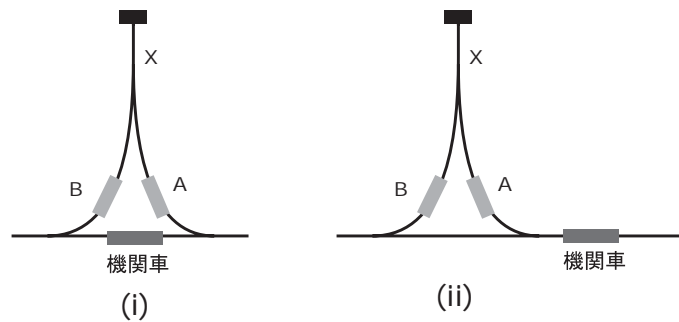


図 16: 貨車の入れ換え 3

この 2 つの状態を違うとしてしまうとあとあと場合わけが大変です . 同じだと思いうことにしましょう . では図 17 の 2 つは同じですか .

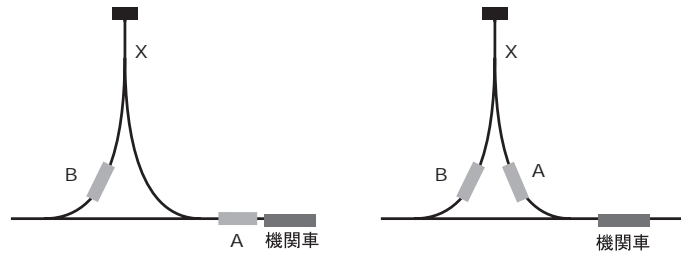


図 17: 貨車の入れ換え 5

この場合は少し難しいかもしれませんが同じだと思の方がらくです. なぜなら、この2つはすぐにたがいにうつすことができますね. すると図 18 は同じだとみなしたほうがいいことがわかります.

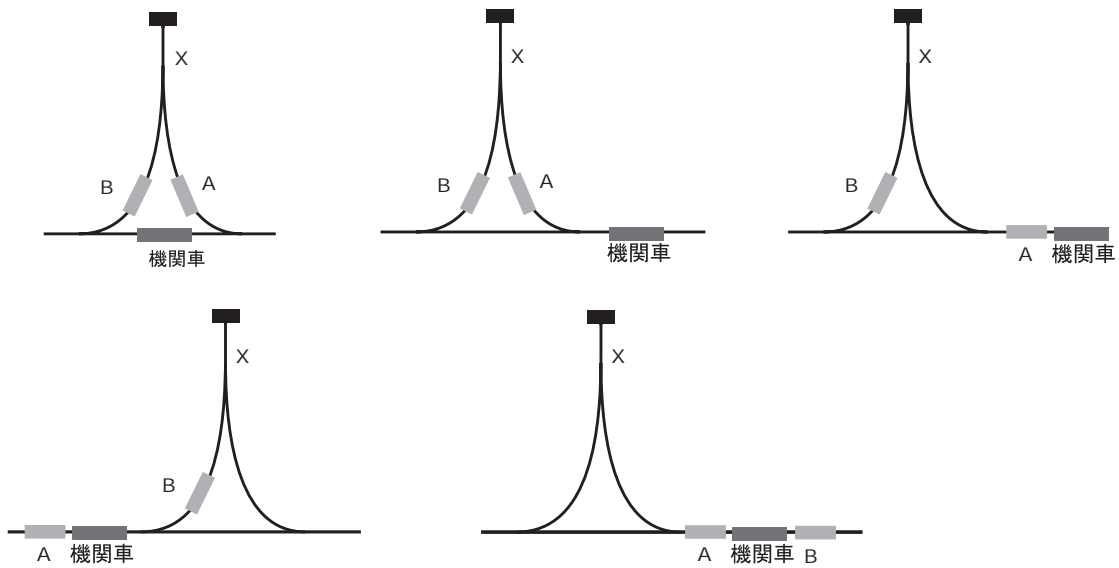
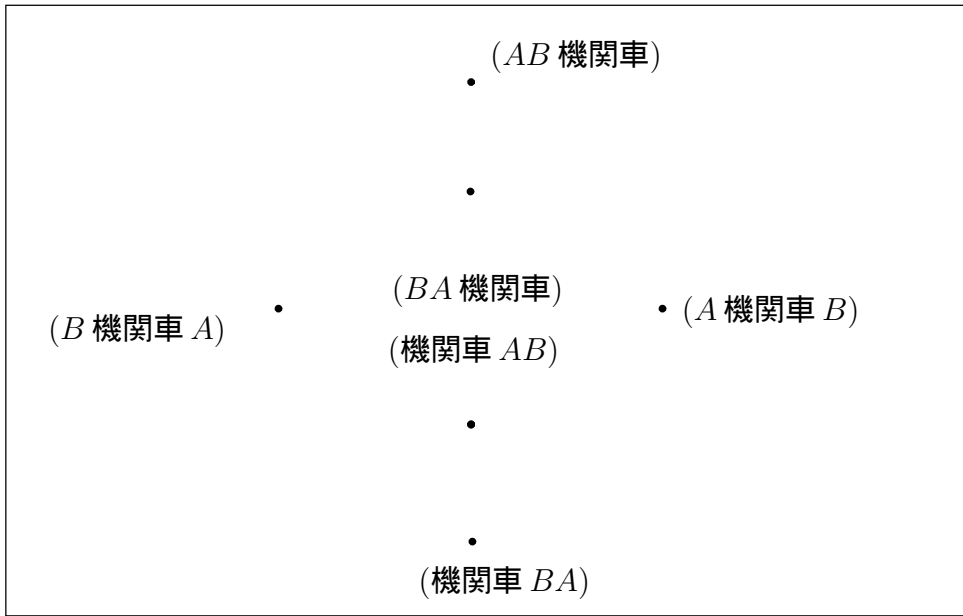


図 18: 貨車の入れ換え 6

すると最後の状態をグラフの頂点にすると機関車と  $A, B$  の並び方を考えればいい事がわかります. この場合は  $(A \text{ 機関車 } B)$  ですね. このときの頂点の集合は  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  通りあります.

$V = \{(AB \text{ 機関車})(A \text{ 機関車 } B)(BA \text{ 機関車})(B \text{ 機関車 } A)(\text{機関車 } AB)(\text{機関車 } BA)\}$   
見やすいようにこの頂点を描いておきます.



頂点だけのグラフ

次に辺は何が対応しているのでしょうか？ターンテーブルの時を思い出してみましょう。では、この頂点の状態をかえるのはどのような操作でしょうか。

図 19 の操作が考えられています。この場合頂点 (A 機関車 B) と (機関車 AB) とを辺で結びます。

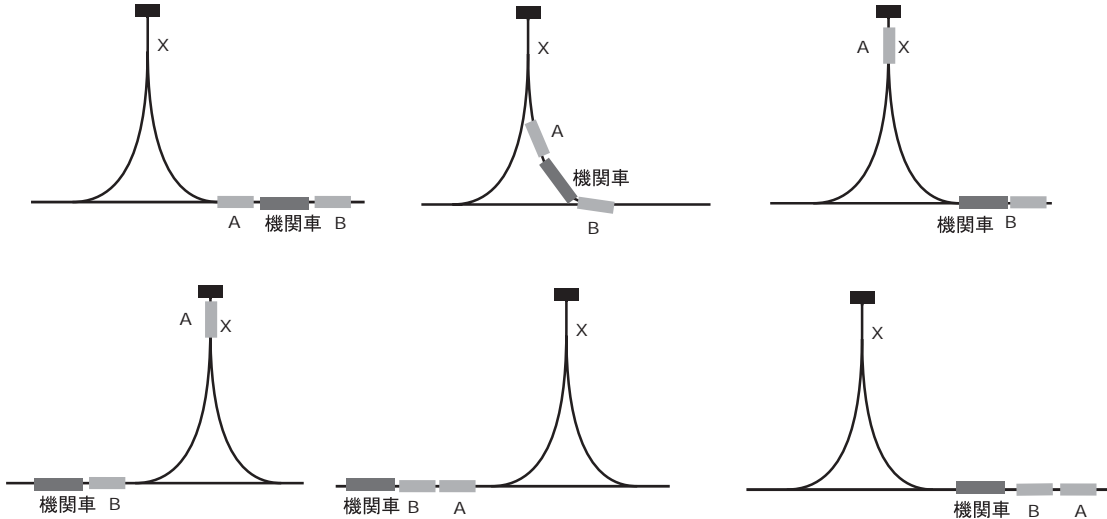


図 19: 貨車の入れ換え 7

以上をふまえて各自グラフをつくってみましょう。図 21 に貨車の絵を入れておきました。必要ならコピーして使いなさい。

レポート 5 図 20 のような線路上に貨車 A と B がある．トンネルの場所には貨車を入れて左右どちらにも出せるが機関車は大きいので入れることができない．貨車 A と B を入れ換えて機関車をもとにもどすにはどうすれば良いか．グラフを使って考えなさい．

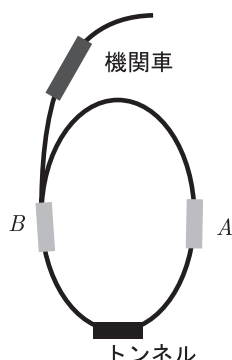


図 20: 貨車の入れ換え (トンネル編)

### 3.2 同値類

あることを考えるのに、そのまま考えずに、一見異なるように見えるけど同じだと思えば分類が楽になる場合があります．このように分類する事を同値類で分類すると言います．貨車の入れ替えのクイズでは、駅という物を作ってそこに集めた時に同じ順番になるものを同じもの (同値) だとみなしたわけです．すると考えないといけない場合わけがかなり少なくなって考えやすくなりました．たとえば、学校の時間割も同値類で考えています．曜日で分類しているのです．もし曜日で分類しなければ 7 月 1 日は、この時間割で、7 月 2 日はこの時間割でと言うふうになって大変ですね．普段の生活では気にしていないけれども同値類で考えている事が多いです．足し算も同値類で考えています． $3 + 5 = 8$  だと  $3 + 5$  と  $8$  をおなじものだとみなしている事になります．

もっと日常生活で使っている同値類について考えましょう！林檎 2 個と林檎 5 個がありました．全部でいくつになりますか？」という問題を考えます．頭の中で「 $2 + 5 = 7$ 」を計算しますね．同じ事を蜜柑でしてみましょう．この場合も頭の中で「 $2 + 5 = 7$ 」を計算しますね．すなわち、林檎であれ蜜柑であれ、個数を計算する時にはおなじものだとみなしています．2 万たす 5 万の場合も同じです．たぶん「 $2 + 5 = 7$ 」を計算して 7 万と言う値を出しているはずなのです．

安野光雅<sup>2</sup>の絵本で同値類について扱った「なかまはずれ」というものがありま

<sup>2</sup>津和野出身で、風景、絵本、エッセーなど幅広い分野で活躍する画家．なぜか数学に造詣が深く、数学セミナーに連載していたりする．中には、変わった絵や不思議な絵を描く画家とされている人もいたりする．

す．残念ながら遊学館には入っていないようです．

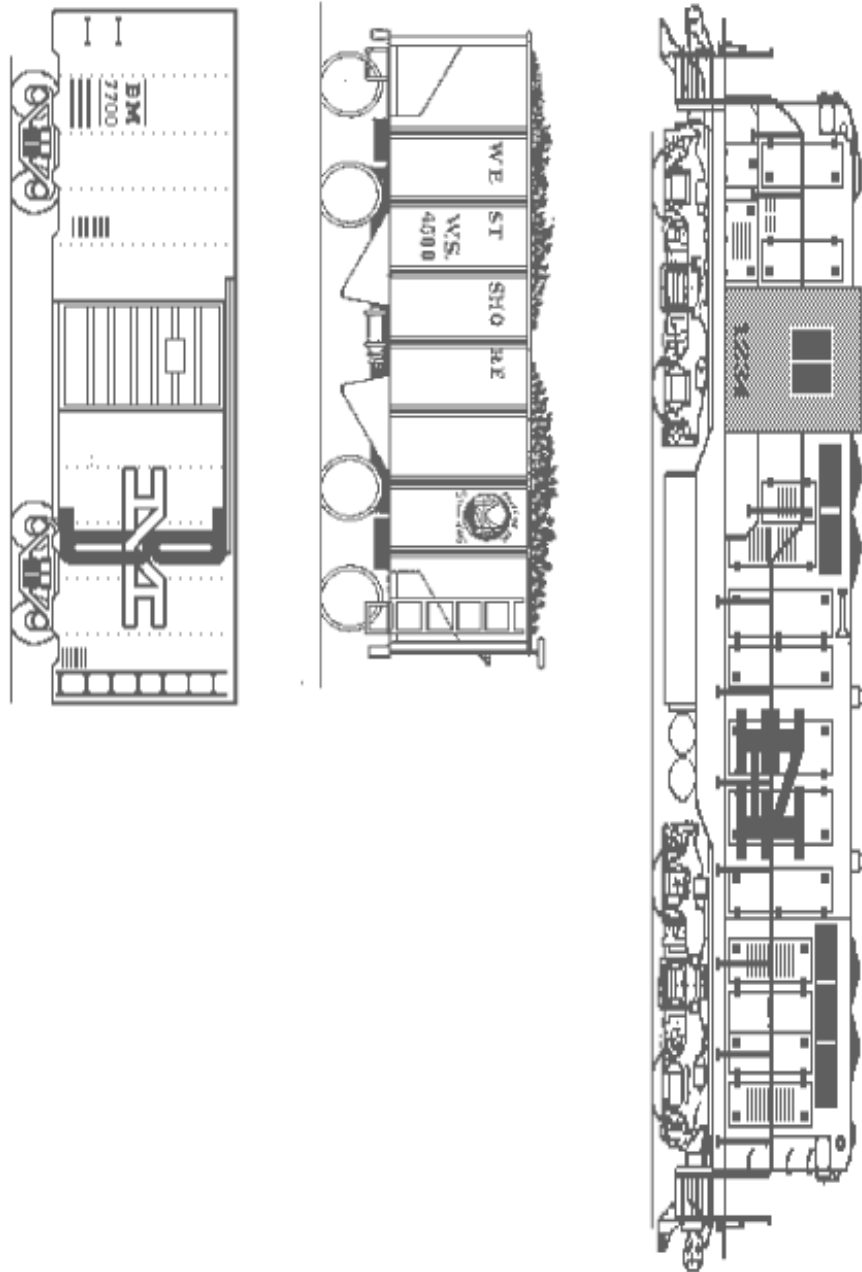


図 21: 貨車の図