2　グラフの定義と応用

2.1　グラフの定義

グラフ　グラフとは頂点 (vertex) と辺 (edge) からなる図形である．また頂点の集合 V を $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 辺の集合 E を $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ と表したりする．また、辺 e の両端の頂点が v_1 と v_2 の時、$e = v_1v_2$ または (v_1v_2) などであらわす．頂点集合 V と 辺集合 E を持つグラフを $G = (V, E)$ と書く．

図 7 はいくつかのグラフの例である．

練習 ノートにいくつかグラフを描いてみよう．また、図 7 の様に特徴を持ったグラフをいくつか作れ．

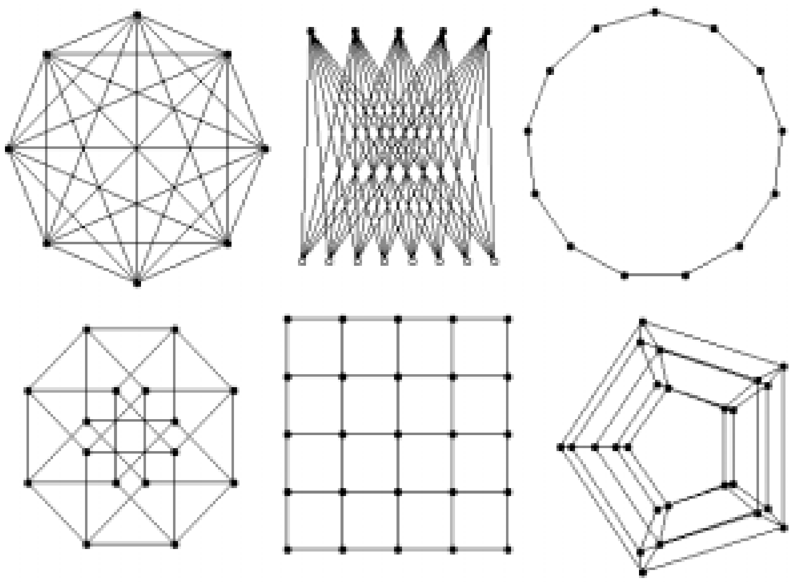
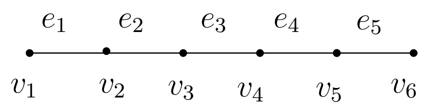


図 7: グラフ・グラフ・グラフ

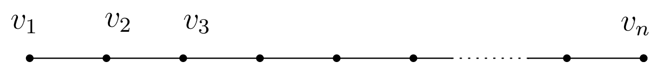
2.2　グラフと電線

グラフは色々なものに応用が利きます．たとえば、電柱と電線を考えてみよう．電柱を頂点、電線を辺とすればグラフができる．(この場合、電柱を辺、電線を頂点とするような人はあまり居ないでしょう．でも、こう考えると便利な時もあります．)

下のように 6 本の電柱が直線上に並んで立っているときを考えよう．電線は何本ありますか？



では、つぎのように n 本の電柱が立っているとき電線は何本あるでしょうか？



わからない時は、n が $1, 2, \cdots, n$ というふうに考えていけばわかりますね．

電柱	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線							

では、ちょっと複雑になって図 8 の場合にはどうなりますか？電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．

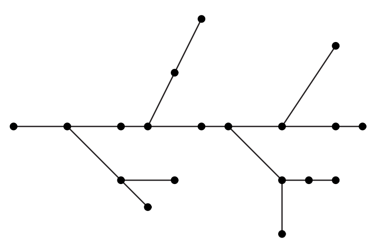


図 8: ちょっと複雑な電線

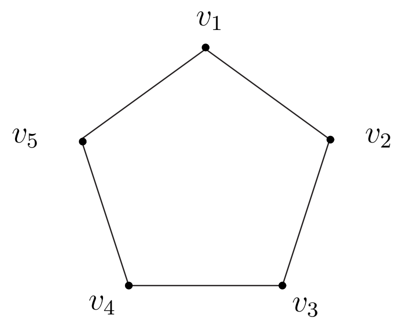
自分で上のようないくつか電線と電柱の例を書いて電柱 (頂点) と電線 (辺) の数を数えてください．何か関係が見つかりませんか？

電柱	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線							

問 電線の数と電柱の数の関係を求めて、なぜそうなるかを説明しなさい．また、その説明を友達などに見せてその説明を理解してくれるか確めてみなさい．理解できなければ、もっと良い説明になるようにしなさい．

2.3 輪のある電線

では、次の図のように輪のような電柱と電線があった場合はどうなるでしょうか?



上のように 5 本の電柱があった場合には電線は何本ありますか？また、電柱が n 本あった場合に電線は何本あるでしょうか？次の空欄を埋めてください.

電柱	2	3	4	5	$\cdots$	n
電線						

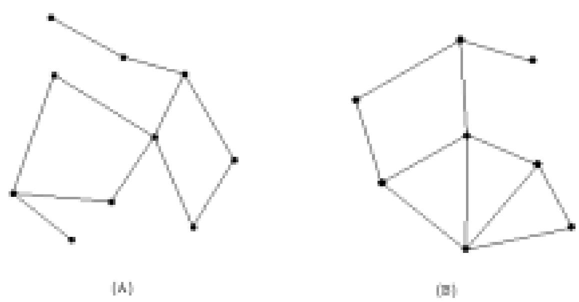


図 9: たくさんの電線

さらに、図 9 のように電柱と電線がありました．電柱と電線の関係はどうなるでしょうか？(A) と (B) のそれぞれの場合に電線と電柱の数を数えて上の場合に当てはまるかどうか調べなさい.

気がついた人がいるかもしれませんが、電柱と電線の関係は他に何か条件がないと求めることはできません.

レポート 1 どのような条件か考えましょう.

レポート 2 山形県または好きな県の国道からなるグラフを描け．国道を辺とみなして、いくつかの国道が交わっている点を頂点と考えよ.

2.4 向きの付いたグラフ

5つのチーム a, b, c, d, e でリーグ戦（総当り戦）をした．その結果つぎの表のようになった．

	a	b	c	d	e
a		◯	◯	×	◯
b	×		◯	◯	◯
c	×	×		◯	◯
d	◯	×	×		◯
e	×	×	×	×	

これをグラフを使って表してみよう．矢印が出ているチームが勝ちで入ってくるチームが負けとしておくとわかりやすいですね．

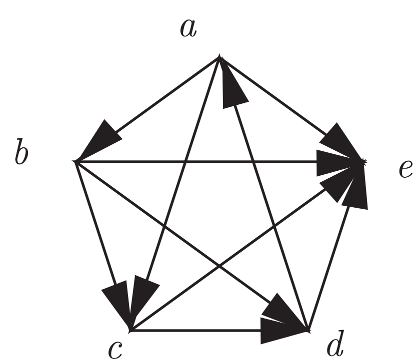


図 10: 向きの付いたグラフ

この様に辺に向きをつけて考えることもあります．

レポート 3 このような例のように向きのついたグラフで考えると良いものの例を考えよ．

2.5 貨車の入れ換え

–本間龍雄 グラフ理論入門 講談社ブルーバックスより

貨車を入れ換えるのにターン・テーブル 図 11 と言うものがある．テーブルには貨車が 2 台のる．テーブルを 180 度回転させるとこの 2 台の貨車の順番を入れ換える事ができる．いま、貨車が A, B, C, D (図 12) あったとする．ここで、D には火薬をつんでいるので気動車のすぐあとには置けないとしよう．$ADBC$ の順

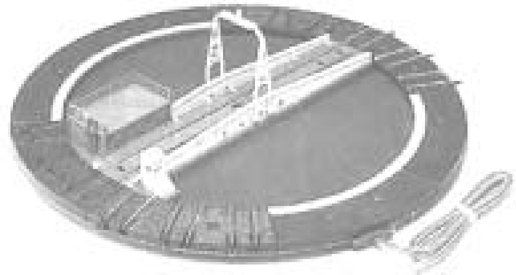


図 11: ターン・テーブル

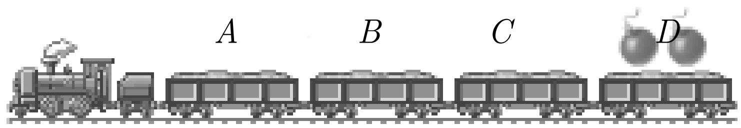


図 12: 機関車と貨車

番に並んでいる列車を $CBDA$ にする事はできるか？また、どのような手順が**一番効率が良いか？**

> 社会生活においては、効率も問題となる．10 回でできるものを 100 回もしないといけないような答えだと学校では正解でも、社会では不正解となってしまう.

このような問題も，グラフ理論で解けるわけですね.

頂点の集合を貨車の並び方で考える．$\{A, B, C, D\}$ の並べ方で D は先頭に置くことができないので

$V = \{(ABCD), (ABDC), (ACBD), (ACDB), (ADBC), (ADCB),$
$(BACD), (BADC), (BCAD), (BCDA), (BDAC), (BDCA),$
$(CABD), (CADB), (CBAD), (CBDA), (CDAB), (CDBA)\}$

となる[1].

一回ターンテーブルを使うことで移りあうことのできる頂点を辺で結ぶ．たとえば $ABCD$ に対して AB をターンテーブルにのせて回転させると $BACD$ になる．このとき $ABCD$ と $BACD$ を辺で結ぶ

[1]規則正しく A, B, C, D が並んでいる事に注意

このようにグラフを描いていくと図 13 のようになる. このグラフを作成する事により、貨車の任意の入れ替えを自由に効率よくできることとなる.

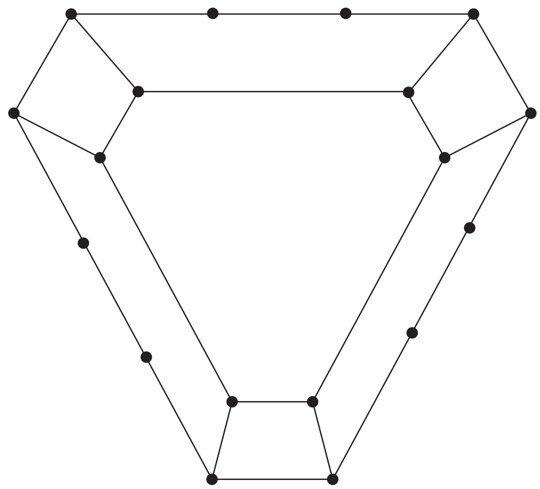


図 13: 貨車の入れ換えのグラフ

2.6　入試問題のグラフ理論

次の入試問題は 1998 年の東京大学の後期の数学の入試問題から取ってきたものである.

レポート 4 この入試問題を解け.

第 3 問

グラフ $G=(V,\ W)$ とは有限個の頂点の集合 $V=\{P_1,\ \ldots,\ P_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{E_1,\ \ldots,\ E_m\}$ からなる図形とする。各辺 E_j は丁度2つの頂点 P_{i_1}, P_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ を持つ。頂点以外での辺同士の交わりは考えない。さらに，各頂点には白か黒の色がついていると仮定する。

例えば，図 1 のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個あり，辺 E_i $(i=1,\ldots,4)$ の頂点は P_i と P_5 である。P_1, P_2 は白頂点であり，P_3, P_4, P_5 は黒頂点である。

出発点とするグラフ G_1（図 2）は，$n=1$, $m=0$ であり，ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする。

与えられたグラフ $G=(V,\ W)$ から新しいグラフ $G'=(V',\ W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する。

図 1

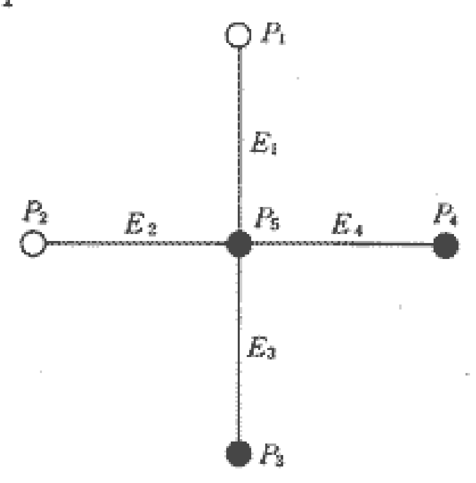
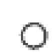
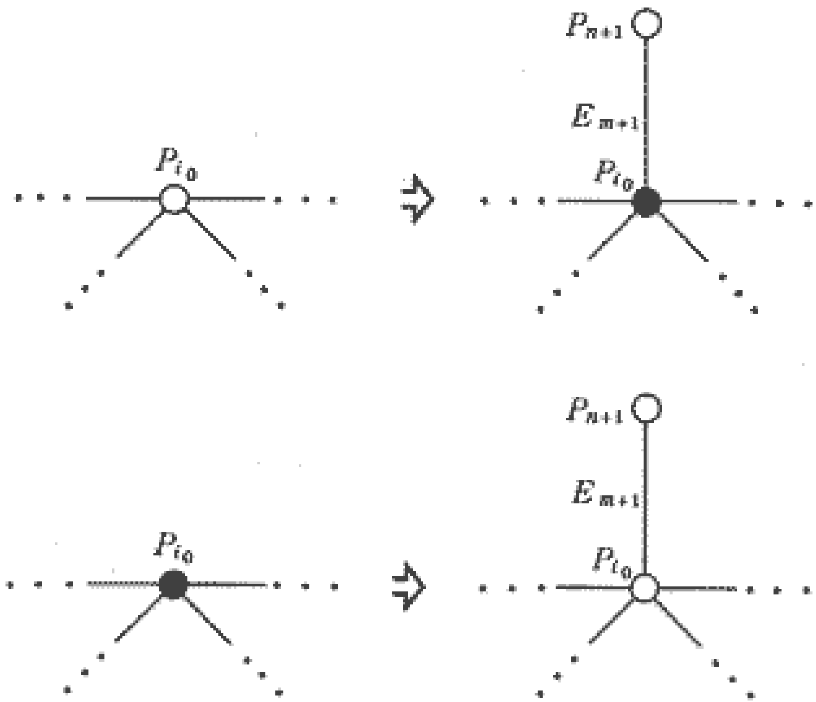


図 2



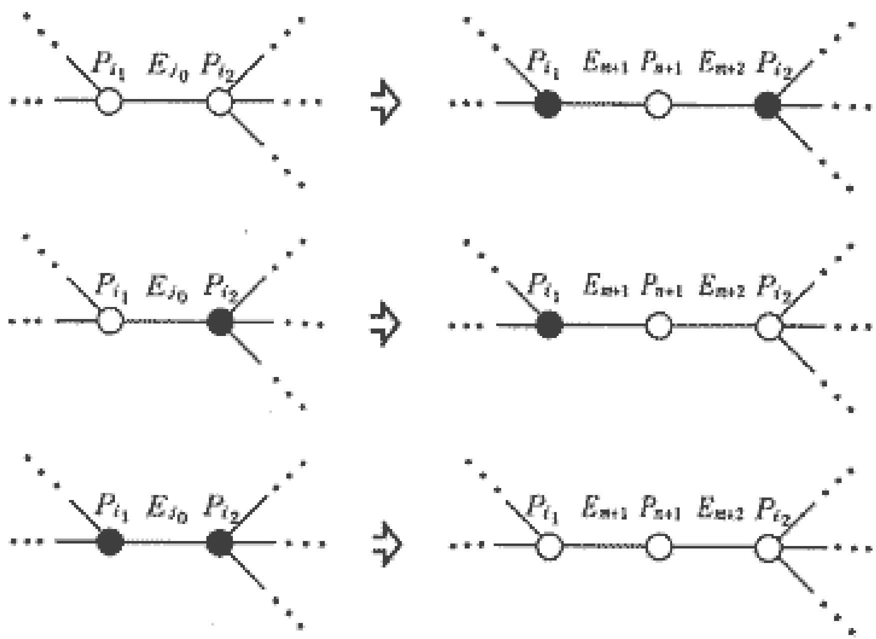
（操作１） この操作は G の頂点 P_{i_0} を１つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし，G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図３）。

図３



（操作２） この操作は G の辺 E_{j_0} を１つ選ぶと定まる。 V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W から E_{j_0} を取り去り，新しい辺 E_{m+1}，E_{m+2} を加えたものとする。E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき，E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり，E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。P_{i_2} についても同様に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図４）。

図 4



出発点のグラフ G_1 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする。次の問に答えよ。

(1) 図 5 の 3 つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ。ここで，すべての頂点の色は白である。

(2) n を自然数とするとき，n 個の頂点を持つ図 6 のような棒状のグラフが可能グラフになるために n のみたすべき必要十分条件を求めよ。ここで，すべての頂点の色は白である。

図 5

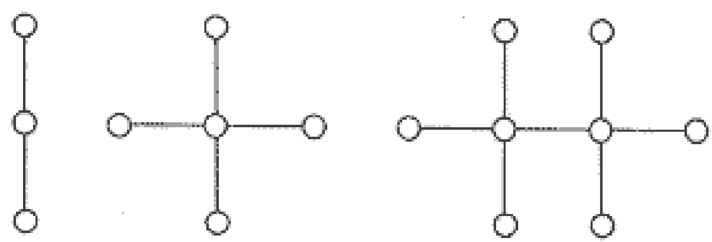


図 6

Note.